

Sanders 이론을 사용한 부분적으로 몰수된 고정-자유 실린더 쉘의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of a Partially Submerged Clamped-Free Cylindrical Shell Using Sanders Theory

허유* · kwak문규† · 양동호* · 구재량** · 배춘희**

Ru He, Moon K. Kwak and Dong-Ho Yang, Jae R. Koo, Bae Chun Hee

1. 서론

화력발전소에서 사용하는 수중펌프는 연직 방향으로 거꾸로 매달린 실린더 쉘 구조물인데 물을 끌어올리기 위해 부분적으로 물속에 몰수되어 있다. 수중 펌프가 화력 발전소에서 운용될 때 조석 간만의 차에 의해 수중 펌프 구조물의 고유진동수가 변화됨이 보고되었다. 특히 물의 특정 높이에서 진동 크기가 커지는 것이 관찰되어 부가수 질량 효과로 인해 실린더 쉘의 고유진동수가 변화되는 것이 그 원인인 것으로 판단되었다. 이런 현상을 규명하기 위한 선행 연구에서는 몰수 깊이에 따라 고유진동수가 크게 변화함이 이론적으로 규명되었다. 선행 연구에서 발표하였듯이 실린더 쉘의 동적 모델링 방법에 대해서는 다양한 이론이 존재한다. 가장 간단한 이론은 Donnell-Mushtari 이론인데 본 연구에서는 좀 더 개선된 형태의 이론인 Sanders 이론을 이용하고 Rayleigh-Ritz 방법을 이용해 실린더 쉘의 모델을 유도하였다. 구조물의 진동을 유체와 결합시키기 위해 지배방정식인 Laplace 방정식을 이용해 경계치 문제를 정식화 하여 유체의 영향을 해석하였다.

본 연구에서는 고정-자유 원통형 쉘 구조물에 대해 Sanders 의 쉘 이론 식을 사용하고 Rayleigh-Ritz 방법을 이용해 물 수위변화에 따른 고유진동 해석을 수행하였다. 수치 결과는 물의 깊이에 따라 고유진동수가 크게 변화함을 보여준다.

2. Sanders 쉘 이론

Sanders 쉘 이론을 이용하여 얇은 쉘에 대한 고유진동해석을 하기 위해서 Rayleigh-Ritz 방법을 사용한다. 이를 위해 실린더 쉘의 운동에너지와 탄

성에너지가 필요한데 먼저 실린더 쉘의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R dz d\theta dx \quad (1)$$

여기서 ρ 는 실린더 쉘의 질량밀도이다. 실린더 쉘의 탄성에너지를 구하기 위해서는 응력과 변형률 계식이 필요한데 얇은 실린더 쉘의 경우 다음과 같이 가정한다.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) \quad (2a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x) \quad (2b)$$

$$\sigma_{x\theta} = \sigma_{\theta x} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{x\theta} \quad (2c)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0 \quad (2d)$$

여기서 E 는 영의 계수, ν 는 Poisson 비이다. 변형률과 변위의 관계식은 Sanders 이론에 근거하면 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} - \frac{z}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (3b)$$

$$\epsilon_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2z \dots \left(\frac{1}{4R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{3}{4R} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \quad (3c)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{\theta z} = \epsilon_{zz} = 0 \quad (3d)$$

탄성에너지는 다음과 같이 표현된다

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \sigma_{x\theta} \epsilon_{x\theta}) R dx d\theta dz \quad (4)$$

식 (2)와 (3)을 이용하고, 각 방향 변위에 대해 허용함수와 일반좌표를 도입해 표현하면 n 번째 원주

† 교신저자; 정회원 동국대학교 기계공학과

E-mail : kwakm@dongguk.edu

Tel : (02)2260 -3705, Fax : (02) 2263-9379

* 동국대학교 대학원 기계공학과

** 한국전력공사 전력연구원

방향 모드와 관련된 운동에너지와 탄성에너지가 다음과 같이 유도된다.

$$T_{sn} = \frac{1}{2} \left(\dot{q}_{m_u}^T M_{m_u} \dot{q}_{m_u} + \dot{q}_{m_v}^T M_{m_v} \dot{q}_{m_v} + \dot{q}_{m_w}^T M_{m_w} \dot{q}_{m_w} \right) \quad (5)$$

$$V_{sn} = \frac{1}{2} \dot{q}_{m_u}^T K_{m_u} q_{m_u} + \frac{1}{2} \dot{q}_{m_v}^T K_{m_v} q_{m_v} + \frac{1}{2} \dot{q}_{m_w}^T K_{m_w} q_{m_w} + \dot{q}_{m_u}^T K_{m_{uv}} q_{m_v} + \dot{q}_{m_v}^T K_{m_{vw}} q_{m_w} + \dot{q}_{m_u}^T K_{m_{uw}} q_{m_w} \quad (6)$$

3. 유체-구조 연성

그림 1 과 같이 고정-자유 실린더 셸이 부분적으로 물수되어 있는 경우를 고려해 보자.

