σ-좌표계 기반의 혼합 모형과 Boussinesq Equations 모형의 연계

A Sigma-Coordinate Scalar Transport Model Coupled with Boussinesq Equations

김대홍*, 패트릭 라이넬**

Dae-Hong Kim, Patrick Lynett

요 지

본 연구에서는 σ-좌표계를 기반으로 하는 3차원의 이송확산 모형과 depth-integrated eddy simulation 모형을 결합한 효율적인 3차원 근역 (near-field) 해석모형을 제시하였다. 흐름 모형은 Boussinesq-type equations과 stochastic backscatter model을 기본으로 하고 있다. 이 흐름 모형은 수면의 변화와 바닥으로부터 발생하는 전단력과 파랑의 유동으로부터 발행하는 수심방향의 유속분포를 예측할 수 있다. 이와 같은 흐름 정보를 3차원 σ-좌표계의 이송확산모형에 제공하고 scalar의 이송과 확산에 대한 거동을 계산한다. 기본적인 이송과 이송-확산에 대한 검증 및 개수로에서 정량적 검증과 정성적 검증을 수행하였다. 전반적으로 타당한 결과가 도출되어 모형의 적합성이 있음을 확인하였다.

핵심용어 : σ-좌표계, 이송-확산, near-field mixing, depth-integrated eddy simulation

1. 서론

물을 따라 흐르는 물질의 이송과 확산현상을 예측하는 것은 매우 중요하다. 그 방법에는 일반적으로 해석적 방법, 현장 관측 및 수치모형을 이용하는 방법이 있다. 이와 같은 기법은 각각의 장단점이 있으나, 매우 복잡한 자연의 현장조건을 시시각각으로 반영하기에, 해석적 기법과 관측을 적용하는 것은 매우 어려운 일이다. 따라서 수치해석 기법은 대규모 영역이나 복잡한 조건을 지니는 자연에서의 이송-확산 현상을 연구하고 예측하기에 유용한 방법이 될 수 있다. 대규모 영역의 흐름과 이송-확산의 예측을 위해서 Navier-Stokes 방정식을 수심평균한 천수방정식과 3차원 이송-확산 방정식을 수심평균한 수심평균-이송확산방정식을 이용하는 것이 일반적이다. 그러나 흐름이 동수압의 효과가 중요하거나 분산효과의 영향이 커지는 경우에 이와 같은 수심평균 모형은 정확한 흐름 양상을 모의 할 수 없고, 이는 물질의 이송과 확산 예측에 영향을 주게 된다. 이와 같은 경우에 가장 정확한 수치해석 방법은 3차원의 Navier-Stokes 방정식을 이용하여 흐름을 해석하고 그 결과를 이용하여 물질의 이송과 확산을 해석하는 것이다. 그러나 대규모 영역을 대상으로 하는 경우, 컴퓨터 용량의 제한 등으로 인하여, 실용적인 이용에는 아직 제한이 있다.

수심이 깊지 않은 경우 (shallow or intermediate water depth), Boussinesq-type equations 모형을 이용하여, 약분산형이며 회전성(rotation) 및 난류특성을 지닌 흐름을 상대적으로 효율적으로 모의 할 수 있다 (Kim et al., 2009). 이에 추가적으로 Kim and Lynett (submitted)은 난류혼합과 이송확산에 대한 subgrid scale turbulent fluctuation 효과를 고려하는 모형 (depth-integrated eddy simulation)을 제시하였다. 이들 모형은 수위변동과 3차원의 유속정보를 구할 수 있어, 3차원의 σ-좌표계의 이송-확산모형과 연계될 수 있다. 결과적으로 효율적인 흐름과 이송-확산에 대한 연계모형이 구축 될 수 있다. 본 연구에서는 이와 같은 내용을 다루었다.

* 정회원・서울시립대학교 공과대학 토목공학과 조교수・E-mail : dhkimhyd@uos.ac.kr
** Texas A&M University, Department of Civil Engineering, Associate Professor

2. σ-좌표계상의 이송-확산 방정식

물리적 공간 (t^*, x^*, y^*, z^*)에서의 이송-확산 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial C}{\partial t^*} + \frac{\partial Cu}{\partial x^*} + \frac{\partial Cv}{\partial y^*} + \frac{\partial Cw}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial x^*}\left(D_x \frac{\partial C}{\partial x^*}\right) + \frac{\partial}{\partial y^*}\left(D_y \frac{\partial C}{\partial y^*}\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(D_z \frac{\partial C}{\partial z^*}\right) \tag{1}$$

σ-좌표 공간(t, x, y, z)은 다음과 같이 정의 된다. (Blumberg and Mellor, 1983).

$$t = t^*, \quad x = x^*, \quad y = y^*, \quad \sigma = \frac{z^* + h}{H} \tag{2}$$

위와 같은 관계를 이용하여 불규칙한 모양의 물리적 공간이 직사각형 모양의 σ-좌표공간으로 변환하게 된다 (그림 1).

