

## CIP-CSL2법에 의한 다상유동 경계포획 시뮬레이션

임효남<sup>1\*</sup>

### Interface-tracking simulation of multi-phase flow using CIP-CSL2 scheme

H.N Im

*In this study, it is performed numerical simulation on multi-phase flow by means of CIP-CSL2 scheme. It is applied to a two-phase free surface flow problem at a high density ratio equivalent to that of an air-water system, for examining the computational capability. The method that is being developed and improved is a CIP(Constrained Interpolation Profile) and CSL2(Conservative Semi-Lagrangian) based Cartesian Grid Method.*

**Keywords :** CIP법, CSL2법, CCUP법, surface tracking, multi-phase

### 1. 서론

유동의 수치해석에서 대류방정식의 해법은 수치 진동과 수치 확산등의 오차가 생기기 쉬운 해석으로 주의를 기울여 해석하여야 하는 협상중의 하나이며 많은 고정도의 해법이 제안되어 왔다. 최근, 고정도 해법중의 하나로서 3차정도를 가지는 해법인 CIP법이 주목 받고 있다. CIP법은 2점의 값과 미분치를 이용하는 Hemit 보간의 형태로 2점간의 값을 구하는 수법이다. CIP법은 명확한 원리와 간단한 계산 격자등 많은 장점이 있고 이러한 장점들로 인하여 많은 변형과 확장이 존재한다. CIP법 자체는 비보준형의 형태이므로 이를 보준형 방정식으로 변환하여 보준성이 뛰어난 형태로 변형한 보준형 스킵이 CIP-CSL 법이다. 보준형 CIP법에도 다양한 변형이 존재하며 계수의 이용방법에 따라 CIP-CSL4, CIP-CSL2, CIP-CSL3 등이 있다. 그 중에서 CSL2는 값의 적분치와 값(미분치)을 사용하여 연속조건을 만족시키도록 보간함수를 구성하며 이는 CIP법에서의 값과 미분치를 이용하여 보간함수를 구성하는 것과 그 형태가 동일하다. CSL2법은 보간함수의 구성이 쉽고 메모리사용이 비교적 적기 때문에 보준형 해법으로서 자주 사용되고 있다.

본 논문에서는 CIP-CSL2법의 보준성에 대한 검토를 수행하고 다상 유동의 경계포획 시뮬레이션을 수행하여 보존이 보증되는 수치해법으로서 CIP-CSL2법을 소개한다.

### 2 수치해석 수법

#### 2.1 CIP법(Cubic Interpolated Pseudo Particle Method/Constrained Interpolation Profile Method)

1 정희원, 삼성중공업 조선해양연구소

\* Corresponding author E-mail: hn.im@samsung.com

함수  $f(x, t)$ 에 대하여 식(1)과 같은 1차원 대류방정식을 이용하여 CIP법에 대하여 설명한다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

식(1)은 단순한 파의 전파를 의미하며 속도가 일정한 경우 이 방정식의 해는 일려진 바와 같이 식(2)와 같이 표현할 수 있다.

$$f(x, t) = f(x - ut, 0) \quad (2)$$

실제의 계(系)에서 속도  $u$ 는 공간좌표  $x$ , 시간  $t$ 에 대하여 변화하지만 매우 짧은 시간  $dt$ 에 대하여 각 격자점  $x_i$  상의 속도  $u_i$ 는 일정하다고 볼 수 있다. 따라서 식(2)를 이용하여 근사적으로 식(3)으로 나타낼 수 있다.

$$f(x, t + dt) \equiv f(x - u dt, t) \quad (3)$$

즉 Fig 1에 나타낸 바와 같이 어떠한 시간  $t$ 에서 격자점  $x_i$  상의 물리량을 알고 있다면  $dt$  후의 물리량은 식(3)으로 구할 수 있게 된다.

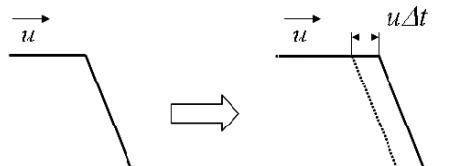


Fig 1 Advection of physical property

CIP법은 값  $f$  와 공간 미분계수  $g = \partial f / \partial x$  를 사용하는 Hermit 보간을 사용한다. 식(1)의 공간 미분치는 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} g \quad (4)$$

여기서  $g$  는  $f$  의 미분계수이다.

