불포화지반에 대한 열-수리-역학 거동의 수식화
Formulation of fully coupled THM behavior in unsaturated soil

신호성[1)], Hosung Shin

[1)] 울산대학교 건설환경공학부 조교수, Assistant Professor, Dept. of CEE, University of Ulsan

SYNOPSIS : A great deal of attention is focused on coupled Thermo-Hydro-Mechanical (THM) behavior of multiphase porous media in diverse geo-mechanical and geo-environmental areas. This paper presents general governing equations for coupled THM processes in unsaturated porous media. Coupled partial differential equations are derived from 3 mass balances equations (solid, water, and air), energy balance equation, and force equilibrium equation. Finite element code is developed from the Galerkin formulation and time integration of these governing equations for 4 main variables (displacement $\underline{u}$, gas pressure P_g, liquid pressure P_l, and temperature T). The code is validated with theoretical solutions for linear material with simple boundary conditions.

Key words : THM coupling, multiphase flow, FEM, unsaturated soils

1. 서 론

불포화 다공질 재료(porous material)에 대한 열-수리-역학(Thermo-Hydarulic-Mechanical) 거동에 대한 관심의 증가와 더불어, 다공질재료에서의 물질의 이동과정에 대한 수학적 모델들이 제시되어지고 있다 (Zienkiewidz 1990, Coussy 1991, Olivella et al. 1996, Lewis 1998). 불포화 다공질 재료에서 다상의 흐름(multiphase flow)과 열의 흐름(heat flow)에 대한 연구는 지반역학 및 환경공학에서 중요성이 강조되고 있다. 예로, 일반적인 불포화지반 거동(강우에 의한 사면안정, 구조물 침하) 뿐만 아니라, 열과 관련된 분야 (지열, 핵폐기물 저장소, 가열-냉각을 반복하는 도로노반, 동토 등), 지반환경 분야(매립지 차수재의 누수 등) 등 다양한 분야에서 지반구조물의 거동이 응력, 물, 열에 상호의존적이고 장기 거동특성에 대한 예측의 필요성이 부각되고 있다.

암반 거동을 위한 coupled THM 프로그램은 TOUGH-FLAC, GeoSys/Rockflow, THAMES 등이 있으며 (Rutqvist et al. 2009), 흙에 대한 coupled THM simulator로는 CODE-BRIGHT, COMES-GEO가 있다. 각각의 유한요소 코드는 지배방정식에 다양한 종류의 물질의 흐름에 대해 일부분만을 선별적으로 채택하고, 여러 가정들을 도입하여 지배수식을 간략화 하였다. 특히, 암반과 흙에 대한 프로그램들은 역학구성관계 및 유체흐름에 대해 전혀 상이한 구성모델로 수치해석을 수행한다. Rutqvist et al. (2009)는 암반에 대한 THM 프로그램들의 지배방정식과 구성관계에 대하여 상호 비교분석을 하였다. 흙에 대한 역학구성관계는 전응력해석이나, 불완전한 유효응력에 의한 모델들을 사용하고 있다 (Alonso et al. 1990).

본 연구에서는 흙, 물, 공기에 대한 질량보존의 법칙, 에너지 보존법칙, 그리고 하중평형 조건식으로부터 불포화지반에 대한 열-수리-역학 거동에 대한 coupled 편미분 지배방정식을 유도하였다. Galerkin 간

략화와 시간적분으로부터 주 변수인 변위($\underline{u}$), 가스압(P_g), 유체압(P_l), 온도(T)를 Newton의 반복과정을 이용하여 비선형 해를 구할수 있도록 하였다.

2. 지배방정식

2.1 일반적인 가정과 질량보존의 법칙

다공질 불포화 재료에 대한 지배 방정식의 수식화를 위해 다음과 같은 사항을 가정하였다.

첫째로, 다공질 재료는 기체(gas), 액체(liquid), 그리고 고체(solid)의 3상으로 이루어져 있으며, 흙입자(solid) 이 외의 공극은 물(water)과 공기(gas)로 채워져 있다. 흙입자는 고체(solid)상태로만 존재하며, 물(water)은 액체(liquid water)와 기체(water vapor)로 존재하고, 공기(air)는 기체(dry air)와 액체(dissolved air) 상태로 존재할 수 있다. 그리고 기체(gas phase)는 건조공기와 수증기로 구성된 이상화된 혼합기체(ideal gas)로 가정한다.

