

변형량 기울기 이론이 조합된 이중후방응력 경화모델에서의 국부적 소성변형

윤수진*[†] · 이상연* · 박동창*

Localized Plastic Deformation in Plastic Strain Gradient Incorporated Combined Two-Back Stress Hardening Model

Su-Jin Yun*[†] · Sang-Youn Lee** · Dong-Chang Park*

ABSTRACT

In the present, the formation of shear band under a simple shear deformation is investigated using a rate-independent elastic-plastic constitutive relations. Moreover, the strain gradient terms are incorporated to obtain a non-local plastic constitutive relation, which in turn represented using combined two-back stress hardening model. Then, the continuum damage model is also included to the proposed model. The post-localization behavior are studied by introducing a small imperfection in a work piece. The strain gradient affects the shear localization significantly such that the intensity of shear band decreases as the strain gradient coefficient increases when the J2 flow theory is employed.

초 록

본 논문에서는 변형을 독립 탄-소성 구성방정식을 이용, 전단 변형 하에서의 국부적 소성변형 집중 현상이 분석되었다. 또한 변형량 기울기 (strain gradient) 항이 포함된 비구역적 (non-local) 구성방정식이 유도되었으며 이는 다시 이중후방응력 경화 모델로 표현되었다. 더욱이 본 모델은 연속체 파손 역학과 조합되었다. 국부적 변형집중 현상은 수치해석을 통해 분석되었으며 변형량 기울기 항이 구성방정식에 포함될 때 본 항의 크기가 증가할수록 전단 밴드의 크기는 감소하는 것으로 밝혀졌다.

Key Words: Finite plastic deformation, Back stress, Strain gradient, Localization

1. 서 론

금속물체가 소성대변형을 겪을 경우 전단밴드

(shear band)에 의한 구조적 불안정성이 발생할 수 있으며 파단으로 이어질 수 있는 가능성이 큰 것이 주지의 사실이다. 이는 비구역적 불균일 소성변형과 내부 미세결함의 발생과 깊은 연관이 있으며 이와 같은 결함은 전단밴드와 아울러 공동 (cavity)과 파단이 발생할 수 있다. 따라서

* 국방과학연구소 1기-5

[†] 교신저자, E-mail: sjy1521@hanmail.net

보다 현실적인 소성변형 예측을 위해 변형률 기울기 (strain gradient) 항이 포함된 이중후방응력 이동경화 모델 (strain gradient inbedded two-back stress kinematic hardening)이 제안되었으며 이는 다시 파손이론 (CDM: Continuum Damage Mechanics)과 조합되었다.

기존의 소성이론의 한계로는 입자 (grain)크기가 감소할수록 항복강도의 증가를 예측할 수 없다는 점과 전단밴드의 폭의 크기가 요소 (element)의 밀도에 의존한다는 한계성을 갖고있다. [1, 2] 이에 비구역적이론 (non-local theory)이 도입되었으며 변형률 기울기 항은 소성대변형 하에서의 변형 국부화 (deformation localization) 현상을 보다 적합하게 설명하는 것으로 알려졌다. [3] 거시 변형 (macroscopic)에서는 소성변형의 특성 길이 (characteristic length)가 크므로 물질 고유의 특성 길이의 영향이 크지 않으며 따라서 변형률 기울기 항은 무시될 수 있다. 하지만 금속 물체는 미세변형 (microscopic)에서는 크기의 의존성이 뚜렷이 발생하며 이는 불균일 소성변형에 따른 GND (Geometrically Necessary Dislocation)로 인한 것이다. [1] 따라서 변형률 기울기 항을 구성방정식에 포함시킴으로 크기 효과 (size effect)에 대한 분석이 가능하게 되었다.

근래에 들어 연속체 파손역학과 변형률 기울기를 이용한 비구역적 (non-local) 소성 구성방정식에 대해 주목을 받고 있다. 변형률 기울기 이론에서는 소성변형 시 각기 상이한 물체 거도의 변수가 인벳함 변수와 상호작용을 고려한 것으로부터 비롯되었다. [10] 다양한 소성 변형률 기울기 모델에 대한 비교도 이루어졌다. [8]

비구역적 변수 (non-local variable)는 연속체 Ω 내에서의 물질지점 (material point) 주변으로의 지역변수 (local variable)에 대한 평균으로 볼 수 있다. [5];

$$\bar{F} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \Psi F d\Omega \quad (1)$$

$$\Psi(\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp\left[-\frac{|\bar{x}-\bar{y}|^2}{2l^2}\right] \quad (2)$$

