Implicit 이동최소제곱 차분법을 이용한 1차원 자유경계문제의 해석

Analysis of 1-D Free boundary Problem Using Implicit Moving-Least-Squares Difference Method

윤 영 철†
Yoon, Young-Cheol

요 약

본 논문에서는 자유경계문제 해석을 위해 정확도가 향상된 implicit 이동최소제곱 차분법을 제시한다. 계면경계에 대한 implicit 정의로 인해 비선형 시스템이 구성되고, 매 해석단계마다 절점해와 계면경계의 위치를 반복계산을 통해 찾는다. 계면경계 결정시 속도항을 한 단계 뒤로 지연시켜 explicit하게 근사적으로 계산하던 기존 방법에 비해 계면경계의 위치를 더 정확하게 계산할 수 있고, 결과적으로 해의 정확도가 향상되었다. 계면경계 위치값이 비교적 빠른 속도로 수렴하기 때문에 많은 반복계산이 필요치 않다. 수치예제를 통해 기존의 방법으로 계산한 결과와 비교하여 새롭게 개발한 implicit 방법의 향상된 정확도를 보였다.

keywards: 이동최소제곱 차분법, 자유경계문제, implicit, 반복계산, 정확도

1. 서론

이동최소제곱 차분법은 격자망(grid) 없이 절점만을 이용하여 지배미분방정식을 직접 이산화(discretization)하여 해석하는 새로운 수치해석방법이다. (윤영철 등, 2007) 이동최소제곱법을 이용하여 Taylor 전개식을 근사하여 직접적인 미분계산 없이 Taylor 전개식의 계수로부터 미분에 대한 근사값을 얻는다. 이렇게 얻어진 근사미분은 Taylor 전개와 동일한 컨시스턴시(consistency)를 갖는다. 자유경계문제는 계면경계의 위치가 시간에 따라 임의로 변하기 때문에 격자구성의 제약이 있는 해석법의 경우 다루기 까다롭지만, 이동최소제곱 차분법은 절점만을 이용하므로 해석이 용이하다.

윤영철과 김도완(2009)은 이동최소제곱 차분법에 계면경계의 특이성을 포함하는 수정된 근사식을 이용하여 1차원 Stefan 문제를 해석했다. 자유경계문제는 기본적으로 비선형 시스템을 만들지만, 그들은 매 해석단계에서 계면경계의 위치를 explicit하게 정의함으로써 전체 계방정식이 비선형 시스템이 되는 것을 피했다. Explicit 알고리즘은 반복계산이 필요 없기 때문에 계산효율성이 좋지만, 계면경계의 위치를 결정하기 위한 속도항을 한 단계 뒤로 지연(lagging)시킴으로써 계산의 정확도는 떨어질 수밖에 없다. 본 논문에서는 계면경계의 위치 결정시 속도항을 지연시키지 않는 implicit 알고리즘을 개발하여 계산의 정확도를 향상시켰다. 이 방법은 계산의 정확도가 높고 매우 안정적이다. 비록 반복계산이 필요하지만 빠른 수렴으로 인해 계산량의 증가는 크지 않아 매력적이다. 본문을 통해 개발된 내용을 자세히 설명한다.

2. 이동최소제곱 차분법을 이용한 Stefan 문제의 해석

† 정회원 · 명지전문대학 토목과 조교수
Tel: 02-300-1135 ; Fax: 02-303-1132
E-mail: ycyoon@mjc.ac.kr

Stefan 문제는 대표적인 자유경계문제로서 고체와 액체간에 상변화(phase transform)일어나는 경계가 변화하는 문제를 기술한다. 예를 들어, 1차원 공간에서 얼음이 녹는 문제(melting in half plane)는 다음과 같은 미분방정식으로 기술된다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t),\ t = 0 \tag{1}$$

$$u(x=0,\ t) = f(t), \quad (\text{경계조건}) \tag{2}$$

$$u(x = s(t), t) = 0, \quad \text{on } \Gamma \ (\text{계면경계조건}) \tag{3}$$

$$v = -\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x = s(t)} \quad \text{on } \Gamma \ (\text{계면경계조건}) \tag{4}$$

여기서 $s(t)$는 시간 t에서 계면경계의 위치, v는 계면경계 $s(t)$가 움직이는 속도이다. $\alpha = c(u_f - u_{ref})/L$는 Stefan 상수인데, c는 비열, L은 잠열, u_{ref}는 기준이 되는 온도를 나타낸다.

