

효율적인 등가정하중 변환을 위한 축소기법과의 연동에 관한 연구

A Study of the Effective Transformation of Dynamic Loads into Equivalent Static Loads using System Reduction Methods

김 의 영* · 조 맹 효**

Kim, Eui-Young · Cho, Maeng-Hyo

요 약

동하중의 영향을 받는 구조물의 효율적인 구조 해석 및 최적화 수행을 위해 동하중을 등가정하중으로 변환하는 방법이 요구된다. 이 때 적절한 자유도를 선정하여 등가정하중을 부여하는 것이 중요하다. 기존 방법에서는 시스템 축소기법을 통해 일정 개수 이상의 주자유도를 선택하여 등가정하중을 부여하고 그 결과 변위가 동하중 하에서의 변위와 같도록 하였다. 그러나 보수적인 결과를 얻기 위한 제한 조건의 지배적인 성격으로 인하여 등가정하중 하에서의 변위가 지나치게 크게 나타나 그 효율성이 떨어지게 되었다. 본 연구에서는 등가정하중의 변환에 있어서 효율성을 높이는 방안을 제안한다. 제안기법은 보수적 결과를 얻는 범위 내에서 과도응답해석 결과와의 오차를 크게 줄일 수 있다. 수치예제를 통해 제안기법의 결과를 기존 기법의 결과와 비교해본다.

keyword : 등가정하중, 축소시스템, Two-level condensation scheme, Transient time response analysis

1. 서 론

동하중이 작용하는 구조물의 해석에 있어서, 보통의 정하중 조건의 해석은 구조물의 거동 특성을 잘 반영하지 못한다. 따라서 시간에 따라 구조물의 실제거동을 표현하는 과도응답을 통해 동하중을 고려하는 연구가 많이 진행되어 왔다. 그러나 대형 구조물의 해석 및 최적화 문제의 수행에 있어서 과도응답해석은 상당한 전산 자원과 시간이 필요하며 이에 따라 효율적인 해석 알고리즘이 요구된다.

최대 변위가 발생하는 임계시점에서의 구조물의 변위와 동등한 변위를 산출하게 하는 하중을 등가정하중이라 하며, 이를 최적화 문제에 적용하여 동하중을 고려하는 해석 방법이 제안된 바 있다.(Choi *et al.* 1999) 이 방법은 근사화를 통해 등가정하중에 의한 변위가 임계시간에서 산출되는 변위보다 크게 산출되도록 하여 안전설계를 고려한 최적화의 관점에서 바람직하다.(Kang *et al.* 2001) 이 때, 적절한 자유도의 선정이 중요하므로 주자유도 선정기법을 등가정하중 산출에 적용하는 연구가 진행되었다. (김현기 외. 2003) 주자유도는 구조물의 거동을 지배하는 자유도로, 연구에 사용된 2단계 축소기법(Two-level Condensation Scheme, TLCS) (Kim *et al.* 2003, 백승민 외. 2007)의 경우 1차 축소에서는 동시 선정기법을 사용하여 효율성을 높이고, 2차 축소에서는 순차적 소거법을 사용하여 정확도를 높인다. 그러나 제안된 모든 방법에서, 선정된 자유도에서의 등가정하중 해석 결과가 지나치게 보수적인 단점이 있다. 본 연구는 효율적이며 정확한 결과를 산출하는 등

* 학생회원 · 서울대학교 기계항공공학부 석사과정 takeme04@snu.ac.kr

** 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 교수 mhchoi@snu.ac.kr

가정하중 알고리즘을 제안하고, 이를 수치예제를 통해 검증한다.

2. 등가정하중 산출 기법

동적시스템의 운동방정식은 다음과 같으며 이는 등가정하중 s 에 의해 식 (2)의 정적문제에 나타내어진다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \quad (1)$$

$$Kx = F - M\ddot{x} - C\dot{x} = s \quad (2)$$

이 때, 등가정하중에 의한 결과 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$d_p(t_c) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \left(\sum_{j=1}^N u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p=1, \dots, N) \quad (3)$$

t_c 는 과도응답 또는 모달해석의 동적해석을 통해 산출된 임계시간이며, $d(t_c)$ 는 그 시간에서의 변위가 된다. 또한 N 은 시스템의 총 자유도수, ω_k 는 k 번째 고유주파수, u_{ij} 는 j 번째 모드의 i 번째 성분, s_j 는 j 번째 하중 성분을 의미한다. 일반적으로 구조물의 거동이 몇 개의 저차모드에 의해 지배되는 특성에 따라, 식 (3)은 시스템의 총 자유도수보다 훨씬 작은 수인 n 개의 방정식으로 효율적으로 근사화된다.

$$d_p(t_c) \approx x_p = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \left(\sum_{j=1}^{l'} u_{pk} u_{jk} s_j \right) \quad (p=1, \dots, h) \quad (4)$$

여기서 p 는 동적해석 변위 결과와 비교할 자유도 개수이고, l' 는 등가정하중이 부과되는 자유도 개수를 의미한다. 식 (4)로부터 안전설계를 위해 근사식의 결과가 더 큰 변위를 나타내도록 정식화하면 다음과 같다.

$$\text{Find } s_j \quad (j=1, \dots, l') \quad \text{Min } s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_{l'}^2 \quad \text{S.t. } |d_p| \leq |x_p| \quad (5)$$

3. 축소시스템에 의한 등가정하중 산출 기법

3.1. 축소시스템에 의한 과도응답과 임계자유도의 선정

식 (6)과 같은 변환행렬 T 를 사용하여 부자유도 x_s 를 주자유도 x_p 로 표현하면 식 (1)의 시스템은 식 (7)의 축소시스템으로 변환된다.

