

모델차수축소기법을 이용한 회전체의 동해석

Dynamic Analysis of Rotating Bodies Using Model Order Reduction

한정삼†
Jeong Sam Han

Key Words : Rotordynamics(회전체동역학), Model order reduction(모델차수축소법), Campbell diagram(캠벨선도), Critical speed(위험속도)

ABSTRACT

This paper discusses a model order reduction for large order rotor dynamics systems results from the finite element discretization. Typical rotor systems consist of a rotor, built-on parts, and a support system, and require prudent consideration in their dynamic analysis models because they include unsymmetric stiffness, localized nonproportional damping and frequency dependent gyroscopic effects. When the finite element model has a very large number of degrees of freedom because of complex geometry, repeated dynamic analyses to investigate the critical speeds, stability, and unbalanced response are computationally very expensive to finish within a practical design cycle. In this paper, the Krylov-based model order reduction via moment matching significantly speeds up the dynamic analyses necessary to check eigenvalues and critical speeds of a Nelson-Vaugh rotor system. With this approach the dynamic simulation is efficiently repeated via a reduced system by changing a running rotational speed because it can be preserved as a parameter in the process of model reduction. The Campbell diagram by the reduced system shows very good agreement with that of the original system. A 3-D finite element model of the Nelson-Vaugh rotor system is taken as a numerical example to demonstrate the advantages of this model reduction for rotor dynamic simulation.

1. 서 론

회전체 동역학의 운동방정식을 정지 참조 프레임(stationary reference frame)에 대하여 유한요소해석의 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다⁽¹⁾.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{B})\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^N$ 은 시간 t 의 함수인 상태변수벡터, $\mathbf{f}(t)$ 은 입력, 그리고 행렬 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ 는 각각 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬이다. 행렬 \mathbf{G} 와 \mathbf{B} 는 회전속도에 의존적으로 각각 자이로스코픽행렬(gyroscopic) 및 회전댐핑(rotating damping)행렬을 의미한다.

식(1)에 대한 고유치 문제는 다음과 같이 2차 고

유치 문제(quadratic eigenvalue problem)로 표현된다.

$$(\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} + \lambda \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (2)$$

where $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}, \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{G}, \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{B}$

여기서 복소고유치 $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ 로 실수부(α_i)는 진폭의 감쇠율, 허수부(β_i)는 감쇠고유진동수를 나타낸다. 식(2)로 주어진 2차 고유치 문제를 변위 공간에서 그대로 풀기는 어려우므로 아래 식과 같이 상태 공간 고유치 문제로 변환한다.

$$\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \mathbf{p}, \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi} \lambda \end{Bmatrix} \quad (3)$$

이러한 변환은 전체 시스템의 자유도를 두 배로 증가시키므로 계산비용을 증가시키게 되므로 효율적인 계산을 위한 축소기법이 요구된다.

2. 본 론

모델차수축소법의 기본 개념은

† 한정삼: 정회원, 안동대학교 기계설계공학과
E-mail : jshan@andong.ac.kr
Tel : 054-820-6218, Fax :

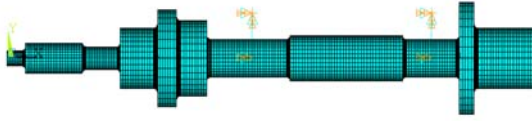


Fig. 1 FE mesh of a Nelson-Vaugh rotor

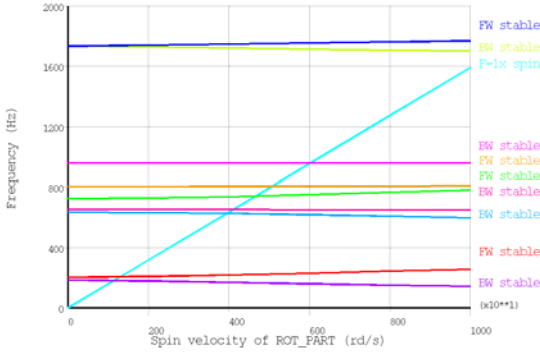


Fig. 2 Campbell diagram for the Nelson-Vaugh rotor

$$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{V}\mathbf{z}(t) \text{ where } \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n, n \ll N \quad (4)$$