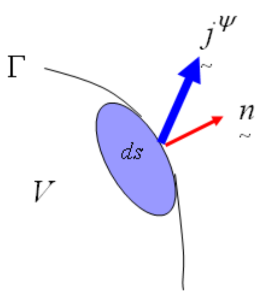
둘째로, 기체, 액체, 고체로 구성된 다공질 재료의 역학적 거동은 흙 골격(solid skeleton)에 의해 전달되는 유효응력(effective stress), 국부적인 압력(local gas and liquid pressure), 그리고 온도(Temperature)에 의해 결정된다.

셋째로, 3상으로 이루어진 재료는 국부적으로 온도평형조건에 있으므로, 같은 지점에서의 3상의 온도는 동일하다고 가정한다.

마지막으로 일반적인 지배방정식을 유도하기 위해 거시적 접근법(macroscopic approach)을 사용하였다. 따라서 다공질 재료는 국부적인 양을 체적평균의 양으로 대체하는 등가 연속체로 가정하였다.

위와 같은 가정과 접근방식을 통하여, 5가지의 평형조건식과 일련의 구성관계식을 통하여 다공질재료의 THM 거동특성을 수식화할 수 있다.

다양한 종류의 물질이동에 대한 거시적인 평형방정식은 다음과 같이 일반화된 편미분 방정식으로 정리할 수 있다(Bear 1991).



$$\frac{\partial \rho^{\psi}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{j}^{\psi} = 0 \tag{1}$$

여기서, ψ는 다공질 재료에서 한가지 종류(예로, 흙입자, 물, 공기)을 나타내며, ρ^{ψ}는 그 종류의 단위체적당 질량을 나타낸다. 그리고 j^{ψ}는 해당 종류의 질량 흐름(mass flux)으로 advective형태와 non-advective형태 2가지를 모두 포함한다.

2.2 흙입자의 질량보존의 법칙

고체상태로만 존재하는 흙입자에 대한 질량보존의 법칙(mass balance equation)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_s(1-\phi)] + \underline{\nabla} \cdot [\rho_s(1-\phi)\underline{\dot{u}}] = 0 \qquad (2)$$

여기서, ρ_s는 흙입자의 단위 질량이며, ϕ는 흙의 간극률(porosity), 그리고 $\underline{\dot{u}}$는 흙입자의 변위 속도이다.

2.3 물의 질량보존의 법칙

물(water)는 액체상태(liquid water)와 기체상태(water vapor)로 존재할 수 있으므로, 두 가지 상태를 일반화된 질량보존의 법칙에 대입하여 지배방정식을 유도하였다.

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_l^w \phi S_l + \rho_g^w \phi(1-S_l)] + \underline{\nabla} \cdot [\rho_l^w \phi S_l \underline{\dot{u}} + \rho_l^w \underline{q_l} + \underline{i_l^w} + \rho_g^w \phi(1-S_l)\underline{\dot{u}} + \rho_g^w \underline{q_g} + \underline{i_g^w}] = 0 \qquad (3)$$

여기서 ρ_l^w는 액체 단위 체적당 물의 질량을 나타내며, S_l 는 공극에서 액체의 포화도를 나타내며, $\underline{q_l}$과 $\underline{q_g}$는 액체 상태와 기체 상태의 단위면적당 유량(flow rate)이며, 그리고 $\underline{i_l^w}$, $\underline{i_g^w}$는 물의 액체와 기체 상태에서의 molecular diffusion과 mechanical dispersion을 고려할 수 있는 non-advective flow rate 항목이다. 액체의 단위면적당 유량 $\underline{q_l}$은 액체압력(P_l)를 이용하여 다음과 같이 $-\frac{k_l}{\gamma_l}[\underline{\nabla} P_l - \gamma_l \underline{g}]$ 표현할 수 있다.

만약 흙의 공극이 물로 완전히 포화되었다고 가정하고 non-advective flux를 무시하면, 식(2)와 식(1)을 결합하여 다음과 같은 일반화된 압밀방정식으로 간략화 됨을 알 수 있다.

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{\nabla} \cdot \underline{q_l} = 0 \qquad (4)$$

2.4 공기의 질량보존의 법칙

공기(air)는 일반적으로 기체상태(dry water)와 액체상태(dissolved air)로 존재할 수 있으므로, 일반화된 질량보존의 법칙을 이용하여 공기에 대한 편미분 지배방정식을 유도하였다.

