

# LSV 이용한 Wiener-Ibrahim Time Domain 알고리즘 개발

## Development of Wiener-Ibrahim Time Domain Algorithm Using LSV

· 이종서\* · 김성환\* · 왕세명†

JongSuh Lee, Sunghwan Kim and Semyung Wang

### 1. 서론

시스템의 동적 특성(고유진동수, 감쇠, 모드 형상)을 알기 위해서 실험적인 방법을 사용되는데 이를 Experimental Modal Analysis (EMA)라고 부른다. 본 논문은 EMA 중 Time domain 방법으로써 Ibrahim time domain (ITD) 알고리즘을 이용하였는데 이는 실험 데이터로부터 complex 고유치 문제를 이끌어내어 동적 특성을 살펴볼 수 있으며 장점으로 큰 감쇠시스템이거나 근접한 고유진동수, spectral leakage 같은 Frequency domain 방법의 한계를 보완할 수 있다. 좀 더 빠른 측정을 위해 비접촉식 진동 측정 장비인 EM4SYS 사의 Laser Scanning Vibrometer (LSV) 장비를 이용하여 얻은 실험값을 ITD 알고리즘에 적용하였다. 추가로 더 정확한 동적 특성을 얻기 위해 ITD 알고리즘에 Wiener Filter 을 도입함으로써 더 정확한 결과를 얻을 수 있다. 즉 Wiener ITD method 라는 개선된 알고리즘을 이 논문에서 제안하였다. 이 알고리즘 역시 LSV 를 이용하여 얻은 실험값을 적용하였다.

### 2. 본론

#### 2.1 Ibrahim Time Domain Method

$N$  자유도 점성 자유 진동 시스템의 지배 방정식의 해를 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$x_i(t_j) = \sum_{r=1}^{2N} (\psi_{ir}) e^{s_r t_j} \text{ or } [x(t)] = [\Psi] \cdot [\Lambda(t)] \quad (1)$$

$(m \times q) \quad (m \times 2N) \quad (2N \times q)$

여기서  $i$  는 측정된 좌표(response),  $j$  는 시간 증가량  $s_r$  은 시스템 특성 방정식의  $r$  번째 근 또는

complex 고유치,  $\psi_{ir}$  는  $i$  번째 요소의 complex 고유벡터  $\{\psi_r\}$  이다. 총 자유도는  $N$  으로 가정하였다. 측정된 좌표 위치  $m$ , 순간 시간  $q$  이다. 동시에 (1)의 오른쪽과 같은 매트릭스 형태로도 표현할 수 있다. 여기서 첫 번째 세트인 (2)에서  $\Delta t$  만큼 지연된 반응의 두 번째 세트는 다음과 같다.

$$x_i(t_j + \Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} (\psi_{ir}) e^{s_r(t_j + \Delta t)} \quad (2)$$

$$\text{or } [\hat{x}(t)] = [\hat{\Psi}] \cdot [\Lambda(t)]$$

똑같은 방법으로 세 번째 세트는 첫 번째 세트에서  $2\Delta t$  만큼 지연된 식의 매트릭스 방정식 다음과 같다.

$$[\hat{\hat{x}}(t)] = [\hat{\hat{\Psi}}] \cdot [\Lambda(t)] \quad (3)$$

(1) 과 (2)에서

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi \\ \hat{\Psi} \end{bmatrix} [\Lambda(t)] \text{ or } [Y(t)] = [P] [\Lambda(t)] \quad (4)$$

그리고 (2)과 (3)에서

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi} \\ \hat{\hat{\Psi}} \end{bmatrix} [\Lambda(t)] \text{ or } [\hat{Y}(t)] = [\hat{P}] [\Lambda(t)] \quad (5)$$

여기서  $[Y(t)], [\hat{Y}(t)], [P], [\hat{P}]$  는 모두 non-singular 매트릭스이며 총 자유도 수는 측정된 좌표위치와 같다 ( $m=N$ ) 라고 하면  $[P], [\hat{P}]$  는 square 매트릭스가 된다. 순간 시간의 수  $q$  가  $2N$  개보다 훨씬 많은 값을 가지고 있으므로 (4), (5)의 관계에서  $[\Lambda(t)]$  을 제거했을 때 다음 식을 얻게 된다.