공간상 2개의 포인트에 대하여 식(5)~식(6)의 조건으로 3차 다항식을 취하면 식(7)~식(8)와 같이 나타낼 수 있다.

$$f_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (5)$$

$$f_i(x_i) = f_i, df_i(x_i)/dx = g_i$$

$$f_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, df_i(x_{i-1})/dx = g_{i-1} \quad (6)$$

$$f_i^{n+1} = a_i X^3 + b_i X^2 + g_i^n X + f_i^n$$

$$g_i^{n+1} = 3a_i X^2 + 2b_i X + g_i^n \quad (7)$$

$$A_i = \frac{g_i + g_{iup}}{D_2} + \frac{2(f_i - f_{iup})}{D_3}$$

$$B_i = \frac{3(f_{iup} - f_i)}{D_2} + \frac{(2g_i + g_{iup})}{D} \quad (8)$$

여기서  $X = -udt$  이며 상류점의 인덱스  $iup$  은  $iup = i - sign(u_i)$ 이며, 격자간격은  $D = -dx \times sign(u_i)$  이다.  $sign(u_i)$  는  $u_i$  의 부호에 따라 +1 혹은 -1을 되돌려 주는 함수로서 식(9)와 같은 Fortran code 로 표기할 수 있다.

```

if(u_i >= 0)then
    sign(u_i) = 1
else
    sign(u_i) = -1
endif

```

(9)

식(7)과 같은 이산 다항식을 사용하여  $\Delta t$  후의 값과 미분치를 구하여 Navier-Stokes방정식의 대류항 계산과 같은 대류현상의 고정도 해법으로 사용한다.

## 22 CSL2법 (Conservative Semi-Lagrangian 2 order)

통상의 CIP법은 비보존형 차분으로서 일반적인 비보존형 차분에 비하여 보존성은 우월하지만 비보존형 방정식이기 때문에 엄밀한 의미에서의 보존은 보증되지 않는다. 최근 보존 보증형 CIP법이 제안되어 있고 대표적으로 CSL4, CSL2등이 있다. 본 논문에서는 CSL2를 이용하여 Multi-phase의 경계포획 시뮬레이션을 수행하여 고정도의 CIP법과 보존 보증형 CSL2법의 조합으로 고차정도 다상유동 해법을 소개하고자 한다. 본 절에서는 CSL2에 대하여 서술한다. 1차원의 대류방정식을 식(10)과 같이 나타내면 이는 식(1)과 동일한 형태의 간단한 방정식으로 생각 할 수 있다.

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

CIP법은 값과 미분치로 이루어진 Hermit 보간의 형태를 기본적인 방정식의 형태로 하므로 식(10)의 공간미분을 취하여 식(11)과 같이 나타낸다.

$$\frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{\partial D'}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

식(11)에서  $D' \equiv f (= \text{값})$ , 식(10)에서  $D = \int f dx$  로 두면 CIP법에서의 값과 미분치의 관계를 적분치와 값의 관계로 치환하여 생각할 수 있다. 통상 CIP법에서는 값  $f$  와 미분치  $\partial f / \partial x$  를 이용하여 3차 보간 함수를 만들지만 CSL2법은 값  $f$  와 적분치  $\rho = \int f dx$  를 이용하여 2차 함수를 구축한다. 이때 적분치  $\rho$  는 격자점의 중점에 정의한다. 값이 2차 함수 이므로 적분치의 함수는 3차 함수가 된다.

여기서,

$$D_i(x) = \int_{x_i}^x f(x') dx' \quad (12)$$

라고 두면

$$D_i(x) = A1_i X^3 + A2_i X^2 + f_i^n X \quad (13)$$

로 적분치를 3차 함수로 보간하면 그 미분에 대응하는 값의 함수는 식(14)와 같이 쓸 수 있다.

$$F_i(x) = \frac{\partial D(x)}{\partial x} = 3A1_i X^2 + 2A2_i X + f_i^n \quad (14)$$

여기서  $X = x_i - x$ 이다.