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_l^a \phi S_l + \rho_g^a \phi(1-S_l)] + \underline{\nabla} \cdot [\rho_l^a \phi S_l \underline{\dot{u}} + \rho_l^a \underline{q_l} + \underline{i_l^a} + \rho_g^a \phi(1-S_l)\underline{\dot{u}} + \rho_g^a \underline{q_g} + \underline{i_g^a}] = 0 \qquad (5)$$

여기서 ρ_l^a는 액체 단위 체적당 공기(air)의 질량을 나타내며, 기체의 단위면적당 유량 $\underline{q_g}$는 기체압력(P_g)를 이용하여 $-\frac{k_g}{\gamma_g}[\underline{\nabla} P_g - \gamma_g \underline{g}]$으로 표현할 수 있다.

2.5 에너지 보존의 법칙

에너지 보존의 법칙은 엔탈피 평형(enthalpy balance)을 이용하여 표한할수도 있으나, 내부 에너지(internal energy)를 이용하여 표현하는 것이 용이하다 (Olivella et al. 1996, Lewis 1998). 고체, 액체, 그리고 기체의 다공질 재료에 대한 에너지 보존 방정식을 일반화된 평형 방정식을 이용하여 유도하였다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-\phi)\rho_s E_s + \phi S_l \rho_l E_l + \phi(1-S_l)\rho_g E_g\right] + \underline{\nabla} \cdot \underline{i_c} \qquad (6)$$
$$+ \underline{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} (1-\phi)\rho_s E_s \underline{\dot{u}} + \phi S_l \rho_l E_l \underline{\dot{u}} + \left(\rho_l^w \underline{q_l} + \underline{i_l^w}\right) E_l^w + \left(\rho_l^a \underline{q_l} + \underline{i_l^a}\right) E_l^a \\ + \phi(1-S_l)\rho_g E_g \underline{\dot{u}} + \left(\rho_g^w \underline{q_g} + \underline{i_g^w}\right) E_g^w + \left(\rho_g^a \underline{q_g} + \underline{i_g^a}\right) E_g^a \end{bmatrix} = 0$$

여기서, E_s는 흙입자 (고체)의 단위질량당 내부에너지이며, 다공질 재료에서 열전도 (heat conduction)에 의한 에너지 전달은 Fourier의 법칙 ($\underline{i_c} = -\lambda \underline{\nabla} T$)을 이용하여 산정하였다.

만약 고체로만 이루어진 재료에 대하여 변위($\underline{\dot{u}}$)에 의한 영향을 무시할 경우, 다음과 같은 열전도에 의한 에너지 평형방정식으로 간략화 됨을 알 수 있다.

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \underline{\nabla}^2 T \qquad (7)$$

여기서, $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho_s C_s^s}$ 이고, C_s^s는 고체의 열용량(heat capacity)를 나타낸다.

2.6 모멘트 보존의 법칙

거시적인 힘평형 방정식으로부터 다음과 같은 전응력에 대한 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \rho_m \underline{g} = 0 \quad (8)$$

여기서, 전응력 $\underline{\sigma} = \underline{\sigma'} - P_g \underline{1} + \chi(S_l)(P_g - P_l)\underline{1}$ 이다. 그리고 유효응력($\underline{\sigma'}$)은 인장응력이 양의 값이고, 유체압(P_l)와 공기압(P_g)은 압축응력이 양의 값이다.

2.7 지배방정식의 수식화

흙입자에 대한 질량보존의 방정식(식 2)에서 간극률에 관하여 정리한 후, 이를 식(3), (5), (6)에 대입하여 4개의 변수($\underline{u}$, P_g, P_l, T)를 갖는 4개의 편미분 지배방정식을 얻을 수 있다.

식(3), (5), (6), 그리고 (8)을 임의의 시간 $t^{(n)}$과 $t^{(n+1)}$사이에서 시간 적분하고자 할 때 다음과 같이 일반화된 사다리꼴 법칙을 적용하여 시간적분을 수행하여 근사화시켰다.

$$\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} P_l\, dt = \left(t^{(n+1)} - t^{(n)}\right)\left[\theta P_l^{(n+1)} + (1-\theta) P_l^{(n)}\right] \qquad (9)$$

위 식에서 θ는 안정성(stability)와 정확성(accuracy)을 지배하는 적분계수 값이고, $\theta \geq 1/2$일 때 무조건 안정한(unconditionally stable) 해를 구할 수가 있다.