$$[\hat{Y}(t)][Y(t)]^T ([Y(t)][Y(t)]^T)^{-1} [P] = [\hat{P}] \quad (6)$$

그리고 다음과 같은 식을 시스템 매트릭스(system matrix)라 정의한다.

$$[A] = [\hat{Y}(t)][Y(t)]^T ([Y(t)][Y(t)]^T)^{-1} \quad (7)$$

그래서(6)은  $2N$  개의 방정식 세트로 구성 되며 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$[A]\{P\}_r = \{\hat{P}\}_r, \quad r = 1, 2, \dots, 2N \quad (8)$$

최종적으로,  $\{P\}_i$  와  $\{\hat{P}\}_i$  의 관계를 통해 (8)은

$$[A]\{P\}_r = e^{s_r \Delta t} \{P\}_r \quad (9)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 우리는 시스템의 고유진동수, 감쇠, 모드 형상을 (9)로부터 구할 수 있다. 그 해는 다음과 같다.

† 교신저자; 광주과학기술원

E-mail : smwang@gist.ac.kr

Tel : (062) 715-2390

\* 광주과학기술원

$$e^{s_r \Delta t} = a_r + ib_r = e^{-\omega_r \zeta_r \Delta t} e^{i\omega_r' \Delta t} \quad (10)$$

위의 식에서 비 감쇠 고유 진동수(  $\omega_r$  )와 점성감쇠계수( $\zeta_r$ )를 구할 수 있다.

### 2.2 Wiener-Ibrahim Time Domain Method

추정에 있어서 시스템을 Fig. 1 와 같은 블록 다이어그램으로 표현 할 수 있다.

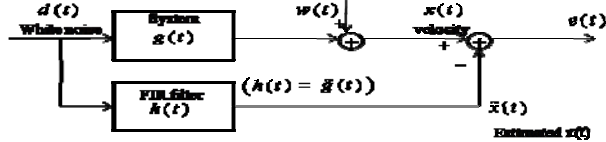


Fig.1 Wiener filtering problem of finding a filter

White noise 입력  $d(t)$  이  $h(t)$  와 컨볼루션 과정을 거쳐 예측된 출력  $\hat{x}(t)$  와 출력  $x(t)$  간의 error 를 최소화하는 과정으로 mean-square error 를 최소화 시켰을 때 다음 식을 구할 수 있다

$$E\{x(t)d^*(t-k)\} - \sum_{l=0}^{p-1} h(l)E\{d(t-l)d^*(t-k)\} \quad (11)$$

$$= E\left\{x(t) - \sum_{l=0}^{p-1} h(l)d(t-l) \right\} d^*(t-k) = 0$$

(11)에 Wiener-Hopf 식을 적용하면 다음과 같은 식을 유도 할 수 있다.

$$\sum_{l=0}^{p-1} h(l)R_d(k-l) = r_{dx}(k) ; k=0,1,L, p-1 \quad (12)$$

(12)을 더 간결히 표현하면

$$R_d^r h = r_{dx}^r \quad (13)$$

여기서  $R_d$  는  $k \times k$  Hermitian Toeplitz 매트릭스의 입력 autocorrelation,  $r_{dx}$  는 입력과 출력간의 cross-correlation 벡터 그리고  $h$  는 최적화된 임펄스 응답 벡터이다. 최종적으로 최적화된 임펄스 응답 벡터는 다음과 같다.

$$h^r = R_d^{-1} r_{dx}^r \quad (14)$$

최적화된 임펄스 응답은 기존 ITD 알고리즘에서 사용된 임펄스 응답 함수(IRF)를 대신 할 수 있다. 기존 ITD 알고리즘과 Wiener ITD 알고리즘 그리고 Polyreference Least Square Complex Exponential (PLSCE)알고리즘의 결과에 대해 다음 파트에서 살펴보겠다. 여기서 PLSCE 알고리즘은 Time domain method 의 참고로 추가 비교 하였다.