의 관계를 만족하는 변환행렬 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ 을 통하여 초기 시스템의 큰 자유도의 상태변수벡터 $\mathbf{x}(t)$ 의 응답을 작은 자유도로 구성된 축소 시스템의 상태변수벡터 $\mathbf{z}(t)$ 로 근사화하는 것이다. 이후에 식 (1)의 이차 시스템을 \mathbf{V} 의 부공간에 투영(projection)시키고, 이 식의 양변에 \mathbf{V} 의 전치행렬을 곱하면 식 (1)과 동일한 형태를 지닌 이차 축소 시스템을 구할 수 있다^(2,3).

$$\tilde{\mathbf{M}}_r \ddot{\mathbf{z}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}_r \dot{\mathbf{z}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}_r \mathbf{z}(t) = \mathbf{f}_r(t) \quad (5)$$

여기서 축소행렬

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_r &= \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{V} \\ \tilde{\mathbf{C}}_r &= \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{V} \\ \tilde{\mathbf{K}}_r &= \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{V} \\ \mathbf{f}_r &= \mathbf{V}^T \mathbf{f} \end{aligned} \quad (6)$$

로 각각 표현되며, 만약 변환행렬 \mathbf{V} 를 모멘트 일치법에 따라서

$$\begin{aligned} \text{colspan}\{\mathbf{V}\} &= \mathfrak{K}_n(-\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{f}) \\ &= \text{span}\{\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{f}, \dots, (-\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\tilde{\mathbf{M}})^{n-1}\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{f}\} \end{aligned} \quad (7)$$

로 결정하면 초기 시스템(1)과 축소 시스템(5)의 첫 n 번째까지의 모멘트는 서로 일치한다. 이를 식(3)에 적용하며 축소된 상태 공간 고유치 문제를 얻는다.

$$\lambda_r \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_r \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{K}}_r & -\tilde{\mathbf{C}}_r \end{bmatrix} \mathbf{q}, \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\varphi} \lambda_r \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서 $\boldsymbol{\varphi}$ 는 n -자유도의 모드벡터이다.

Table 1 Comparison of frequencies in rotation (1,000 rad/s)

Mode No.	Whirl	FOM	ROM	Error (%)
1	BW	142.69	142.69	0.001
2	FW	256.29	256.29	0.002
3	BW	598.55	598.61	0.009
4	BW	649.67	649.69	0.003
5	FW	781.99	782.06	0.010
6	FW	811.80	811.83	0.003

3. 결 론

ANSYS⁽⁴⁾를 이용하여 Fig. 1의 로터⁽¹⁾에 대한 Campbell 선도를 계산하였다(Fig. 2 참고). 초기모델의 자유도는 170,909이며 회전속도 1,000 rad/s 까지 초기 9개의 고유모드를 계산하였다. 이를 $n=60$ 의 축소모델을 이용하여 계산하여 회전속도가 1,000 rad/s인 경우에 대하여 그 일부 결과를 서로 비교하였다(Table 1 참고). FOM과 ROM의 결과는 매우 잘 일치하며 $n=60$ 축소모델로써 상대오차 0.01 % 이하로 복소수 고유진동수를 예측함을 확인할 수 있다.

후 기

이 논문은 2009학년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2009-0087705).

참 고 문 헌

- (1) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., 1976, The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, J. of Eng. for Industry, pp. 593~600.
- (2) Han, J. S. and Ko, J. H., 2009, Frequency Response Analysis of Array-Type MEMS Resonators by Model Order Reduction Using Krylov Subspace Method, Transactions of the KSME A, Vol. 33, No. 9, pp. 878~885.
- (3) Han, J. S., 2007, Eigenvalue and Frequency Response Analyses of a Hard Disk Drive Actuator Using Reduced Finite Element Models, Transactions of the KSME A, Vol. 31, No. 5, pp. 541~549.
- (4) ANSYS, 2007, ANSYS Theory Reference 11.0, SAS IP, Inc.