

회전 축차의 안정성에 미치는 부하 토크의 영향

Effect of Load Torque on the Stability of Overhung Rotors

류봉조† · 임경빈* · 김종호** · 박남규***

Bong-Jo Ryu, Kyung-Bin Yim, Jong-Ho Kim and Nam-Gyu Park

1. 서 론

유연한 회전 축차에 가해진 부하 토크의 영향에 관한 연구는 많은 연구자들에 의해 연구되어져 왔다. 그 후, Yim과 그의 공동연구자들은 수정된 전이행렬방법을 사용하여, 유연한 축차의 동역학에 미치는 접선 토크의 영향을 조사하였고, Lee와 Yun은 일반적 갤러킨 방법을 이용하여, 회전 축차가 비보존 토크와 힘을 받을 때, 축차의 안정성과 고유진동수에 미치는 부하토크의 영향에 대한 연구를 하였다. 본 논문은 수정된 전이행렬방법을 이용하여, 부하토크를 받고 돌출된 원판을 갖는 회전축의 안정성을 해석한다.

2. 이 론

2.1 축방향 토크하의 외팔 돌출원판의 운동방정식

Fig. 1은 부하 토크 T 하에 회전각속도 Ω 인 외팔 회전축차를 보여준다. Fig. 1에서, EI 는 축의 굽힘강성, ℓ 과 m 은 각각 축의 길이와 분포질량을 나타낸다. m_d , I_p , I_t 는 각각 원판의 질량, 극관성모멘트, 횡방향 관성모멘트이다.

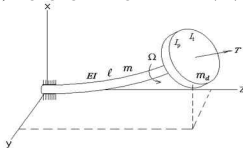


Fig. 1 A cantilevered overhung disk under external torque.

축의 운동에너지와 회전원판의 운동에너지는 다음과 같다.

$$K_s = \frac{1}{2} \int_0^\ell m(z) \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^\ell m(z) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dz \quad (1)$$

$$K_d = \frac{1}{2} [m_d \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + m_d \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + I_t \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + I_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) \right)^2 + I_p [\Omega^2 + 2\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2]_l \quad (2)$$

한편, 굽힘모멘트에 의한 보존일과 원판에 작용하는 부하 토크와 감쇠에 의한 비보존 가상일은 각각 식(3) 및 (4)와 같다.

$$W_\epsilon = -\frac{1}{2} \int_0^\ell EI(z) \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right)^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(z) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (3)$$

$$\delta W_{nc} = \int_0^\ell -T \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) dz + \int_0^\ell -T \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) dz - C \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_l \delta x_l - C \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_l \delta y_l \quad (4)$$

식 (1)에서 (4)를 확장된 해밀턴원리 식 (5)에 대입하고, 복소함수 $w(z) = x + iy$ 를 도입하면 식 (6)과 같이 된다.

† 교신저자; 한밭대학교 기계공학과
E-mail : bjryu701@hanbat.ac.kr
Tel : (042) 821-1159, Fax : (042) 821-1587

* 동양공업대학 기계과

** 한밭대학교 기계설계공학과 대학원

*** 한전원자력연료(주)

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K_s + \delta K_d + \delta W_\epsilon + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (5)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - iT \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 ; \quad i = \sqrt{-1} \quad (6)$$

한편, 관련된 경계조건들은 식 (7) 및 (8)과 같다.

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - iT \frac{\partial w}{\partial z} + I_p \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} - iI_p \Omega \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} = 0 \quad (7)$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - iT \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - m_d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - C \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

이제 식 (9)와 같은 무차원화된 파라미터들과 변수들을 소개하면 식 (6)-(8)은 식 (9)-(12)로 표현된다.

$$\eta = \frac{z}{\ell}, \quad v = \frac{w}{\ell}, \quad \tau = \Omega t, \quad \gamma = \frac{T \ell}{EI}, \quad p^2 = \frac{m}{EI} \ell^4 \Omega^2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} - i\gamma \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} + p^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - i\gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} + m_d Q p^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^2 \partial \eta} - i m_d Q I_p p^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \eta} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} - i\gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - m_d p^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \zeta \gamma \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (12)$$

2.2 전이행렬 공식화

n 번째 거소에서 원판을 포함하는 관성전이함수의 축요소에 대한 압축된 형태는 식 (13)과 같다.

$$\{X\}_n^R = [T_m] \{X\}_n^L, \quad \{X\}_{n+1}^L = [T_s] \{X\}_n^R \quad (13)$$

이제 축요소와 질량요소를 포함하는 i 번째 거소에 대한 전이행렬은 식 (14)와 같다, 따라서 거소 n 의 상태벡터는 거소 1의 상태벡터에 의해 최종적으로 식 (15)로 표현될 수 있다.

$$[T]_i = [T_s]_i [T_m]_i \quad (14)$$

$$\{X\}_n^L = [T]_{n-1} [T]_{n-2} \dots [T]_2 [T]_1 \{X\}_1^L = \prod_{i=1}^n [T]_i \{X\}_1^L \quad (15)$$

3. 수치 해석

3.1 부하 토크하의 외팔보형 회전체의 안정성

(1) 비감쇠의 경우

수치해석의 타당성을 검증하기 위하여 단순 지지된 균일축의 임계 속도에 미치는 토크의 영향을 검토하였으며, 전달행렬 프로그램에서 20개의 요소를 사용했을 때, 정밀해와의 최대 오차는 1차 및 2차 임계 속도에서 각각 0.47%와 0.36%를 보였다.