보간 함수  $D_i(x)$  의 연속조건은 CIP법과 비슷한 방법으로 식(15)와 같이 놓는다.

$$D_i(x_i) = 0, D_i(x_{iup}) = -sign(u_i) \rho_{icell}^n \\ \partial_x D_i(x_i) = f_i^n, \partial_x D_i(x_{iup}) = f_{iup}^n \quad (15)$$

여기서,  $\rho_{icell}^n$  은 상류측 격자내의 전질량 ( $icell = i - sign(u_i)/2$ ),  $iup = i - sign(u_i)$  이다. 따라서 계수를 식 (16)와 같이 나타낼 수 있다.

$$A1 = \frac{(f_i^n + f_{iup}^n)}{\Delta x \Delta x} + \frac{2sign(u_i) \rho_{icell}^n}{\Delta x \Delta x \Delta x} \\ A2 = \frac{2(f_i^n + f_{iup}^n)}{\Delta x} - \frac{2sign(u_i) \rho_{icell}^n}{\Delta x \Delta x} \quad (16)$$

여기서  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  이다.

### 2.3 시간발전의 정리

CIP법이 값  $f$  와 미분치  $\partial_x f$ 의 시간발전이 필요한 것처럼 CIP-CSL2법은 값  $f$  와 적분치  $\rho$ 의 시간발전이 필요하다. 따라서 식(17)과 같은 보존방정식을 CIP-CSL2법으로 풀 때는 다음의 sub-step 1~3을 따른다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

#### sub-step 1.

식(17)을 advection phase와 non-advection phase로 구분하여 식(18), (19)과 같이 시간 발전시킨다.

##### Advection phase

$$f_i^* = F(x_i - u dt) = 3A1\xi^2 + 2A2\xi + f_i^n \quad (18)$$

##### Non-advection phase

$$f_i^{n+1} = f_i^* + G_i dt, G_i = -f_i^* \partial u / \partial x \quad (19)$$

#### sub-step 2

적분치  $\rho$ 는 Fig 2와 같이 격자내의 질량의 유입출을 고려하면 되는 것임으로 식(20)과 같이 처리하면 된다.

$$\rho_{i-1/2}^{n+1} = \rho_{i-1/2}^n + (\Delta\rho_{i-1}^n - \Delta\rho_i^n) \quad (20)$$

$\Delta\rho_i^n$ 은 격자점 상의 질량유속을 나타내는 값이고 식(21)과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta\rho_i^n &= \int_{x_i + \xi}^{x_i} F(x') dx' = -D_i(x_i + \xi) \\ &= -(A1\xi^3 + A2\xi^2 + f_i^n \xi) \end{aligned} \quad (21)$$

#### sub-step 3.

sub-step 1, 2를 반복한다.

여기서,  $\xi = -u_i \Delta t$ 이다. 식(20), 식(21)은 각 격자간에서의 질량(적분치)의 유출입을 나타내는 것으로서 계산영역 전체에서 전체질량이 보존되어지는 것을 알 수 있다.

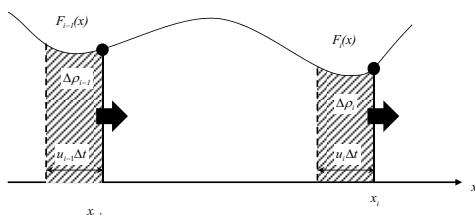


Fig. 2 미소시간 dt의 격자간 질량유입과 유출

### 2.4 디차원화

CIP-CSL2법을 디차원화 하는 방법으로서는 CIP법의 TYPE-M과 같은 Directional splitting 방법을 적용하는 것이 효과적이다. Directional splitting 법의 장점은 1차원 코드를 방향별로 분리 적용하여 디차원 공간에 대한 해석 코드를 생성하기 쉽다는 점이다. 예를 들어 식(22)와 같은 2차원 advection equation을 이용하여 간단히 소개한다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

2차원 확장에 대하여는 Fig 3과 같은 물리량의 정의가 필요하다.

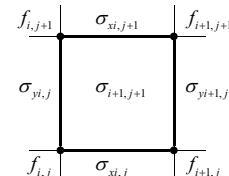


Fig. 3 CIP-CSL2의 물리량 정의 (x미분,  $\sigma_x$ , y미분,  $\sigma_y$  와 미분,  $\sigma$ )

여기서 각각의 선밀도와 밀도는 식(23)~(25)이다.

$$\sigma_{xi,j}^n = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y_i, t) dx \quad (23)$$

$$\sigma_{yi,j}^n = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y, t) dy \quad (24)$$

$$\sigma_{i,j}^n = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y, t) dxdy \quad (25)$$

식(16)~(20)의 수순(sub-step) 1.~ sub-step 3.)을 CIPCSL1D( $u, f^n, f^{n+1}, \rho^n, \rho^{n+1}, x$ )로 놓으면 2차원 CIP-CSL2법의 계산 수순은 다음과 같은 STEP1, STEP2와 같이 방향 분리형으로 계산할 수 있다.