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ t \end{bmatrix} x_p = T x_p \quad (6)$$

$$M_R \ddot{x} + C_R \dot{x} + K_R x = F_R \quad (7)$$

$$M_R = T^T M T, \quad C_R = T^T C T, \quad K_R = T^T K T, \quad F_R = T^T F$$

축소시스템을 이용하여 과도응답을 구하면 결과적 정확성을 유지하면서도 효율성을 크게 높일 수 있으므로, 등가정하중을 반복적으로 산출해야하는 최적화 문제에 이를 적용하는 것이 유용하다. 또한, 기존의 등가정하중 산출 과정에서는 변위를 비교할 자유도를 임의로 선정하거나 축소기법으로 선정된 주자유도만을 활용함으로써, 최대 변위를 발생시킬 위험이 높은 임계자유도가 비교대상에 모두 포함되지 않는 문제가 있다. 본 연구에서는 과도응답을 통해 임계자유도를 산출한 뒤, 이를 축소기법에 의해 선정된 주자유도에 추가하여 등가정하중을 부여할 자유도로 확장하고 식 (7)에 의해 축소시스템을 구축한다.

3.2. 축소시스템에 의한 등가정하중 산출 알고리즘

등가정하중에 의한 변위는 지나치게 보수적인 경향을 나타낸다. 본 연구에서는 식 (5)의 최적화 문제의 목

적함수를 하중에서 변위의 함수로 변경하고 식 (4) 대신 축소시스템을 이용하여 이를 개선하였다. 등가정하중 부여 자유도와 변위 비교 자유도를 일치시키면 등가정하중은 축소된 강성행렬의 역행렬에 의해 도출된다. 즉, 식 (9)를 식 (8)에 대입하여 p 개의 자유도에서의 등가정하중 s 를 구한다.

$$\text{Find } s_j \ (j=1, \dots, p) \quad \text{Min } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 \quad \text{S.t. } |d_p| \leq |x_p| \quad (8)$$

$$x = K_R^{-1}s \quad (9)$$

산출된 등가정하중은 다시 식 (9)에 의해 동적해석 결과와 상당히 일치하는 변위를 선정된 자유도에서 도출한다. 결과는 보수적이며, 선정된 자유도가 임계자유도를 포함하고 있기에 안전설계 측면에서 유리하다.

4. 수치예제

그림 1과 같은 평판모델을 이용하여 본 연구에서 제안된 기법의 효율성을 검증한다. 보다 효과적인 검증을 위해 기존의 기법(Choi *et al.* 1999)과 비교분석하였다. case I 은 변위 비교 및 등가정하중 부여 자유도 25개를 모두 TLCS기법으로 선정하여 기존의 기법(식 (4)와 식 (5))으로 등가정하중을 산출하였다. case II는 TLCS기법으로 선정된 20개의 주자유도에 5개의 임계자유도를 추가하여(그림 2) 축소시스템을 구축하고, 식 (8)과 식 (9)에 의해 등가정하중을 산출하였다. 보통 전체시스템의 역행렬 계산은 상당한 자원이 요구되나 축소된 시스템을 이용하는 식 (9)의 경우 계산의 부담이 절감된다.

유한요소 모델링에 4절점 평면요소(Aminpour, 1989)가 사용되었다. 경계조건으로 네 변을 고정단으로 하고 평판의 중앙에 그림 3의 동하중을 부과하였다. 그림 4의 과도응답은 Newmark 방법을 적용한 결과이며(Bathe, 1996), 0.005sec의 시간간격(Δt)으로 총 1000 step의 응답을 구하였다. 최대 변위가 발생하는 임계시점에서의 등가정하중을 각각의 방법을 통해 산출하였고, 결과 변위를 비교하였다. 선택한 자유도에서의 결과 변위를 표 1에 나타내었다. 각각 선택한 자유도에서의 오차 평균이 36.6%과 0.0253%로, case I 에 비해 case II의 과도응답 변위가 정확하다. 또한 모든 변위 자유도에서의 변위 차에 대한 RMS(Root Mean Square)비교 결과(표 2), case II가 case I 에 비해 상당히 작은 값을 가짐을 알 수 있다. 즉, 제안된 기법이 기존의 기법에 비하여 주자유도를 포함한 모든 자유도에서 정확한 변위를 산출해낸다.

