한국소음진동공학회 창립 20주년 기념 2010년 춘계학술대회논문집, pp.560~561

DTM을 이용한 회전 외팔보의 끝단질량에 의한 진동 특성 해석

Vibration Characteristics of a Rotating Cantilever Beam with Tip Mass by using DTM

김민주* · 강남철†

Minju Kim and Namcheol Kang

1. 서 론

회전하는 외팔보는 항공기, 헬리콥터, 풍력발전기의 블레이드 그리고 위성에 이르기 까지 다양한 형태로 기계 구조물에 적용되고 있다. 이들 탄성 구조물의 변형 및 진동 특성을 해석하는 연구는 중요한 과제로 기존에 많이 진행되어왔다. Craig(1), 유홍희(2), Kaya(3)는 단순 외팔보 모델을 확장하여 각각 끝단집중질량을 가지는 보, 비균일한 밀도를 가지는 보, 테이퍼진 보와 같이 다양한 형태의 외팔보의 진동 특성에 대한 연구를 수행하였다.

또한, 해석 방법을 살펴보면, Wright(4)는 Frobenius법, Bhat(5)는 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 진동해석을 하였고, 유홍희(2)는 복합변형변수를 이용하여 운동 특성을 연구하였다.

미분변환법(Differential Transform Method, DTM)은 Tayler 급수에서 변형된 형태로 수치해석기법중의 하나로써, Zhou가 처음 사용하였으며, Kaya(3), 신영재(6)등이 회전 외팔보 연구에 적용하였다.

본 논문에서는 집중 질량을 가진 회전 외팔보의 운동 방정식을 DTM을 적용하여 진동 특성을 해석하였다. 수치해석은 Mathematica 소프트웨어를 사용하였으며, 선행 연구된 회전 외팔보의 진동 특성 결과를 토대로 본 해석 결과의 신뢰성을 검증 하였다.

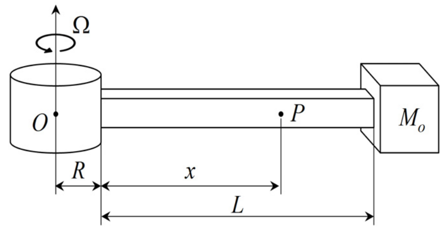

Fig. 1 Rotating cantilever beam with tip mass

† 교신저자; 정회원, 경북대학교 기계공학부
E-mail : nckang@knu.ac.kr
Tel : (053) 950-7545, Fax : (053) 950-6550

* 경북대학교 대학원 기계공학과

2. 본 론

2.1 운동 방정식

끝단에 집중 질량 M_0를 포함하는 길이 L인 외팔보가 반지름 R인 강체 축에 고정되어 있다 (Fig. 1참조). 외팔보가 각속도 Ω로 회전할 때 P점에서 발생하는 Centrifugal Tension Force는 다음과 같이 계산된다.

$$T(x)=\int_x^L \rho A\Omega^2(R+\eta)d\eta+M_0(R+L)\Omega^2$$

이때, Bernoulli-Euler 보의 횡방향 운동방정식은

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0,$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $w(x,\ t)$는 보의 횡방향 변위, ρ는 단위길이 당 밀도, A는 단면적, E는 탄성계수(Young's modulus), I는 단면의 관성모멘트이다. 또한, 끝단질량을 갖는 회전 외팔보의 경계조건은 다음과 같다.

$$w=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad \text{at} \quad x=0,$$

$$\left.\begin{aligned} &EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ &EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-M_0(R+L)\Omega^2\frac{\partial w}{\partial x}=M_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{at} \quad x=L.$$

여기서, 무차원화 된 운동방정식을 미분변환법을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)W[k+4] \\ &-\frac{\gamma^2}{2}(1+2\delta+2\mu)(k+1)(k+2)W[k+2] \\ &+\gamma^2(\delta+k\delta-k\mu)(k+1)W[k+1] \\ &+\frac{\gamma^2}{2}(k+k^2-2\lambda^2)W[k]=0 \end{aligned}$$

마찬가지로, 미분변환법을 적용한 경계조건은

$$W[0]=W[1]=0,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)W[k]=0,$$

$$\mu\gamma^2\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} W[k] - \mu\gamma^2(1+\delta) \sum_{k=0}^{\infty} kW[k] + \sum_{k=0}^{\infty}(k-2)(k-1)kW[k] = 0$$