**STEP1:**  $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0$

$$CIPCSL1D(u, f^n, f^{step1}, \sigma_x^n, \sigma_x^{step1}, x)$$

$$CIPCSL1D(\bar{u}, \sigma_y^n, \sigma_y^{step1}, \rho^n, \rho^{step1}, x) \quad (26)$$

$$\bar{u} = \frac{u_j + u_{j+1}}{2} \quad (27)$$

**STEP2:**  $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0$

$$CIPCSL1D(v, f^{step1}, f^{n+1}, \sigma_y^{step1}, \sigma_y^{n+1}, y)$$

$$CIPCSL1D(\bar{v}, \sigma_x^{step1}, \sigma_x^{n+1}, \rho^{step1}, \rho^{n+1}, y) \quad (28)$$



$$\bar{v} = \frac{v_{ij} + v_{i+1j}}{2} \quad (29)$$

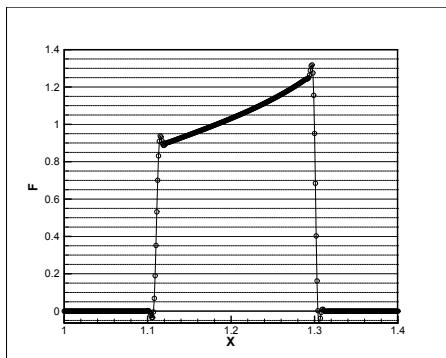
### 3 수치시뮬레이션

#### 3.1 One-dimensional CIP, CSL2 mass, density error, profile

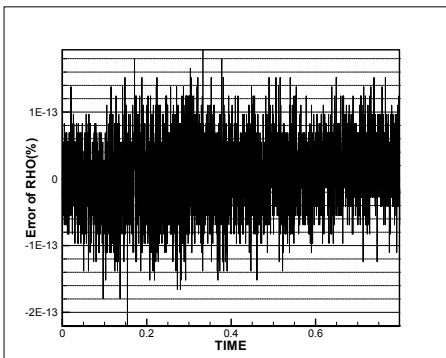
식(17)의 대류방정식을 식(30)과 같은 유속 분포에 대하여 각각 CIP법과 CSL2법을 적용하였다.

$$u_i = \frac{1}{(1 + 0.5 \sin(2\pi x_i))} \quad (30)$$

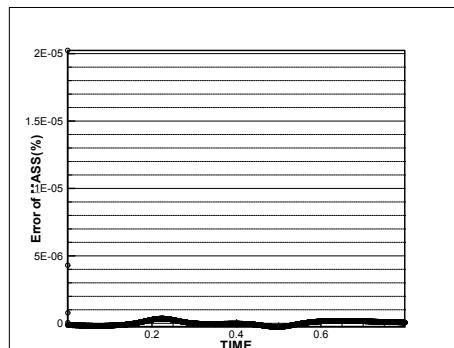
Fig. 4(a) CIP법과 CSL2법의 계산결과를 나타내었다. 각각 초기조건에 대하여 T=0.8 sec. 까지 계산한 결과이다.



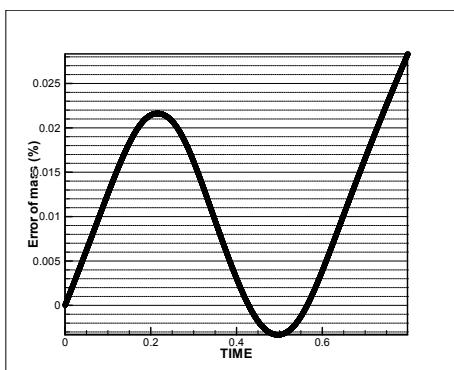
(a) T=0.8 sec. 에서의 profile, CSL2법



(b) T=0.8 sec. 적분치  $\rho$  의 Mass Error, CSL2법



(c) T=0.8 sec. 값  $f$  의 Mass Error, CSL2법



(d) T=0.8 sec. 값  $f$  의 Mass Error, CIP법

Fig. 4 T=0.8sec 에서의 Profile, CSL2법, CIP법

Fig. 4 (b)~(d)에 Original CIP법과 CSL2법의 mass error 및 Density의 Mass Error를 표시하였다. Mass Error는 (시간 T에서의 질량-초기 질량)/초기질량 X100의 형태의 백분율로 표시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 CSL2법은 mass error가 거의 0%의 값을 유지하여 보존성이 뛰어나다는 것을 알 수 있다.