먼저, 이동최소제곱 차분법을 간단히 소개한다. 1차원의 경우, y를 기준으로 한 Taylor 급수로부터 m차 근사식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_L^m(x,y) &:= u(y) + \left(\frac{x-y}{\rho}\right)\frac{\rho}{1!}u^{(1)}(y) + \left(\frac{x-y}{\rho}\right)^2\frac{\rho^2}{2!}u^{(2)}(y) + \cdots + \left(\frac{x-y}{\rho}\right)^m\frac{\rho^m}{m!}u^{(m)}(y) \\ &= \boldsymbol{p}_m^T\left(\frac{x-y}{\rho}\right)\boldsymbol{a}(y) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $\boldsymbol{a}(y)$의 성분은 $u(x)$의 y 위치에서의 미분값들을 포함한다. ρ는 이동최소제곱법 적용시 영향영역을 나타내는 가중함수의 반경이다. 미분계수 $u(y)$, $u^{(1)}(y)$, $\cdots$는 이동최소제곱 잔차식으로부터 구한다.

반면, 계면경계 주변의 특이해를 근사하기 위해 식 (5)에 쐐기함수($b_{y_\Gamma}(x)$)와 수직미분 점프()를 도입하여 다음과 같이 수정된 Taylor 근사식을 구성한다.

$$u_L(x,y) := \boldsymbol{p}_m^T\left(\frac{x-y}{\rho}\right)\boldsymbol{a}(y) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_\Gamma b_{y_\Gamma}(x) \tag{6}$$

자세한 유도과정은 윤영철과 김도완(2009)을 참조할 수 있다. 식 (7)과 같은 Stefan 문제의 계면경계에 대한 kinematic 관계와 형상함수를 도입하여 미분근사 값을 식 (8)과 같이 정리할 수 있다.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_\Gamma = \frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x} = \frac{v}{\alpha} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} D_x^{(0)}u(\boldsymbol{x}) \\ D_x^{(1)}u(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ D_x^{(m)}u(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(0)}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \Phi_N^{(0)}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{(m)}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \Phi_N^{(m)}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - \frac{v}{2\alpha}b_\Gamma(x_1) \\ \vdots \\ u_N - \frac{v}{2\alpha}b_\Gamma(x_N) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{v}{2\alpha}b_\Gamma(x) \\ \frac{v}{2\alpha}sign(x - x_\Gamma) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

여기서 D_x는 미분근사를 위한 미분연산자이고, [ ]안의 위첨자는 미분차수이다.

식 (1)에 주어진 Stefan 문제의 지배방정식은 안정성 문제가 없는 Backward Euler법으로 차분한다. 계면경계 근방의 특이영역에서는 식 (9)와 같이 차분식을 구성한다.

$$\sum_I \left\{ \phi_I - \Delta t\, \phi_I^{(2)}(x) \right\} u_I^{n+1} + \frac{v^{n+1}}{2\alpha} \left\{ \left(b_\Gamma^{n+1}(x) - \sum_I \phi_I(x) b_\Gamma^{n+1}(x_I) \right) - \Delta t \sum_I \phi_I^{(2)}(x) b_\Gamma^{n+1}(x_I) \right\} \tag{9}$$
$$= \sum_I \phi_I u_I^n + \frac{v^n}{2\alpha} \left\{ b_\Gamma^n(x) - \sum_I \phi_I(x) b_\Gamma^n(x_I) \right\}$$

계면경계로부터 떨어진 정규영역에서는 속도(v^{n+1}, v^n)와 연관된 특이항을 제외하고 차분식을 구성한다.