고속 터보기계를 기준으로 다음 데이터를 선정하고 21개의 요소를 사용하여 해석을 수행하였다. $\ell = 0.254\text{m}$, $d = 0.038\text{m}$, $\rho = 7833\text{kg/m}^3$, $m_d = 31.8\text{kg}$, $I_p = 0.18\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $I_t = 0.09\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $E = 2 \times 10^{11}\text{N/m}^2$, $\Omega = 7000\text{rpm}$. 적용 토크가 whirl frequency에 미치는 영향은 미미하지만 안정성에는 큰 영향을 미치므로, 축 방향 토크가 외팔보형 회전체의 대수 감쇠율에 미치는 영향을 조사하여 Fig. 3에 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 대수 감쇠율은 모든 모드에서 적용한 토크에 비례하여 증가하며, 불안정한 대수 감쇠율이 음(-)인 영역보다는 안정한 대수 감쇠율이 양(+)인 영역에서 토크의 영향이 더 크게 나타났다. 이 결과는 접선방향 토크를 적용했을 때의 결과(3)에서 대수 감쇠율 부호를 반대로 한 것과 일치하므로 양(+) 방향의 축 방향 토크와 음(-) 방향의 접선방향 토크가 계의 안정성에 미치는 영향이 서로 같음을 알 수 있다. 여기서 양(+) 방향 토크란 터빈에서와 같이 구동 상태를 의미하며 음(-) 방향 토크는 컴프레서에서와 같은 부하

토크 상태를 나타낸다. 이와 같은 결과와 현상은 깎러킨 방법으로 도출되어 보고된 바 있다.

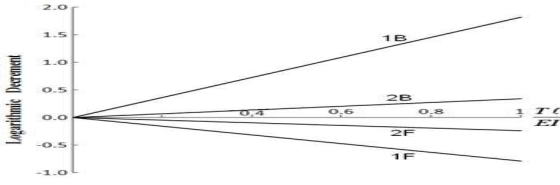


Fig. 3 Effect of positive axial torque on the logarithmic decrement of the cantilevered overhung rotor.

(2) 감쇠의 경우

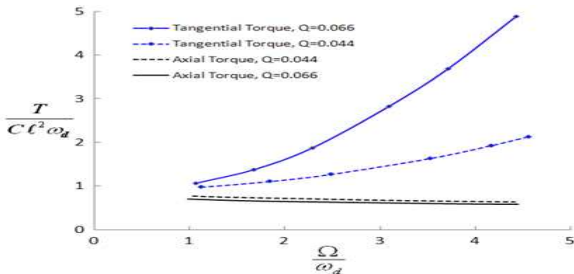


Fig. 4 Ratio of torque to damping for marginal stability vs. dimensionless shaft speed.

Fig. 4는 계의 안정을 위하여 요구되는 부하토크 대 감쇠의 비를 무차원화 된 축 속도 변화에 따라서 표시한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 축의 회전 속도가 증가함에 따라서 자이로스코프 효과가 증대되어 계의 안정에 요구되는 허용 토크는 forward 모드에서는 증가하나 backward 모드에서는 감소한다. 축 방향 부하 토크 경우는 토크 대 감쇠비의 변화가 완만한데 이는 부하토크의 영향이 forward 모드에서 보다는 backward 모드에서 더 크기 때문이며 그림의 결과는 계의 감쇠 값이나 디스크 무게 대 축 무게 비율에 거의 영향을 받지 않았다.

3.2 부하 토크를 받으며 중간지지가 있는 돌출형 회전체의 안정성

Fig. 5는 중간지지가 있는 돌출형 회전체 모델을 보여준다.

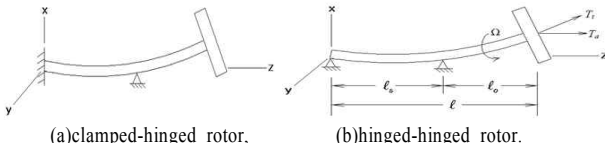


Fig. 5 An overhung rotor model with an intermediate support.