여기서 Ψ : 무게 함수 (weight function), \bar{y} ; $d\Omega$ 위치 벡터이다. 길이 변수 'l'은 비구역적량에 기여하는 체적의 크기를 결정한다. Taylor series 확대는 다음의 식으로 나타낸다. [6]

$$\begin{aligned} \bar{F}(\bar{y}) &= \bar{F}(\bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial x_i} (y_i - x_i) + \\ &\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (y_i - x_i)(y_j - x_j) + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

이는 다시

$$\bar{F}(\bar{x}) = \bar{F}(\bar{x}) + c(l) \nabla^2 F(\bar{x}) + \frac{1}{2!} d(l) \nabla^4 F(\bar{x}) + \dots \quad (4),$$

$\nabla^2 = \partial_i^2 / \partial x_i^2$. 더욱이 위 식에서의 비구역적 변수가 변형률로 대체된다면;

$$\bar{e}_e^p(\bar{x}) = e_e^p(\bar{x}) + c(l) \nabla^2 e_e^p(\bar{x}) + \frac{1}{2!} d(l) \nabla^4 e_e^p(\bar{x}) + \dots \quad (5)$$

한편 큰 차수의 항들이 무시된다면 Aifantis [7]가 제안한 식과 동일한 형태를 갖는다.

$$\bar{e}_e^p(\bar{x}) = e_e^p(\bar{x}) + c(l) \nabla^2 e_e^p(\bar{x}) \quad (6)$$

물체의 항복거동은 상태 (state) 변수와 내부 (internal state) 변수의 함수로 표현될 수 있으며 그럼 다음의 항복함수를 얻는다.

$$F(\sigma_{ij}, e_e^p, \nabla^2 e_e^p) = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - (\sigma_y - g(e_e^p, l) \nabla^2 e_e^p) \quad (7)$$

한편 기존의 변형률 기울기 사용의 편리성과 큰 차수 항들의 적용을 위한 암묵적인 (implicit) 기울기 항이 다음과 같이 제안되었다. [5]

$$\bar{e}_e^p = e_e^p + c(l) \nabla^2 \bar{e}_e^p \quad (8)$$

여기서 $\nabla^2 \bar{e}_e^p = \nabla^2 e_e^p + c(l) \nabla^4 e_e^p + \dots$ 이다.

대다수의 변형률 기울기 항과 관련된 이론은 등방경화 (isotropic hardening)에 집중되어있으나 그 효과는 이동경화에도 영향을 미치는 것은 당연하다. 이 경우 항복계수 'k'는 일정하나 항복

곡선의 중심은 후방응력 ' α_{ij} '에 따라 이동한다. 한편 항복곡선 계수는 다음과 같이 표현된다.

$$k = \sigma_y + h(\bar{e}_e^p) \quad (9)$$

더욱이 후방응력 ' α_{ij} '는 소성변형의 함수이므

로 본 연구에서는 후방응력도 비구역적 변수로 표현하는 것으로 가정되었다. 본 논문에서는 이중후방응력 이동경화식을 이용, 변형량 기울기 항이 조합된 새로운 구성방정식이 제안되었다. 또한 결함에 의한 물체 거동의 변화는 결함인자 (ϕ)를 이용, 유효 (effective) 상태변수나 내부변수를 도입함으로 표현되었다.

2. 구성방정식과 키네매틱스

F_{ij} 는 변형 기울기 (deformation gradient)이며 초기와 현재 상태에서의 관계 (mapping: $x_i = x_i(a_j, t)$)를 나타낸다.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad (10)$$

x_i : current configuration, a_i : reference configuration

F_{ij} 는 소성변형과 탄성변형의 영역으로 다음과 같이 분리될 수 있으며 이는 소성변형 상태가 에너지 소산 (dissipation)되므로 '0' 에너지 상태이기 때문이다. [4]

$$F_{ij} = F_{ik}^e F_{kj}^p \quad (11)$$

또한 속도 기울기 (velocity gradient) ' L_{ij} '는 다음과 같이 표현된다.

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad L_{ij} = \dot{F}_{ik} F_{kj}^{-1} = L_{ij}^e + F_{il}^e L_{lm}^p F_{mj}^{e-1} \quad (12)$$

여기서 각각 $L_{ij}^p \equiv \dot{F}_{ik}^p F_{kj}^{p-1}$, $L_{ij}^e \equiv \dot{F}_{ik}^e F_{kj}^{e-1}$. 따라서 위의 식은;

$$L_{ij}^p = D_{ij}^p + W_{ij}^p \quad (13)$$

여기서 D_{ij}^p 와 W_{ij}^p 는 각각 소성변형율과 소성 스피ンを 나타낸다.

