한국소음진동공학회 창립 20주년 기념 2010년 춘계학술대회논문집, pp.495~496

폐루프 시스템에 대한 에너지 기반의 외란 억제 지표

An Energy-based Measure Representing Degree of Disturbance Rejectability for Closed-loop System

강옥현† · 김노성* · 박영진**

Okhyun Kang, Nho-seong Kim, name and Younjin Park

1. 서 론

외란 억제는 제어 분야에서 중요한 제어 목적 중 하나이고, 많은 제어 기법들이 연구되어 왔다. 그리고 외란 억제의 성능 평가는 설계된 제어기의 목적 함수에 의해 결정된다. 하지만 본 논문에서는 시스템이 가지는 고유의 외란 억제 능력을 표현하는 지표를 제시한다. 제시된 외란 억제 지표는 입력 에너지라는 물리량을 가짐으로 정량적인 지표로 적합하고 서로 다른 구성을 가지는 시스템들 간의 상대적인 외란 억제 능력을 비교할 수 있다.

이렇게 제안된 외란 억제 지표는 설계된 제어기의 종류에 상관없이 폐루프 시스템의 외란 억제 능력을 표현할 수 있다. 그리고 뿐만 아니라 제안된 지표와 사용된 제어기의 성능 지표간의 상관 관계를 얻을 수 있다. 즉, 제안된 지표를 바탕으로 외란 억제 능력이 떨어지는 시스템이면 제어기 성능 역시 떨어진다는 것을 보이겠다. 하지만 제어기의 설계와는 별도로 시스템은 스스로 가지고 있는 외란 억제 능력이 존재하고 이런 능력이 좋을수록 제어기의 성능도 더 좋아질 수 있다.

2. 에너지 기반의 외란 억제 지표

2.1 입력 에너지 최소화 문제

제안될 외란 억제 지표는 다음과 같은 선형 시 불변 시스템에 제한된다.

$$\dot{x} = \left(A - BK\right)x + Bv + Dw \qquad (1)$$
$$y(t) = Cx(t).$$

여기서 $v = u + BKx$. K는 설계된 제어 게인이다. 그리고 시스템 (1)은 제어 가능하다고 가정한다. 외란은 평균이 0이고 다음과 같은 자기 상관 행렬을 가지는 가우시안 백색 잡음으로 간주한다.

$$R_w(\tau) = E[w(t)w^T(t+\tau)] = S_w\delta(\tau) \qquad (2)$$

이를 바탕으로 입력 에너지 최소화 문제를 수행한다. 다음과 같은 목적 함수를 정의한다.

$$\text{Minimize} \quad \bar{\rho}_c(K) = E\left[\int_0^\infty u^T(t)u(t)dt\right] \qquad (3)$$
$$\text{s.t} \quad x(0) = 0, y(\infty) = 0 \ \text{ and (1)}$$

위의 최소 입력 에너지의 평균 값은 최종적으로 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\therefore \bar{\rho}_c(K) = tr\left\{\bar{W}_{cc}^{-1} \cdot \bar{W}_{cd}\right\} \qquad (4)$$

여기서

$$\left(A - BK\right)\bar{W}_{cc} + \bar{W}_{cc}\left(A - BK\right)^T + BB^T = 0 \qquad (5)$$
$$\left(A - BK\right)\bar{W}_{cd} + \bar{W}_{cd}\left(A - BK\right)^T + DS_wD^T = 0 \qquad (6)$$

식 (4)에서 보듯이 새로이 제안되는 외란 억제 지표는 두 개의 grammian 행렬을 이용하여 구할 수 있고, 이는 식 (5)~(6)의 Lyapunov 방정식으로부터 비교적 쉽게 구할 수 있다. 제안된 외란 억제 지표는 입력 에너지라는 절대적인 단위를 가지는 지표로 정량적 표현이 가능하고 서로 다른 구성을 가지는 시스템들의 상대적인 외란 억제 능력을 비교할 수 있다.