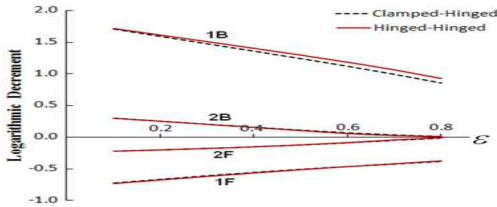


Fig. 6 Effect of the location of an intermediate support on the logarithmic decrement of an overhung rotor, where $\epsilon = l_1/l_2$

Fig. 6은 $\gamma=1$ 일 때 접선방향 부하토크를 받는 돌출형 회전체의 첫 4개 모드의 대수 감쇠율을 중간 지지의 다양한 위치에 따라서 나타낸 것으로 무차원 항 ϵ 은 두 지지간의 거리와 축 전체 길이와의 비이다. 중간 지지가 디스크에 접근할수록 모든 모드의 대수 감쇠율은 거의 직선으로 감소하며, 첫 번째 backward 모드를 제외하고는 왼쪽 끝단의 경계조건(고정 또는 단순지지)에 따른 계의 대수 감쇠율의 차이는 미미하다. 중간지지 위치 변화에 따른 부하토크 대 감쇠의 비율을 Fig.

7에 나타내었으며, 돌출형 길이와 축 전체 길이의 비가 감소할수록 계의 안정에 요구되는 허용 토크는 증가하나 자이로스코프 효과는 감소함을 알 수 있다.

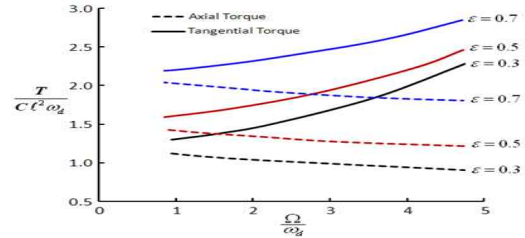


Fig. 7 Ratio of torque to damping for stability vs. dimensionless shaft speed for various locations of an intermediate support.

Fig. 8은 두 지지간의 중앙에 디스크를 추가하여 원판이 2개인 회전 축차를 보여준다. 처음에는 앞서와 같이 축 전체에 부하 토크를 적용하였고, 다음에는 구동토크가 모두 부하로 전환된다고 가정하여 토크를 두 원판 사이에만 적용하였다.

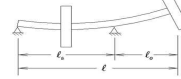


Fig. 8 A two-disk overhung rotor model with an intermediate support.

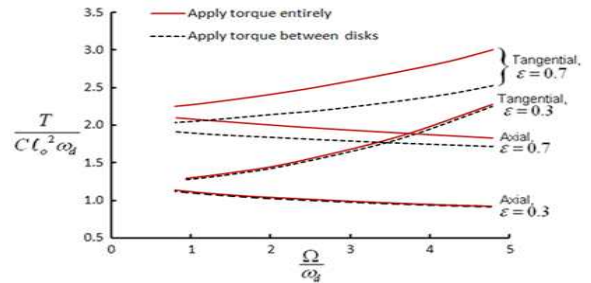


Fig. 9 Ratio of torque to damping for stability vs. dimensionless shaft speed for two different cases of applying torques.

Fig. 9는 서로 다른 토크 적용과 지지 위치에 대한 결과를 보여준다. 그림에서 보듯이 접선 방향이나 축 방향 토크가 가해질 때 축 전체가 아닌 디스크 사이에만 토크를 적용하면 계의 안정을 위한 허용 토크가 낮아짐을 알 수 있다. 이는 왼쪽 끝단과 추가된 디스크 사이에 적용한 토크가 계를 안정시키는 효과가 있음을 의미하며 이러한 현상은 첫 번째 forward and backward whirl의 모드 형상(Fig. 8 참조)으로 설명될 수 있다. 따라서 부하 토크가 계의 안정성에 미치는 영향은 모드 형상에 따라서 크게 좌우됨을 알 수가 있다. 돌출형 길이 대 축 전체 길이에 대한 비가 증가 할수록 토크 적용 방법에 의한 차이는 점차 감소하여 미미해 진다.

4. 결론

첫째, 돌출형 회전체에 가해지는 토크가 증가할수록 접선방향 부하 토크의 경우에는 forward whirl이, 축 방향 부하 토크에서는 backward whirl이 더욱 불안정하게 된다. 또한 축의 회전속도와 자이로스코프 효과가 증가함에 따라서 계의 안정을 위한 최대 허용 토크는 접선방향 부하 토크에서는 증가하나 축 방향 토크에서는 감소하며, 부하토크의 영향이 forward 모드에서 보다 backward 모드에서 더 크기 때문에 축 방향 부하 토크의 경우는 토크 대 감쇠비의 변화가 매우 완만하다. 둘째, 중간 지지가 있는 돌출형 회전체에 대한 해석결과 부하 토크가 계의 안정성에 미치는 영향은 모드 형상에 따라서 크게 영향을 받는다. 왼쪽 끝단의 구속 조건(고정 또는 단순지지)에 의한 계의 대수 감쇠율 차이는 축 방향 부하 토크에서는 먼저 forward 모드에서만, 접선방향 부하 토크에서는 첫 번째 backward 모드에서만 다소 나타났다. 본 논문에서 제시한 수학적 모델과 안정성 범위는 중간 지지가 있거나 혹은 없는 돌출형 회전 축차의 설계 해석이나 성능 개선에 활용할 수 있을 것으로 사료된다.