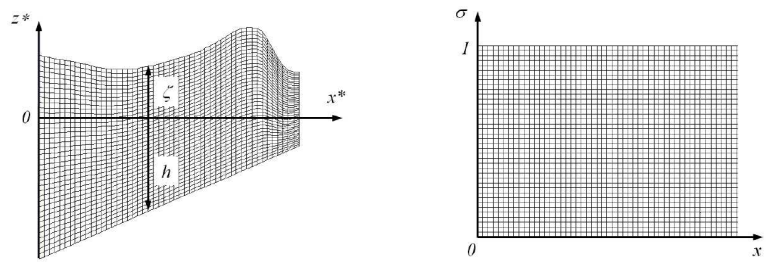

그림 1. 좌표계. 좌측: 물리공간 좌표계. 우측: σ-공간 좌표계

식의 변환을 위해 chain rule을 이용하면 최종적인 σ-좌표계의 이송확산 방정식은 다음과 같이 유도가 된다.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial uHC}{\partial x} + \frac{\partial vHC}{\partial y} + \frac{\partial w_\sigma HC}{\partial \sigma} \\
&= H\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + H\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{D_x}{H}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \sigma\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial C}{\partial \sigma}\right\} \\
&+ \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \sigma\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(D_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) \\
&+ \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \sigma\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial \sigma}\left\{\frac{D_x}{H}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \sigma\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial C}{\partial \sigma}\right\} \\
&+ H\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + H\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{D_y}{H}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \sigma\frac{\partial H}{\partial y}\right)\frac{\partial C}{\partial \sigma}\right\} \\
&+ \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \sigma\frac{\partial H}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(D_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) \\
&+ \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \sigma\frac{\partial H}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial \sigma}\left\{\frac{D_y}{H}\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \sigma\frac{\partial H}{\partial y}\right)\frac{\partial C}{\partial \sigma}\right\} \\
&+ \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(D_z \frac{\partial C}{\partial \sigma}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

여기서 w_σ는 다음과 같이 주어진다.

$$w_\sigma = -\frac{\sigma}{H}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{u}{H}\frac{\partial h}{\partial x} - u\frac{\sigma}{H}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{v}{H}\frac{\partial h}{\partial u} - v\frac{\sigma}{H}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{w}{H} \tag{4}$$

3. σ-좌표계 이송-확산모형을 위한 수치해석기법

유한체적법 (finite volume mothod)을 이용하여 방정식을 해석하였다. 구체적으로 이송항의 해석을 위해서는 4차정확도의 MUSCL TVD scheme을 이용하였다. 확산항의 해석을 위해서도 4차정확도 유한체적 기법을 이용하였다. 시간항에 대하여는 3차정확도의 Adams-Bashforth predictor 기법과 4차정확도의 Adams-Moulton corrector 기법을 이용하였다.

4. Depth-Integrated Eddy Simulation 모형

비회전흐름 (irrotational flow)을 가정으로 하는 일반적인 완전비선형 Boussinesq-type equations 모형에, 3차원의 vorticity 효과를 추가함으로써, 회전흐름 (rotational flow)의 예측이 가능하다(Kim et al. 2009). 이는 개수로 흐름에서 연직방향의 유속분포를 타당하게 모의 할 수 있음을 의미한다. 또한 Kim and Lynett (submitted)는 흐름과 장파에 의해 발생하는 난류혼합과 이송확산에 대한 subgrid scale turbulent fluctuation 효과를 고려하는 모형 (depth-integrated eddy simulation)을 제시하였다. 이에 대한 지배방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H U_{\alpha i}}{\partial x_i} + \mathcal{M} + \mathcal{M}^\nu = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H U_{\alpha i}}{\partial t} + \frac{\partial H U_{\alpha i} U_{\alpha j}}{\partial x_j} + gH\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \\
&\quad + H\left(D_i + \overline{\xi_i} + D_i^\nu + \overline{\xi_i^\nu}\right) + U_{\alpha i}\left(\mathcal{M} + \mathcal{M}^\nu\right) \\
&\quad - H\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu_t^h S_{ij}\right) + 2H\nu_t^v\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial U_{\alpha j}}{\partial x_j}\right) \\
&\quad + \frac{\tau_i^b}{\rho} - HR_i - HF_i = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

각 항에 대한 자세한 설명은 참고문헌에 수록되어 있다. 본 모형으로부터 계산 된 $(\zeta, U_\alpha, V_\alpha)$를 기반으로 하여 임의의 표고 z에서의 유속은 다음 식을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
u = U_\alpha &+ \frac{1}{2}\left(z_\alpha^2 - z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\right) \\
&+ (z_a - z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h U_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial h V_\alpha}{\partial y}\right) \\
&+ \psi_x\left\{\frac{1}{2}\left(z_\alpha^2 - z^2\right) + \zeta\left(z - z_\alpha\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = V_\alpha &+ \frac{1}{2}\left(z_\alpha^2 - z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\right) \\
&+ (z_a - z)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h U_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial h V_\alpha}{\partial y}\right) \\
&+ \psi_y\left\{\frac{1}{2}\left(z_\alpha^2 - z^2\right) + \zeta\left(z - z_\alpha\right)\right\}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$w = -z\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y}\right) \tag{7}$$