#### 3.2 2-dimensional water drop down

2차원 계산에서 사용한 계산 예제에 대한 기본방정식을 식(31)~(34)에 나타내었다. 식(33)의 연속의 식에 대하여 CSL2법을 사용하여 질량보존을 만족하도록 하였고 식(31), (32)의 운동방정식과 에너지 방정식에 대하여는 일반적인 CIP법(Type M-directional split)을 사용하여 계산의 간편함과 고차 정도의 계산이 가능하도록 하였다.

#### 3.2.1 수직방정식

본 계산에서는 연속의 식, Navier-Stokes 방정식, 에너지방정식의 지배방정식과 상간의 경계를 포획할 밀도함수의 대류방정식으로 이루어져 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}\rho) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (32)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p = -\rho C_s^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (33)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u} \phi_i) = 0 \quad (34)$$

여기서  $u$ 는 유체속도,  $\mu$ 는 점성계수,  $\rho$ 는 유체의 밀도,  $p$ 는 압력,  $\phi_i$ 는 i상의 밀도함수,  $C_s$ 는 음속,  $f$ 는 부력, 중력, 표면장력등을 포함하는 외력이다.

본 계산에서는 엇갈림 격자를 사용하기 때문에 압력, 밀도 및 밀도함수는 격자의 중심에서 스칼라 값으로 정의하고 유속은 각각 엇갈림 방향의 Cell 경계에 배치된다. 자배방정식을 시간분리법 (fractional step 법)으로 비대류형, 대류형으로 분리하여 풀며 비대류형에 존재하는 압력에 관한 포아송 방정식은 식(35)과 같이 유도 할 수 있다. 본 논문에서는 Navier-Stokes 방정식을 풀기 위한 방법으로서 C-CUP법[1]을 이용하였다. C-CUP법은 입축성 유체와 비입축성 유체를 동일한 계산 영역내에서 통일적으로 취급할 수 있는 해법이다. 기체와 액체를 구별하지 않지 않으며 단순히 밀도가 다른 유체로서 취급하는 homogeneous한 수법이고 본 계산과 같이 양 phase간의 상호작용이 중요한 시뮬레이션에서 최적의 수법이다.

$$\nabla \left( \frac{1}{\rho} \nabla p^* \right) = \frac{p^* - p^n}{\rho C_s^2 \Delta t^2} + \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^n \quad (35)$$

압력의 Poisson 방정식을 풀기 위한 연립 1차 방정식의 해법으로는 Bi-CGSTAB법을 이용하였다.

### ¶

기체와 액체의 경계면을 추적하기 위하여 CIP-CSL2법과 밀도함수(Color function, Density function)법을 사용한다. 밀도함수의 대류에 대해서는 기체상과 액체상을  $10^3$ 의 밀도차에 대해서 샤프하게 경계포획을 할 필요가 있기 때문에 식(36)-(37)과 같은 변수변환을 이용하여  $F_\phi$ 의 대류방정식을 계산한다.

$$F_\phi = \tan[(1-\varepsilon)\pi(\phi-0.5)] \quad (36)$$

$$\phi = \frac{\arctan F_\phi + 0.5}{(1-\varepsilon)\pi} \quad (37)$$

밀도 함수  $\phi$ 는 액상에서 1을 기체상에서 0으로 두며 밀도함수와 음속을 계산하기 위한 비율비, 점성계수는 아래와 같이 식(38)을 이용하였다.

$$\gamma = (1-\phi)\gamma_{Air} + \phi\gamma_{Water} \quad (38)$$

여기서  $\mu_{Water}$ 는 액상(물)의 점성계수,  $\mu_{Air}$ 는 기상의 점성계수이다.

간단한 2차원 water drop 문제의 domain에 대하여 Fig. 5에 나타내었다. 벽면의 경계조건으로는 slip 조건으로 하였고 격자폭은  $\Delta x = \Delta y = 0.001$ , 시간폭  $\Delta t = 0.00001$ 로 하였다.

