한국소음진동공학회 창립 20주년 기념 2010년 춘계학술대회논문집, pp.78~79

회전음원의 도플러효과에 관한 근사이론

Approximation Theory of Doppler Effect due to a Rotating Sound Source

전원주†
Wonju Jeon

1. 서 론

회전하는 물체에 의해 발생하는 공기역학적인 소음에 관한 이론적 연구는 1960 년대 후반과 1970 년대 초반, Lowson and Ollerhead[1], Lowson[2], Wright[3], Morfey and Tanna[4] 등에 의해 집중적으로 연구되었으며, 그들의 다양한 이론적 접근방법과 Bessel 함수로 표현된 결과식들은 정상 및 비정상 하중에 의한 소음의 방사특성을 이해하는데 매우 중요한 이론적 토대를 제공하였다.

본 연구는 회전음원의 운동특성을 내포하는 도플러효과항의 Fourier 변환을 통해, 주파수 스펙트럼에 나타나는 조화항(harmonic component)의 복소크기(complex amplitude)를 엄밀한 수식으로 유도한다. 수학적 편의를 위하여 Fourier 변환의 시간관점은 방사시각을 기준으로 적분하였으며, Lowson[5]의 하중소음식에 효과적으로 활용될 수 있는 새로운 근사식을 유도하였다. 또한, 회전하는 물체표면의 하중에 의해 방사되는 소음의 주파수 스펙트럼을 이론적으로 예측하기 위한 방법론을 논의하였다.

2. 회전음원의 도플러효과와 원거리근사

2.1 회전음원과 도플러효과

정지한 관측자와 일정한 각속도로 회전하고 있는 음원의 위치벡터는, 일반성을 잃지 않고, 각각 식(1)과 식(2)와 같이 표현된다. 식(1)에서 R 은 원점으로부터의 거리를, θ는 y-z 평면상의 양의 y-축으로부터 반시계방향으로의 회전각을 나타낸다. 식(2)에서 a 는 회전반경을, ω는 각속도를, τ는 방사시각을 각각 표시한다.

$$x_i = (0, R\cos\theta, R\sin\theta) \tag{1}$$

$$y_i = (a\cos\omega\tau, a\sin\omega\tau, 0) \tag{2}$$

음원으로부터 관측자까지의 거리(r), 거리벡터(r_i)와 Mach 벡터(M_i)는 각각 아래의 식(3)-(5)과 같고,

$$r_i = (-a\cos\omega\tau, R\cos\theta - a\sin\omega\tau, R\sin\theta) \tag{3}$$

$$r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta\sin\omega\tau} \tag{4}$$

$$M_i = (-M\sin\omega\tau, M\cos\omega\tau, 0) \tag{5}$$

회전음원에 의한 도플러효과는 식(6)으로 정의된다.

$$\frac{1}{1-M_r} \tag{6}$$

여기에서, 방향 마하수 M_r은 식(7)과 같이 정의되며, 밑첨자는 Tensor 합을 표시한다.

$$M_r = \frac{M_i r_i}{r} \tag{7}$$

식(3)-(5)를 식(7)에 넣고, 식(8)의 치환을 이용하면,

$$u = \cos\theta\sin\omega\tau \;\text{ and }\; v = a/R \tag{8}$$

M_r은 아래의 식(9)와 같이 다시 쓰여진다.

$$M_r = \frac{M\cos\theta\cos\omega\tau}{\sqrt{1-2uv+v^2}} \tag{9}$$

2.2 Legendre 다항식과 원거리근사

R>a 인 경우, Legendre 다항식으로 표현된 아래의 항등식(10)을 이용함으로서,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2uv+v^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_k(u)v^n \tag{10}$$

식(9)의 M_r을 아래의 식(11)과 같이 쓸 수 있다.

$$M_r = M\cos\theta\cos\omega\tau\sum_{k=0}^{\infty} P_k(u)v^k \tag{11}$$

참고로, Legendre 다항식은 식(12)와 같다.

$$P_k(u) = \frac{1}{2^k k!}\frac{\partial^k}{\partial u^k}(u^2-1)^k \tag{12}$$

마하수가 1 보다 작은 아음속 운동의 경우를 고려하면 식(6)은 기하급수로 전개가 가능하므로, 식(11)을 식(6)에 대입하여 전개하면 회전음원의 도플러효과항에 관한 엄밀한 수학적 표현을 다음의 식(13)과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{1-M_r} = \sum_{m=0}^{\infty}(M\cos\theta\cos\omega\tau)^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\theta\sin\omega\tau)\left(\frac{a}{R}\right)^k\right)^m \tag{13}$$

† 교신저자; 국가수리과학연구소 융복합수리과학부
E-mail : wjeon@nims.re.kr
Tel : (042) 717-5736, Fax : (042) 864-5706

3. 도플러효과항의 Fourier 변환과 응용

3.1 도플러효과항의 Fourier 변환

원거리 근사(a<<R)를 통해 식(13)로부터 유도된 근사식은 아래의 식(14)과 같으며,

$$\frac{1}{1-M_r} \approx \frac{1}{1-M\cos\theta\cos\omega\tau} = \sum_{m=0}^{\infty}(M\cos\theta\cos\omega\tau)^m \tag{14}$$

본 연구에서는, 식(14)의 k-제곱에 관한 Fourier 적분변환을 수행한다. (k=1, 2, 3) 아래의 c_n과 d_n은 각각 Fourier 변환의 실수부와 허수부를 나타낸다.

$$c_n^{(k)} = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{(1-M\cos\theta\cos\omega\tau)^k}\cos n\omega\tau \, d\tau \tag{15}$$

$$d_n^{(k)} = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{(1-M\cos\theta\cos\omega\tau)^k}\sin n\omega\tau \, d\tau \tag{16}$$