5. 수치모형의 연계 및 검증

위에서 구한 (ζ, u, v, w_σ)을 식 (3)에 대입하여 매우 간단히 두 모형을 연계 할 수 있다. 연계모혀으이 검증을 위하여 Nokes and Wood (1988)가 개수로에서 수행한 이송-확산 실험결과를 수치해석기법을 이용하여 재현하였다. 그림 2는 어느 순간에서의 물질의 상대 농도를 나타 낸 것이다. 그림2와 같이, 한 점에서 방류된 물질이 하류로 흘러가며, 포물선형을 이루고, 상하로 확산 되어가는 하천에서의 'dispersion' 현상을 물리적으로 타당하게 모의 하고 있다. 그림 3은 방류지점의 하류부에서 계측된 농도와 수치해석 결과를 비교한 결과로써, near-field와 far-field 모두에서 정량적으로도 매우 정확한 예측을 할 수 있음을 보여주고 있다.

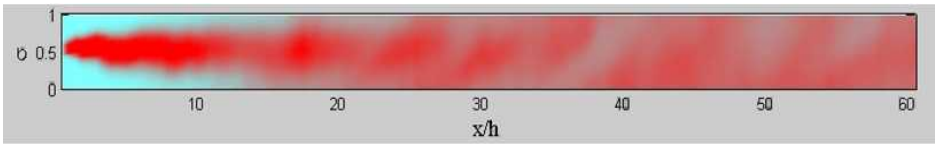

그림 2. 수치해석 결과: 순간적인 상대 농도 분포

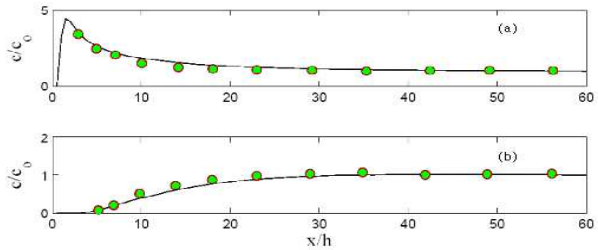

그림 3. 농도분포 결과 비교. 실선: 수치해석 결과, 원: 계측치

이 외에도 그림 4와같이 파랑이 존재하는 수로의 흐름에 대하여도, 정성적인 검증을 수행한 결과, 물리적으로 타당한 결과를 얻을 수 있었다.

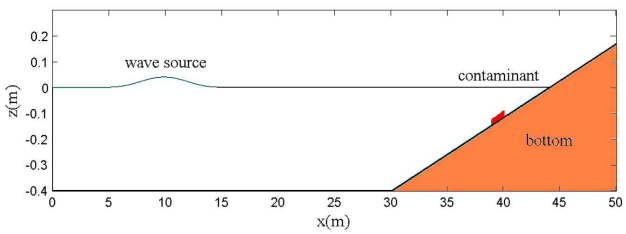

그림 4. 수치모의 수로 모식도

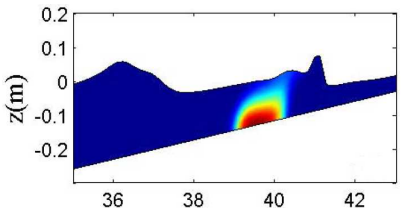

그림 5. 수치해석 결과: 농도 분포

5. 결론

지면의 제한으로 인하여 보다 다양한 검증 과정에 대한 기술을 생략하였지만, 개발된 연계모형은 효율적으로 개수로 및 해안지역에서의 흐름과 이로 인한 이송-확산해석을, near-field와 far-field 모두에서, 물리적이고 정량적으로 타당하게 모의 할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Blumberg, A.F., Mellor, G.L. (1983) Diagnostic and Prognostic Numerical Circulation Studies of the South Atlantic Bight. Journal of Geophysics Research, vol.88, pp.4579-4592.
2. Kim, D.H., Lynett, P.J. (submitted). Turbulent Mixing and Scalar Transport 454 by Long Waves and Currents.
3. Kim, D.H., Lynett, P.J., and Socolofsky, S. (2009). A Depth-Integrated Model for Weakly Dispersive, Turbulent, and Rotational Fluid Flows, Ocean Modelling, vol.27, pp.198-214.
4. Nadaoka, K., and Kondoh, T. (1982) Laboratory of Measurements of Velocity Structure Field in the Surf Zone by LDV, Coastal Engineering Journal, vol.25, pp.125-145.
5. Nokes, R.I. and Wood, I.R. (1988) Vertical and Lateral Turbulent Dispersion : Some Experimental Results, Journal of Fluid Mechanics, vol.187, pp.373-394.
6. Ting, F.C.K. and Kirby, J.T. (1994) Observation of Undertow and Turbulence in a Laboratory Surf Zone, Coastal Engineering, vol.24, pp.51-80.