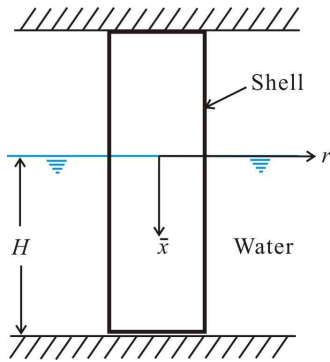


Fig 1. Cylindrical Shell Partially Immersed in Water

외부 및 내부 유체에 대해 Laplace 방정식에 대한 경계치 문제를 해석하면 실린더 셸과 연성된 유체의 운동에너지가 다음과 같이 표현된다.

$$T_{fn} = \frac{1}{2} \dot{q}_{n_w}^T M_{f_{wn}} \dot{q}_{n_w} \quad (7)$$

따라서 n 번째 원주 방향모드에 대한 총 운동에너지는 셸의 운동에너지와 유체의 운동에너지를 합한 것으로 나타나는데 다음과 같이 표현된다.

$$T_n = T_{sn} + T_{fn} \quad (8)$$

$$T_n = \frac{1}{2} \rho R h L \pi \left[\dot{q}_{m_u}^T M_{m_u} \dot{q}_{m_u} + \dot{q}_{m_v}^T M_{m_v} \dot{q}_{m_v} + \dot{q}_{m_w}^T \left(M_{m_w} + \frac{\gamma \delta}{a} \bar{M}_{f_{wn}} \right) \dot{q}_{m_w} \right] \quad (9)$$

고유치문제는 다음과 같이 귀결된다.

$$\left[K_n - \bar{\omega}_{fn}^2 \left(M_a + \frac{\gamma \delta}{a} M_f \right) \right] q_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

여기서 $\bar{\omega}_{fn} = \omega_{fn} \sqrt{\rho(1-v^2)} L^2 / E$ 는 유체와좌한 경우의 무차원화된 고유진동수를 나타낸다.

3. 고유진동 해석

수치계산을 위해 다음과 같은 실린더 셸 구조물을 고려하였다. $L=478\text{mm}$, $R=52.7\text{mm}$, $h=1.1\text{mm}$, $\nu=0.3$, $\rho=2770 \text{ kg/m}^3$, $E=70 \text{ GPa}$, 이 값을 이용해 계산한. 그림 2,3 에서는 이론 수치계산으로 구한 1 차고유 진동수와 2 차 고유진동수를 각각 보여주고 있다. 위의 결과에서 알 수 있듯이 각 원주방향 모드 1 차 고유진동수는 물의 높이가 작더라도 크게 변화함을 알 수 있다. 물의 높이가 셸 길이의 반정도가 되면 고유진동수의 변화는 크지 않음을 알 수 있다.

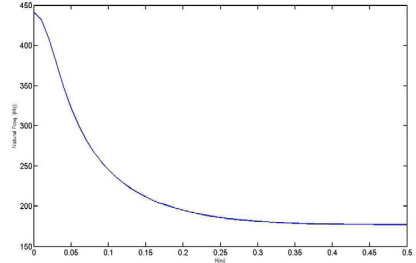


Fig 2. First natural frequency vs water depth

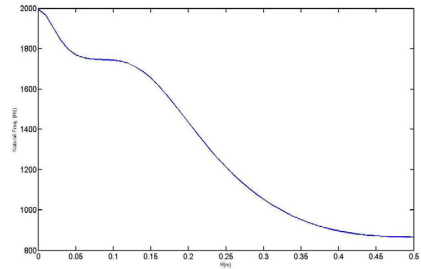


Fig 3. Second natural frequency vs water depth

4. 토의 및 결론

본 연구에서는 부분적으로 물수된 고정-자유 실린더 셸의 물의 깊이에 따른 고유진동수 변화를 Sanders 이론과 Rayleigh-Ritz 방법, 그리고 Laplace 방정식을 이용한 경계치 문제의 해를 이용해 분석하였다. 이론 해석 결과로 부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 물의 높이가 커짐에 따라 고유진동수가 급격하게 변화한다. 특히, 높이가 작은 경우에 더 큰 변화가 일어난다.

(2) 수중에서의 고유진동모드는 물의 높이에 따라 변화하는 정도가 다르게 나타난다. 특히, 부분 물수된 경우 고유진동모드가 크게 변한다.