음원은 주기적인 회전운동을 하고 있으므로 적분구간은 0 부터 $2\pi/\omega$ 까지의 한 주기를 선정하였다.

k=1 인 경우, 식(15)는 아래의 식(17)과 같이 얻을 수 있고, 식(17)은 본 연구의 새로운 이론적 결과이다. (유도과정은 생략되었음.)

$$c_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{\infty}\left(\delta_{m+n}\frac{2\pi}{\omega}\,{}_mC_{(m-n)/2}\left(\frac{M\cos\theta}{2}\right)^m\right) \tag{17}$$

여기에서 δ_k와 ${}_mC_n$는 아래와 같이 정의된다.

$$\delta_k = \frac{1+(-1)^k}{2}, \quad {}_mC_n = \frac{m!}{n!(m-n)!} \tag{18}$$

참고로, $d_n^{(1)}$은 모든 n 에 대하여 0 이며 증명과정은 생략한다.

다음으로, 도플러효과항의 제곱과 세제곱에 관한 Fourier 변환은, 식(15)의 k 가 각각 2 와 3 인 경우에 해당하므로, 아래와 같이 표현되며,

$$c_n^{(2)} = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{(1-M\cos\theta\cos\omega\tau)^2}\cos n\omega\tau \, d\tau \tag{19}$$

$$c_n^{(3)} = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{(1-M\cos\theta\cos\omega\tau)^3}\cos n\omega\tau \, d\tau \tag{20}$$

적분결과는 다음과 같다. (증명생략)

$$c_n^{(2)} = \sum_{m=n}^{\infty}\left((m+1)\delta_{m+n}\frac{2\pi}{\omega}\,{}_mC_{(m-n)/2}\left(\frac{M\cos\theta}{2}\right)^m\right) \tag{21}$$

$$c_n^{(3)} = \sum_{m=n}^{\infty}\left(\frac{m(m+1)}{2}\delta_{m+n}\frac{2\pi}{\omega}\,{}_mC_{(m-n)/2}\left(\frac{M\cos\theta}{2}\right)^m\right) \tag{22}$$

위의 이론적 결과를 기초로, 정상 및 비정상하중소음에 의한 주파수 스펙트럼을 분석하는데 다음과 같이 유용하게 활용될 수 있다.

3.2 Lowson 의 소음방사식으로의 응용

식(23)는 Lowson[5]의 하중소음 예측식이다.

$$4\pi\rho'(x,t) = \left[\frac{1}{(1-M_r)^2 r^2}\left(F_r\frac{(1-M^2)}{(1-M_r)} - F_i M_i\right) + \frac{1}{c_0(1-M_r)^2 r}\left(\frac{\partial F_r}{\partial t} - \frac{F_r}{1-M_r}\frac{\partial M_r}{\partial t}\right)\right]_{\tau=t-r/c} \tag{23}$$

일정한 각속도로 회전하는 음원의 경우 마하수(M)는 상수이므로, 식(23)의 도플러효과항을 제외하고 소리의 발생에 영향을 주는 요소로는 정상하중, 비정상하중, 속도 및 가속도항이 있으며, 일반적으로 위의 네 요소들은 $\cos m\omega\tau$ 또는 $\sin m\omega\tau$ 항들로 급수전개가 가능하다. (m 은 자연수) 따라서, 식(15)와 식(16)의 적분기호 안에 $\cos m\omega\tau$ 또는 $\sin m\omega\tau$를 곱하고, 삼각함수의 곱셈을 덧셈으로 변환하는 기본적인 성질을 사용한 후에, 식(17,21,22)의 결과를 활용하여, 하중소음식의 Fourier 변환에 관한 근사식을 유도할 수 있다. 이를 통해, 회전하는 날개 표면에 걸리는 걸리는 다양한 하중특성에 따른 소음의 방사특성 및 임의의 관측지점에서의 주파수 스펙트럼을 체계적으로 분석할 수 있는 이론적 토대가 마련될 수 있다. 본 연구의 결과는 방사시각 관점의 결과이므로, 보다 실제적인 적용을 위해 관측자시각 관점으로의 변환이 수반되어야 하며 이에 관한 연구를 수행중에 있다.

4. 결 론

회전하는 음원의 도플러효과항을 Legendre 다항식을 이용한 무한급수로 전개한 후, 엄밀한 해석적 분을 통해 Fourier 변환의 원거리 근사식을 유도하였다. 회전음원에 의한 주파수 스펙트럼을 이론적으로 정확하게 예측하고 정상 및 비정상하중소음의 방사특성을 보다 면밀하게 고찰하기 위해, 본 연구결과의 시간관점을 관측자시간으로 변환하여 기존의 이론결과들[1-4]과 비교하는 연구를 수행중이다.

참 고 문 헌

1. Lowson, M. V. and Ollerhead, J. B., "A theoretical study of helicopter rotor noise", Vol. 9, No. 2, 1969, pp. 197-222
2. Lowson, M. V., "Theoretical analysis of compressor noise", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 47, 1970, pp. 371-385
3. Wright, S. E., "Sound radiation from a lifting rotor generated by asymmetric disk loading", J. Sound Vib., Vol. 9, No. 2, 1969, pp. 223-240
4. Morfey, C. L. and Tanna, H. K., "Sound radiation from a point force in circular motion", J. Sound Vib., Vol. 15, No. 3, 1971, pp. 325-351
5. Lowson, M. V., "The sound field for singularities in motion", Proc. R. Soc. Series A Vol. 286, 1965, pp. 559-572