### 3. 실험 결과 분석

LSV 를 이용해 얻은 철자의 실험 데이터를 LSV, ITD, Wiener ITD, PLSCE 알고리즘에 각각 적용하여 결과를 얻었고 그 결과를 비교 분석 하였다.

Table 1 Damping ratio of steel ruler (for wiener ITD)

Damping ratio (%)				
	LSV	LSV_ITD	W. ITD	PLSCE

2 <sup>nd</sup>	1.7432	12.5	8.9	9.04
3 <sup>rd</sup>	2.9761	4.9	3.5	3.86
4 <sup>th</sup>	0.7501	1.4	1.7	1.85
5 <sup>th</sup>	0.5141	0.5	0.5	31.31
6 <sup>th</sup>	0.6008	0.5	0.3	0.29
7 <sup>th</sup>	0.314	0.4	0.2	0.26
8 <sup>th</sup>	0.3245	0.9	0.3	0.52
9 <sup>th</sup>	0.2733	6.1	0.8	10.82
10 <sup>th</sup>	0.2733		5.8	

비교 결과 고유진동수 부분에 대해 차이가 거의 없었으나 감쇠비 부분에서 Wiener ITD 결과가 다른 결과들보다 더 작은 감쇠비 값을 추정해 내고 있다. 또한 PLSCE 의 5<sup>th</sup> 와 9<sup>th</sup> 결과를 제외한 나머지 부분과 거의 유사한 값을 추정할 것을 근거로 Wiener ITD 가 더 정확한 결과를 추정하고 있음을 나타내고 있다. 추가로 모드형상의 경우 Modal Assurance Criterion (MAC)을 통해 확인하였다.

Table 2. MAC of steel ruler (LSV & Wiener ITD)

Wiener ITD \ LSV	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$	$\omega_8$	$\omega_9$	$\omega_{10}$
$\omega_2$	0.997	0.005	0.006	0.002	0.006	0.020	0.009	0.002	0.006
$\omega_3$	0.003	0.967	0.000	0.015	0.002	0.005	0.006	0.004	0.008
$\omega_4$	0.006	0.001	0.998	0.012	0.003	0.014	0.004	0.011	0.003
$\omega_5$	0.003	0.006	0.007	0.996	0.010	0.005	0.005	0.002	0.008
$\omega_6$	0.008	0.007	0.004	0.004	0.994	0.001	0.005	0.006	0.005
$\omega_7$	0.005	0.006	0.009	0.005	0.005	0.812	0.005	0.002	0.006
$\omega_8$	0.008	0.008	0.005	0.008	0.008	0.003	0.997	0.000	0.007
$\omega_9$	0.005	0.006	0.010	0.004	0.005	0.011	0.007	0.990	0.002
$\omega_{10}$	0.008	0.013	0.006	0.007	0.004	0.006	0.014	0.008	0.995

Wiener ITD 결과와 LSV 결과(FRF)가 거의 일치 함을 나타낸다.

### 4. 결론

본 논문은 Ibrahim time domain (ITD) 알고리즘의 이론적인 배경 지식을 소개 하였고, 비 접촉식 레이저 측정장비인 Laser Scanning Vibrometer (LSV)의 실험데이터를 ITD 알고리즘에 적용시켜 보았다. 여기에 Wiener Filer 를 접목시킴으로 Wiener-ITD 알고리즘을 통해 더 정확한 동적 특성을 추정할 수 있음을 보였다.

### 참고문헌

- [1] Gaetan Kerschen -Jean-Claud Golinval., "Experimental Modal Analysis,"
- [2] D.J. Ewins., "Modal Testing: Theory, Practice and Application." Baldock: Research Studies Press LTD, 2<sup>nd</sup> edition.
- [3] MONSON H. HAYES., "STATISTICAL DIGITAL SIGNAL PROCESSING AND MODELING." JOHN WILEY & SONS, INC.
- [4] Hwansic Kim., "Development of Experimental Modal Analysis for LSV," M.S.Thesis, GIST, Korea 2005.