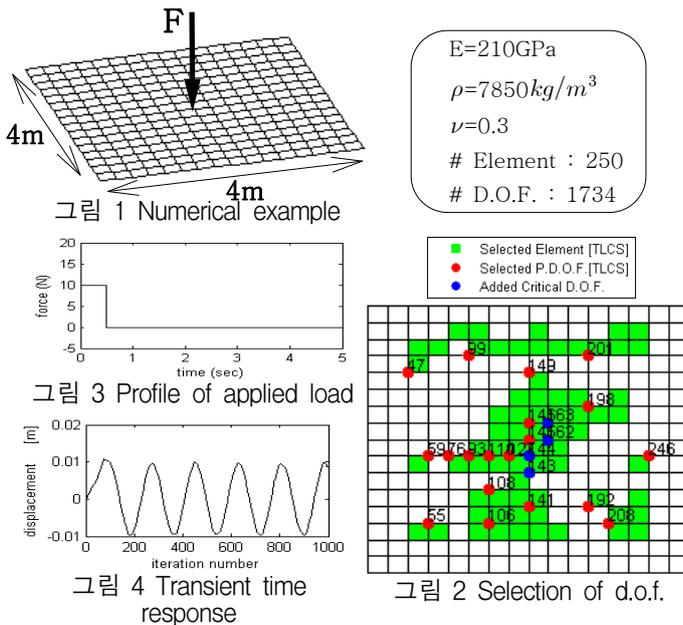


표 1 Displacement comparison

node	d.o.f.	과도응답 변위 [mm]	CASE I 변위 [mm]	CASE II 변위 [mm]
59	3	2.8360	2.8886	2.8360
99	3	2.0473	2.2049	2.0473
106	3	2.5476	3.5547	2.5476
145	3	10.5428	10.8245	10.5428
146	3	10.0522	10.1851	10.0522
149	3	4.8040	5.3303	4.8040
156	3	1.4060	1.9080	1.4060
192	3	3.2824	3.7370	3.2824
198	3	5.7167	5.8633	5.7167
201	3	2.0784	2.4156	2.0784
208	3	1.4969	1.8001	1.4969
246	3	1.3590	1.4216	1.3590

표 2 RMS error in all displacements d.o.f.

	CASE I	CASE II
RMS (mm)	0.2324	0.0252

그림 5는 각각 case I 과 caseII에서 등가정하중에 의해 변형된 구조물의 형상을 동적해석 결과와 함께 나타낸 것이다. 제안된 기법을 사용한 caseII의 경우가 동적해석 결과와 더 가까운 형상을 나타내고 있다.

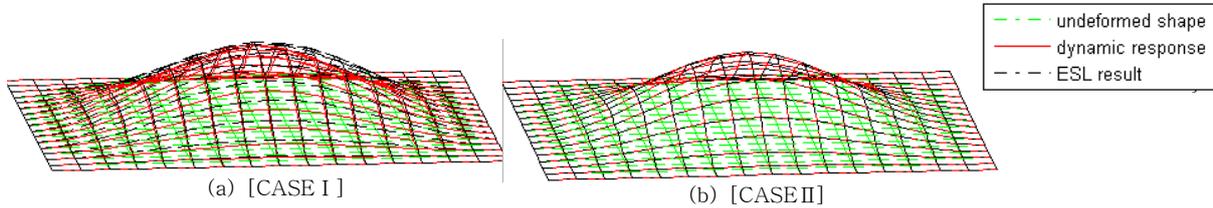


그림 5 Deformation under ESL(Equivalent Static Loads)

5. 결 론

본 연구에서는 축소시스템을 과도응답해석 및 등가정하중 산출 기법에 적용하였다. 제안된 기법의 효율성은 평판모델을 통해 검증하였다. 기존의 방법에 비하여 효율성을 높일 수 있었고, 보수적이면서도 동적해석과 거의 동일한 변위 결과를 산출해낼 수 있었다. 향후 대형구조물의 최적화문제에 제안된 기법을 적용할 경우 효율성이 더욱 증대될 것이 예상되며 현재 부구조화 기법과 연동한 축소시스템의 적용이 연구 중에 있다.

감사의 글

본 연구는 교육과학기술부가 주관하는 WCU 의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다. (R31-2009-000-10083-0)

참고문헌

- 김현기, 조맹효 (2003) 주자유도 선정 기법에 의한 동하중의 등가 정하중으로의 변환, 대한기계학회 춘추학술대회, 2003, pp.1316~1321.
- 백승민, 김기욱, 조맹효 (2007) 동적 해석의 효율적 축소기법에 관한 연구, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.347~352.
- Aminpour, M.A., (1992) An assumed-stress hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom, *Int.J.Numer.Methods.Eng.*, Vol.33, pp.19~38.
- Bathe, K.J., (1996), *Finite element procedures*, Prentice Hall, New York.
- Choi, W., Park, G. (1999) Transformation of dynamic loads into equivalent static loads based on modal analysis, *Int.J.Numer.Mech.Eng.*, Vol.46, pp.29~43
- Kang, B., Choi, W., Park, G. (2001) Structural optimization under equivalent static loads transformed from dynamic loads based on displacement , *Computers and Structures*, 79(2), pp.145~154.
- Kim, H., Cho, M. (2003) Two-level scheme for selection of degrees of freedom by energy estimation combined with sequential elimination, *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, submitted.