한국소음진동공학회 창립 20주년 기념 2010년 춘계학술대회논문집, pp.608~609

중력의 영향이 고려된 회전하는 외팔보의 동적 안정성 해석
Dynamic Stability Analysis of Rotating Cantilever Beam Considering Gravity Effects

정강일*·유홍희†
Kang-Il Jung and Hong-Hee Yoo

1. 서 론

회전하는 외팔보 형태의 구조물은 풍력 터빈의 블레이드나 헬리콥터의 프로펠러 등 많은 기계시스템에서 찾아볼 수 있다. 이러한 기계시스템을 설계하거나 기존 시스템의 작동능력을 평가하고 개선시키기 위해서는 회전하는 외팔보의 동적 특성을 정확하게 판단하는 것이 필수적이다. 따라서 회전하는 외팔보의 동적 특성을 해석하기 위해 정확한 모델링 방법이 필요하다.

Kane 등이 제시한 새로운 보 모델링 방법은 선형 탄성 변형과 비선형 강체운동으로 구성되어, 강체운동이 큰 경우에도 정확한 해석 결과를 얻을 수 있는 방법이다. 본 연구에서는 이 보 모델링방법을 중력의 효과가 고려된 회전하는 외팔보 모델에 적용하여 선형 운동방정식을 유도하고 안정성 해석 모델을 제시하였다. 지금까지 수행되었던 안정성 해석 연구의 운동방정식은 제차 미분방정식(Homogeneous differential equation)이었고 이러한 경우 다중시간척도법(Multiple time scales method)이나 Floquet 정리 등을 이용하여 시스템의 안정성 여부를 확인할 수 있다. 하지만 본 연구에서 적용된 모델의 운동방정식은 비제차 미분방정식(Nonhomogeneous differential equation)인 경우로서 일반적인 Floquet 정리로는 정확하게 해석하기 힘들다. 따라서 본 연구에서는 안정성 해석 결과를 설계자가 정한 기준에 따라 Contour Graph 로 나타내었다.

2. 운동방정식

본 연구에서는 2차원 평면 운동을 하는 보를 해석 대상으로 삼았다. Fig. 1은 강체 A에 고정되어 있는 변형된 외팔보의 형상을 보여준다.

Kane이 제안한 모델링 방법에 의하여 구한 운동방정식은 식(1)과 같고, 행렬들은 식 (2)와 같이 정의된다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} k_{ij}^{B} q_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} - \omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^{22} q_{2j} + \omega^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} k_{ij}^{GB} q_{2j} \qquad (1)$$

$$+ g\sin\theta \sum_{j=1}^{\mu_2} k_{ij}{}^{G} q_{2j} - g\cos\theta P_{2i} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., \mu_2)$$

$$k_{ij}^{B} \equiv \int_0^L EI\phi_{2i,xx}\phi_{2j,xx}dx,\ m_{ij}^{ab} \equiv \int_0^L \rho\phi_{ai}\phi_{bj}dx, P_{\alpha i} \equiv \int_0^L \rho\phi_{\alpha i}dx \qquad (2)$$

$$k_{ij}^{G} \equiv \int_0^L \rho(L-x)\phi_{2i,x}\phi_{2j,x}dx,\ k_{ij}{}^{GB} \equiv \int_0^L \frac{1}{2}\rho(L^2-x^2)\phi_{2i}'\phi_{2j}'dx$$

또한 식 (1)를 무차원화 한 운동방정식은 식(3)으로 나타낼 수 있고, 무차원 변수와 행렬은 식 (4)와 같이 정의된다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2}\left[\bar{M}_{ij}^{22}\ddot{\eta}_{2j} + \left\{\begin{array}{l}\left(-\omega^2T^2\right)\bar{M}_{ij}^{22} + \bar{K}_{ij}^{B} + \\ \dfrac{\omega^2T^2}{2}\bar{K}_{ij}^{GB} + \dfrac{gT^2}{L}\sin\theta\bar{K}_{ij}^{G}\end{array}\right\}\eta_{2j}\right] - \frac{T^2}{L}g\cos\theta\bar{P}_i = 0 \qquad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{\rho g L^3}{EI},\ \gamma = \omega T,\ T = \sqrt{\frac{mL^4}{EI}},\ \tau = \frac{t}{T},\ \xi = \frac{x}{L},\ \eta_i = \frac{q_{2i}}{L}$$

$$\bar{M}_{ij}^{22} = \int_0^1 \psi_{2i}\psi_{2j}d\xi\ ,\ \bar{K}_{ij}^{B} = \int_0^1 \psi_{2i,\xi\xi}\psi_{2j,\xi\xi}d\xi\ ,$$

$$\bar{K}_{ij}^{G} = \int_0^1 (1-\xi)\psi_{2i,\xi}\psi_{2j,\xi}d\xi,\ \bar{K}_{ij}^{GB} = \int_0^1 (1-\xi^2)\psi_{2i,\xi}\psi_{2j,\xi}d\xi, \qquad (4)$$

$$\bar{P}_i = \int_0^1 \psi_{2i}d\xi$$

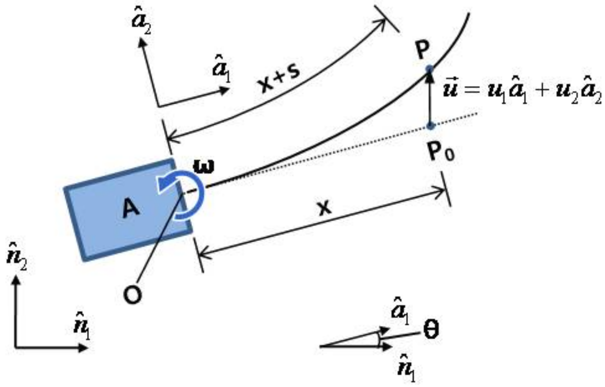

Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever beam

† 교신저자; 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel: (02)2220-0446, Fax:(02)2293-5070
* 한양대학교 대학원 기계공학과