마지막으로 시간적분된 지배방정식의 수식화에 보간(interpolation)함수를 도입하여 적용하고 주 변수 $\boldsymbol{D}\left(\underline{u}, P_g, P_l, T\right)$로 표현하면 다음과 같은 행렬 형태의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{K}^{(n,i)} d\boldsymbol{D}^{(n,i+1)} = \boldsymbol{F}_{EXT}^{(n+1)} - \boldsymbol{F}_{INT}^{(n,i)} \qquad (10)$$

여기서 $\boldsymbol{K}^{(n,i)}$는 $t^{(n,i)}$에서의 비대칭 접선 강성행렬이고, 우측항은 잔여(residual) 하중벡터이다.

2.8 일반적인 구성방정식 (Constitutive laws) 및 제약 조건(constraints)

불포화 다공성 재료에 대한 THM 수식화에 필요한 수리학적, 열적, 및 역학적 구성관계식들을 정리하면 다음과 같다.

역학적 구성방정식(mechanical constitutive law)은 변형률($d\underline{\epsilon}$), 공기압과 유체압의 차이($s=P_g-P_l$), 그리고 온도 변화(dT)로 부터 유효응력 증분($d\underline{\sigma}'$)을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d\underline{\sigma}'=\underline{\underline{D}}^{ep}:d\underline{\epsilon}-\underline{W}ds-\underline{R}dT \qquad (11)$$

수리학적 관계식은 suction($s=P_g-P_l$)과 포화도(S_l) 관계를 결정하는 SWCC 곡선, 간극비(e)와 포화도(S_l)로부터 유체와 기체의 투수계수(k_l, k_g)를 산정하는 관계식, 물과 공기의 액체와 기체 상태에서의 molecular diffusion과 mechanical dispersion을 산정하는 관계식이 필요하다. 열적으로는 Fourier 법칙에 적용되는 열전도계수(λ), 그리고 온도(T)에 따른 내부에너지 변화에 관련된 관계식들이 필요하다.

3. 결 론

지반공학의 다양한 분야에서 지반의 거동이 응력, 수리, 열에 의해 동시에 지배되는 문제들이 대두되면서 이러한 문제들을 해석하기 위한 수치도구 개발의 필요성이 대두되고 있다. 본 연구에서는 평균이론(averaging theory)에 근거하여 불포화지반에 대한 열-수리-역학 거동을 수식화를 하였다. 흙, 물, 공기에 대한 질량보존의 법칙, 에너지 보존법칙, 그리고 하중평형 조건식으로부터 coupled 편미분 지배방정식을 유도하였다. Galerkin 간략화와 시간적분으로부터 주 변수인 변위($\underline{u}$), 가스압(P_g), 유체압(P_l), 온도(T)를 Newton의 반복과정을 이용하여 비선형 해를 구할수 있는 유한요소 프로그램(FEM)을 작성하였다. 그리고 간단한 경계조건을 갖는 선형재료에 대한 이론식과 수치해석 결과를 비교 분석하였다.

참고문헌

1. Alonso, E., Gens, A. & Josa, A. (1990). A constitutive model for partially saturated soils. Geotechnique, 40, 3, pp. 405-430.
2. Bear J, Bachmat Y. (1991). Introduction to modeling of transport phenomena in porous media. Netherlands: Kluwer Academic Publisher, p. 553.
3. Coussy, O. (1995). Mechanics of porous continua. Chichester, England, Wiley.
4. Lewis R. W. and B. A. Schrefler. (1998). The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media. New York, John Wiley.
5. Olivella, S., Gens, A., Carrera, J. & Alonso, E.E. (1996). Numerical formulation for a simulator (CODE-BRIGHT) for the coupled analysis of saline media. Engineering Computations, 13, 7, pp. 87-112.
6. Rutqvist J, Barr D, Birkholzer JT, Fujisaki K, Kolditz O, Liu Q, Fujita T, Wang W, Zhang C (2009). A comparative simulation study of coupled THM processes and their effect on fractured rock permeability around nuclear waste repositories. Environmetnal Geology, 57, pp. 1347 – 1360
7. Zienkiewicz O. C., Y. M. Xie, B. A. Schrefler, A. Ledesma, N. Bicanic. (1990). Static and Dynamic Behaviour of Soils: A Rational Approach to Quantitative Solutions, II, Semi-saturated Problems. Proc. R. S. London. A 429, pp. 311-321.