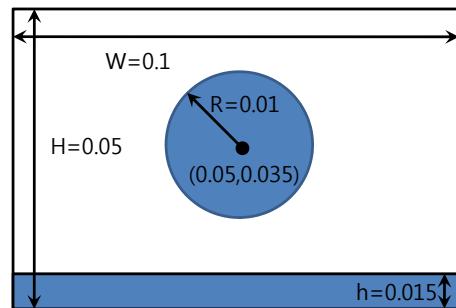


Fig. 5 Schematic of water droplet

Water 와 air 의 물성치는 table 1에 표시하였다.

Table 1 Property of Water & Air

구분	Water	Air
Density [kg/m³]	1000	1.25
Viscosity [kg/m·s]	1.004e-6	15.12e-6
Color function [-]	1	0
Pressure [Pa]	101325	
Ratio of specific heat [-]	20000	1.4

Water drop의 계산결과를 시간경과와 함께 Fig. 6-Fig. 9에 나타내었다.

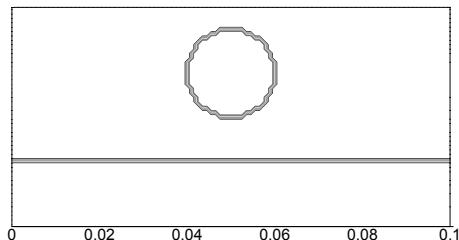


Fig 6 T=0sec, Density function

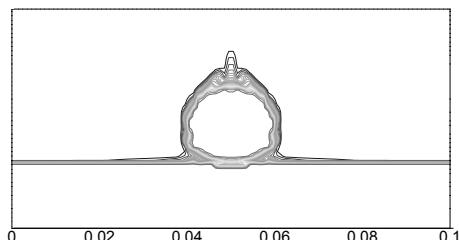


Fig 7 T=0.01sec, Density function

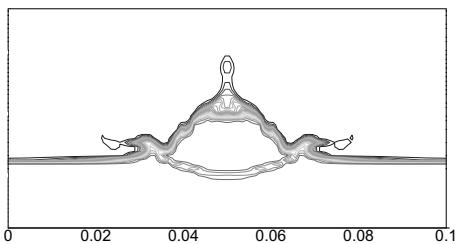


Fig 8 T=0.02sec, Density function

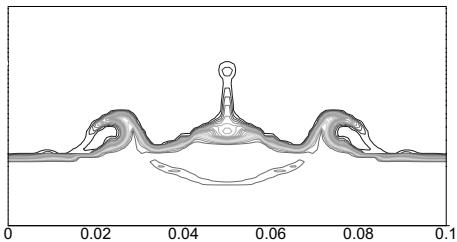


Fig 9 T=0.03sec, Density function

#### 4 결론 및 향후 연구

CIP-CSL2법을 이용하여 간단한 1차원 2차원 문제를 검토하여 보았다. 질량의 보존이 보증되어야 하는 다상 유동에 대하여 CIP-CSL2법을 이용하는 것이 고정도 다상유동 계산의 한가지 유용한 해법임을 나타내었다. 본 논문에서는 CIP-CSL2법의 계산 방법에 대하여 간단히 서술하였으나 향후 이를 확장하여 3차원 영역의 Boiling,

Defrosting과 같은 상변화를 수반하는 다상 유동 해석에 적극 활용하고자 한다.

#### 참고문헌

- [1] 2001, T.Yabe, "An Exactly Conservative Semi-Lagrangian Scheme (CIP-CSL) in One Dimension", *ASM(American Meteorological Society) journals*, Vol.129, pp.332-344.
- [2] 2001, T. Kawai, "Numerical Simulation of the Ricochet Phenomenon using CIP Scheme", 제15회 数值流体力学심포지엄(JSCFD), pp.
- [2] 1985, T. Yabe, "Cubic Interpolation Pseudo-particle Method(CIP) for Solving Hyperbolic-Type Equations", in *Journal of Computational Physics*, Academic Press, Vol.61, pp.261-268.
- [3] 2001, T. Yabe, "The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis", in *Journal of Computational Physics*, Academic Press, Vol.169, pp. 556-593.
- [4] 2004, T. Yabe, "Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme", in *Journal of Computational Physics*, Elsevier B.V, Vol.194, pp. 57-77.
- [5] 2006, K. Takizawa, "Computation of Free-surface flow and Fluid-Object Interactions with the CIP Method Base on Adaptive Meshless Soroban grid", World Congress on Computational Mechanics, Los Angeles, USA.
- [6] 2000, R Tanaka, T Nakamura, T Yabe, "Constructions an exactly conservative scheme in a non-conservative form", *Comput. Phys. Commun.*, vol 126, pp.230