3. Implicit 알고리즘을 이용한 비선형 시스템의 구성

윤영철과 김도완(2009)은 비선형 시스템을 피하기 위해 다음과 같이 계면경계의 위치를 결정했다.

$$s^{n+1}(t) = s^n(t) + \Delta t \cdot v^n \tag{10}$$

기본적으로 Stefan 문제에서는 계면경계의 위치도 미지값이어서 비선형 시스템을 만들지만, 위 식은 n+1 단계에서 계면경계의 위치를 결정할 때, n 단계에서의 정보만 이용하기 때문에 explicit 알고리즘을 구성하고 선형 시스템을 구성한다. 이렇게 속도항을 한 단계 뒤로 지연시키는 방법은 반복계산이 필요 없지만, 매 해석단계에서 계면경계의 위치를 정확히 구해내지 못하고 근사적으로만 묘사하여 해의 정확도를 떨어뜨린다.

본 연구에서는 식 (11)과 같이 속도항을 한 단계 뒤로 지연시키지 않고 현재 단계에서의 속도를 그대로 사용하여 계면경계의 위치를 결정한다.

$$s^{n+1}(t) = s^n(t) + \Delta t \cdot v_{(i)}^{n+1} \tag{11}$$

여기서 $v_{(i)}^{n+1}$는 n+1 단계의 i번째 반복계산(iteration)에서 얻어진 속도값이다. 매 해석단계에서 $v_{(i)}^{n+1}$ 값을 모르기 때문에 계면경계 위치($s^{n+1}(t)$)가 미지값이 된다. 그러나 계면경계의 위치를 알아야 식 (9)와 같은 차분식을 구성할 수 있기 때문에 전체 시스템을 풀 때 절점해(u_I)와 계면경계의 이동속도($v_{(i)}^{n+1}$) 값을 동시에 반복적으로 계산해야 하는 비선형 시스템을 만든다. 다음 단계의 해석으로 넘어가기 위한 수렴여부의 판단은 다음 식을 적용한다.

$$\frac{\| v_{(i+1)}^{n+1} - v_{(i)}^{n+1} \|}{\| v_{(i)}^{n+1} \|} \le \delta \tag{12}$$

윗 식에서 $\delta = \xi h$인데, h는 절점거리를 나타내는 특성길이이고, $\xi = O(10^{-5} \sim 10^{-6})$이다.

4. 수치예제를 통한 Implicit 방법의 정확성 검증

그림 1에는 1차원 Stefan 문제의 시간에 따른 계면경계 위치를 도시했다. 계면경계의 위치를 implicit하게 update한 해석결과가 explicit 경우보다 이론해와 더 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 그림 2에는 반복계산의 횟수를 도시했으며, 본 연구의 해석기법이 빠르게 수렴하는 것을 알 수 있다. 그림 3과 4에는 161개 절점 모델에 대한 시간에 따른 온도와 그라디언트의 변화 모습을 도시했다. 시간이 경과하면서 계면경계가 이동하는 모습과 계면경계에서 온도가 갑자기 변화하면서 생성되는 미분점프가 잘 묘사되고 있다.