3. 안정성 해석

식 (3)에서 볼 수 있는 것과 같이, 이 시스템의 운동방정식은 비제차 미분방정식임을 알 수 있다. 비제차 미분방정식은 일반적인 Floquet 이론을 통해서는 해석할 수 없다. Fig. 2 에서 붉은 그래프는 Floquet 이론에 따라 불안정하다고 판단된, 시간이 지남에 따라 발산하는 그래프이다. 그리고 검은 그래프는 Floquet 이론에 따른 결과로는 안정하다고 판단된 그래프이다. 하지만 Fig. 3 을 보면 알 수 있듯이, 안정하다고 판단된 결과에서 무차원 변위 값이 시간이 지남에 따라 발산하지는 않지만 물리적으로는 일어날 수 없을 정도로 큰 값을 가지는 것을 알 수 있다. 따라서 운동방정식이 비제차 방정식인 경우에 대해서 안정성을 판단하기 위한 척도가 필요한 것을 알 수 있다. 비제차 방정식을 풀어 구한 무차원 변위 값이 주기적 함수 형태로 나타나기 때문에 본 연구에서는 무차원 변위 그래프의 진폭을 사용하여 진폭의 범위에 따라 안정성 척도를 규정하는 기법을 제안하고자 하며 그 결과로 Contour Graph 를 구하였다. 진폭의 범위에 따라 11 단계로 나누었고, 그에 따라 구한 환산값은 Table 1 에 나타내었다. 이 범위는 설계자의 기준에 따라 다르게 적용될 수 있다.

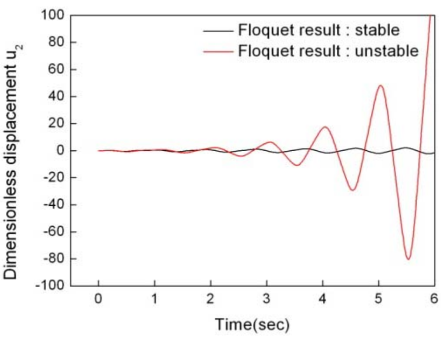

Fig. 2 Transient analysis for two cases of nonhomogeneous problem

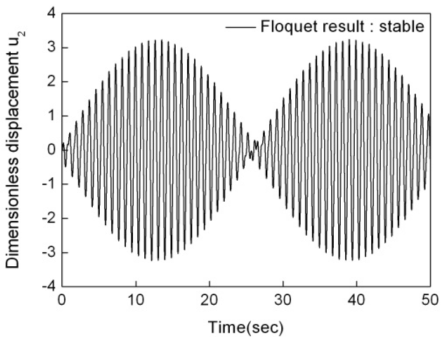

Fig. 3 Stable case of nonhomogenenous problem

Table1 Conversion tables

Dimensionless u_2 max	0~0.05	0.05~1	0.1~0.15	···	0.45~0.5	0.5~
Conversion value	0	1	2	···	9	10

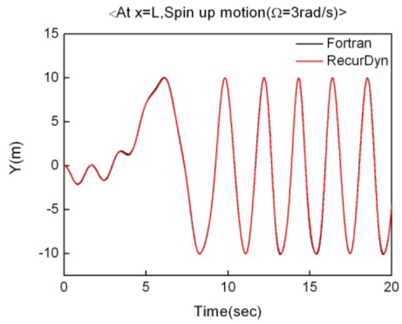

Fig. 4 Verification for the equation of motion

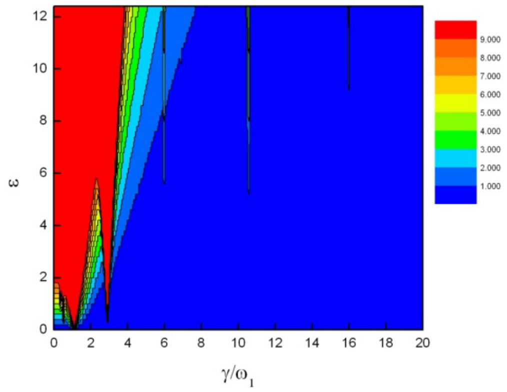

Fig. 5 Stability Contour Graph

4. 수치해석 결과

모델링을 통해 구한 운동방정식을 상용 프로그램인 RecurDyn 을 통해 검증하였고, Fig. 4 를 통해 확인하였다. 식 (3)으로부터 ε , γ 값의 변화에 따른 무차원 u_2 값을 수치해석을 통해 구할 수 있고, 얻은 결과를 Table 1 에 규명한 환산 값에 따라 색을 달리하여 Fig. 4 를 얻었다. 여기서 ε 은 외팔보의 제원과, γ 는 구동 각속도와 관련되어있다. 불안정한 영역은 대부분 낮은 각속도로 회전 시 나타나며, 특히 구동 각속도가 ω_1, $(\omega_1+\omega_2)/2$ 인 영역을 중심으로 매우 불안정한 것을 확인할 수 있었다.

5. 결 론

이 논문에서는 중력의 영향이 고려된 회전하는 외팔보의 모델링 및 안정성 해석이 수행되었다. 중력의 영향으로 인해 운동방정식이 비제차 미분방정식이 되었고, 비제차 방정식을 운동방정식으로 갖는 시스템의 안정성 해석 방법을 제안하였다. 해석 결과 γ 가 ω_1, $(\omega_1+\omega_2)/2$ 근처에서 심한 불안정성을 나타내는 것을 확인할 수 있었다.

후 기

이 논문은 2010 년도 2 단계 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.