3. 제안된 지표와 제어기 성능과의 관계

3.1 최적 제어기 설계

외란 억제 제어기의 하나인 stochastic regulator를 살펴보자. 우선 제어기의 성능을 나타내는 목적

† 강옥현; 대우조선해양㈜ 진동소음 R&D
E-mail : okhyunkang@dsme.co.kr
Tel : (055) 680-5549, Fax : (055) 680-2142
* 대우조선해양㈜ 진동소음 R&D
** 한국과학기술원 기계공학부

함수는 아래 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} J &= E\left[\int_0^\infty x^T Q x + u^T u\, dt\right] \\ &= E\left[\int_0^\infty x^T \left(Q + \bar{P}BB^T\bar{P}\right) x\, dt\right] \\ &= tr\left(\bar{P}DS_w D^T\right) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\bar{P}$ 는 리카티 방정식의 해이고, (8)로부터 구할 수 있다.

$$\bar{P}A_c + A_c^T\bar{P} + \bar{P}BB^T\bar{P} + Q = 0 \quad (8)$$

여기서 $A_c = A - BK$ 이고 $\bar{P} = \bar{P}^T > 0, Q = Q^T \geq 0$.

3.2 외란 억제 지표와의 상관관계

3.1 절에서 보인 stochastic regulator 의 성능 지표와 제안된 외란 억제 지표와의 관계를 보이도록 하겠다. 식 (6)과 (7)을 이용하여 성능 지표값을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J = tr\left\{\bar{P}\left(-A_c\bar{W}_{cd} - \bar{W}_{cd}A_c^T\right)\right\} \quad (9)$$

그리고 식 (9)는 식 (10)과 같이 표현할 수 있다.

$$J = tr\left\{\left(-\bar{P}A_c - A_c^T\bar{P}\right)\bar{W}_{cc}\cdot\bar{W}_{cc}^{-1}\bar{W}_{cd}\right\} \quad (10)$$

다음으로 식 (11)과 같은 trace 의 성질을 이용하여

$$0 \leq tr(AB)^n \leq tr(A)^n tr(B)^n,\ A, B \geq 0 \quad (11)$$

식 (10)을 정리하면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$J \leq tr\left\{\left(-\bar{P}A_c - A_c^T\bar{P}\right)\bar{W}_{cc}\right\} tr\left\{\bar{W}_{cc}^{-1}\bar{W}_{cd}\right\} \quad (12)$$

여기서 우변의 두 번째 항은 식 (4)에서 구한 외란 억제 지표와 같으므로 다시 정리하면 식 (13)과 (14)를 얻을 수 있다.

$$J \leq tr\left\{\left(-\bar{P}A_c - A_c^T\bar{P}\right)\bar{W}_{cc}\right\}\bar{\rho}_c(K) \quad (13)$$

또는

$$J \leq tr\left\{\left(Q + \bar{P}BB^T\bar{P}\right)\bar{W}_{cc}\right\}\bar{\rho}_c(K) \quad (14)$$

식 (14)로부터 제어기의 성능 지표 값은 외란 억제 지표 값에 의해 상한값이 결정된다는 것을 알 수 있다. 즉, 제안된 외란 억제 지표값이 커서 외란 억제 능력 값이 떨어지는 시스템의 경우는 제어 성능의 상한 값 역시 커지기 때문에 제어기의 성능이 떨어진다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 폐루프 시스템에 대한 외란 억제 능력을 정량적으로 표현할 수 있는 지표를 제시하였다. 그리고 stochastic regulator 의 제어 성능 지표 값과의 상관 관계를 보였다. 그 결과 제어기 성능 지표는 제어기 설계 시 필요한 파라미터에 의해 결정되는 항과 외란 억제 지표값의 곱에 의해 그 상한이 결정된다는 것을 알 수 있다. 즉, 외란 억제 능력이 떨어지는 시스템은 제어 성능 역시 떨어진다는 것을 알 수 있었다.