4. 결　론

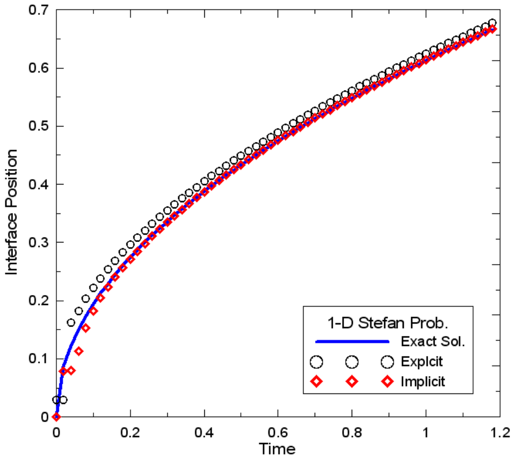

그림 1 시간에 따른 계면경계 위치의 변화

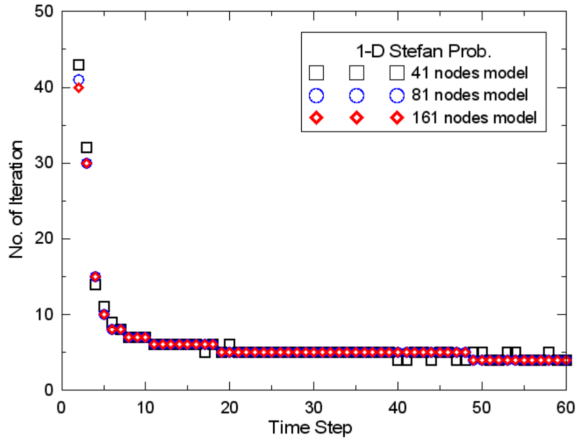

그림 2 절점갯수에 따른 반복계산 횟수

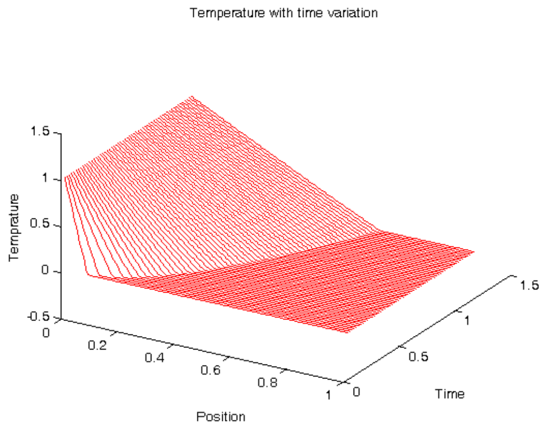

그림 3 시간에 따른 해(온도)의 변화

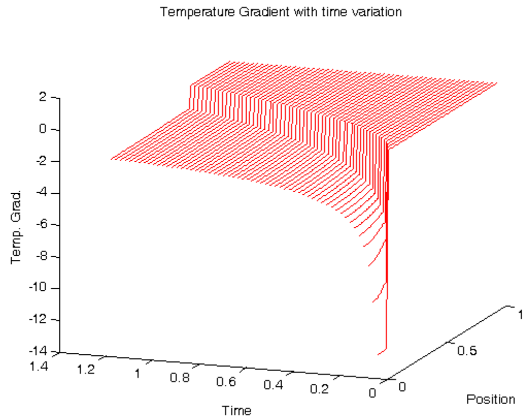

그림 4 시간에 따른 온도 그라디언트의 변화

자유경계문제의 해석을 위해 기존에 제안된 확장된 이동최소제곱 차분법이 반복계산 없이 해석할 수 있는 장점이 있었으나 해의 정확도가 떨어지는 단점이 있었다. 계면경계의 위치를 정의할 때 전 단계의 속도값으로 근사하면서 발생한 오차이다. 본 연구에서는 implicit한 방법으로 계면경계를 update 하는 알고리즘을 개발하여 매 해석단계마다 반복계산을 통해 정확한 계면경계의 위치를 찾아내어 해의 정확도를 높였다. 계면경계의 위치를 찾는 알고리즘의 수렴속도가 빠르기 때문에 계산량의 증가는 크지 않다. 기존의 explicit 방법으로 얻어진 수치해석 결과와 비교하여 본 연구에서 제시한 해석법의 우수성을 보였다.

참 고 문 헌

윤영철, 김동조, 이상호 (2007) 탄성균열해석을 위한 그리드 없는 유한차분법, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.321~327.

윤영철, 김도완 (2009) 확장된 이동최소제곱 유한차분법을 이용한 이동경계문제의 해석, 한국전산구조공학회 논문집 22(4), pp.315~322.