이며, 여기서 사용된 무차원 변수는 각각 다음과 같다.

$$\delta = \frac{R}{L}, \quad \gamma^2 = \frac{\rho A \Omega^2 L^4}{EI}, \quad \mu = \frac{M_o}{\rho A L}$$

3. 진동 특성

DTM 방정식과 경계조건식을 이용하여 끝단 집중질량을 가지는 회전 외팔보의 무차원화 된 고유진동수를 계산하였다. 우선, 급수의 개수에 따른 고유치의 수렴성을 파악하여 Fig. 2에 도시하였다. 급수의 개수가 증가할수록 고유치가 일정한 값으로 수렴하고, 개수가 30 이상일 경우 3개의 저차 고유치 값들이 신뢰할 수 있는 값으로 수렴함을 확인하였다. 따라서 본 연구에서는 n=30으로 해석하였다.

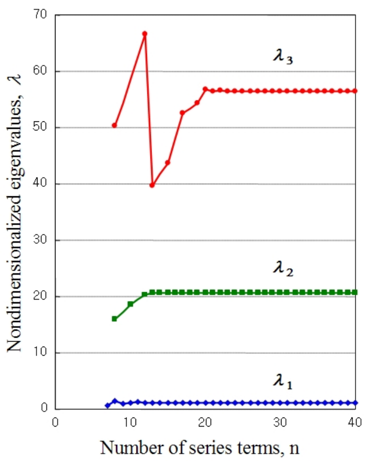

Fig. 2 Convergences of nondimensionalized eigenvalues (when δ=0, γ=1, μ=10)

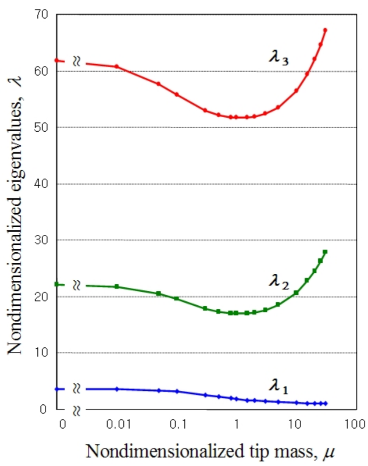

Fig. 3 Nondimensionalized eigenvalues with respect to nondimensionalized tip mass (when δ=0, γ=1, n=30)

무차원 끝단 질량 μ에 대한 고유치 계산 결과를 Fig. 3에 도시하였다. 무차원 끝단 질량이 증가할수록 고유진동수는 감소하지만, 끝단 질량이 외팔보의 질량보다 현저히 커질 경우 고차 모드의 고유진동수는 증가하는 특성을 나타낸다.

4. 결 론

본 연구는 DTM을 이용하여 집중 질량을 가지는 회전 외팔보의 진동 특성을 해석하였다. DTM의 적용 가능성을 확인하고자 고유치의 수렴성을 파악하였으며, 끝단 질량의 증가에 따른 고유진동수의 변화를 계산하였다.

DTM 방법은 진동계의 고유치를 단순화된 방법으로 구할 수 있기 때문에, 진동특성 해석에 용이하며 수치해의 수렴성도 만족할만한 결과를 나타낸다.

참 고 문 헌

(1) Craig, R. Y., 1963, "Rotating beam with tip mass analyzed by a vibrational method," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 35, pp. 990~993.

(2) 유홍희, 1994, "강체운동을 하는 끝단 집중질량을 가진 외팔보의 동적 해석," 한국항공우주학회, 제22권, 제6호, pp. 86~91.

(3) Özdemir, Ö., and Kaya, M. O., 2006, "Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 289, pp. 413~420.

(4) Bhat, R. B., 1986, "Transverse vibrations of a rotating uniform cantilever beam with tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 105, No. 2, pp. 199~210.

(5) Wright, A. D., Smith, C. E., Thresher, R. W., and Wang, J. L. C., 1982, "Vibration modes of centrifugally stiffened beams," Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 197~202.

(6) 신영재, 지영철, 윤종학, 유영찬, 2007, "미분변환법을 이용한 회전외팔보의 자유진동해석," 대한기계학회논문집 A권, 제31권, 제3호, pp. 331~337.