대표적 체적요소 (RVE: Representative Volume Element)의 강도 저하는 결함인자로 표시되며 등방 결함의 경우 결함 인자 (ϕ)는;

$$\phi = (A - \bar{A})/A \quad (14)$$

여기서, 상첨자 ('-')는 상태 변수 혹은 내부 상태 변수들에 대한 가상의 무결함 유효상태에서의 물리적 량을 나타내며 예로 A 와 \bar{A} 는 명목 (nominal)과 유효 (effective) 표면적을 나타낸다.

그럼 예로 응력 (σ)과 영 모듈러스 (E)는 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{ij} = (1 - \phi) \bar{\sigma}_{ij}, \quad \sigma_e = (1 - \phi) \bar{\sigma}_e, \\ E = \bar{E}(1 - \phi)^2 \quad (15)$$

하첨자 ' e '는 등가를 나타낸다. 마찬가지로 명목 변형 (ϵ)과 유효 변형과의 관계는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{1 - \phi} \bar{\epsilon}_{ij}^e, \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{1 - \phi} d\bar{\epsilon}_{ij}^p, \\ d\epsilon_e^p = \frac{1}{1 - \phi} d\bar{\epsilon}_e^p, \quad \epsilon_e^p = \int \frac{1}{(1 - \phi)} d\bar{\epsilon}_e^p \quad (16)$$

여기서 ϵ 은 변형율 (strain), ' e '와 ' p '는 각각 탄성 및 소성 상태를 나타낸다.

비례하중 (proportional loading) 조건에서 결함인자는 다음의 관계식을 얻는다. [14]

$$\phi = \phi_0 + (\phi_{cr} - \phi_0) \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\ln(\epsilon^p/\epsilon_{th}^p)}{\ln(\epsilon_{cr}^p/\epsilon_{th}^p)} h \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right)^\alpha \right] \right\} \quad (17)$$

$$h \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right) = \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right)^2, \quad \sigma_H = \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

여기서 ν , ϕ_0 , ϕ_{cr} , ϵ_{th}^p 는 각각 Poisson 비, 초기 결함, 극한 결함, 극한 등가 소성 변형량 및 결함 발생 개시의 소성변형을 나타낸다.

후방응력은 비선형 Armstrong-Frederick [12] 과 선형 Phillips [13] 경화식에 따라 전개되는 것으로 가정되었으며 여기서 β , γ 와 ζ 는 각 후방응력 전개식에서의 경화계수들이다:

$$d\bar{\alpha}_{ij}|_m = f d\bar{\alpha}_{ij}|_1 + (1 - f) d\bar{\alpha}_{ij}|_2 \quad (18)$$

$$d\bar{\alpha}_{ij}|_1 = \beta d\bar{\epsilon}_{ij}^p - \gamma \bar{\alpha}_{ij} d\bar{\epsilon}_e^p \quad (19)$$

$$d\bar{\alpha}_{ij}|_2 = \zeta d\bar{s}_{ij} \quad (20)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

$$\text{혹은 } d\bar{\alpha}_{ij}|_2 = \zeta \left(d\bar{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\bar{\sigma}_{kk} \right) \\ = \zeta \left(d\bar{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{K} d\bar{\epsilon}_{kk} \right) \quad \because d\bar{\epsilon}_{kk}^p = 0$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad \text{bulk modulus}$$

두 개의 이동경화에 대한 조합은 객관적 후방응력율 (objective rate of back stress)에 대해서

혼합분율이 적용되었으므로 따라서 소성변형률과 응력은 단일 장으로 표현된다.

$$d\bar{\alpha}_{ij|m} = f d\bar{\alpha}_{ij|1} + (1-f) d\bar{\alpha}_{ij|2}$$

$$f(\bar{\beta} d\bar{\epsilon}_{ij}^p - \bar{\gamma} \bar{\alpha}_{ij} d\bar{\epsilon}_e^p) + (1-f) \bar{\zeta} d\bar{s}_{ij} \quad (21)$$

여기서 인자 f 는 혼합분율을 나타낸다. 한편 일치조건 (consistency condition)을 통해 물질인자들은 아래와 같이 결정된다.

$$dF = \bar{s}'_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} - \bar{s}'_{ij} (f \bar{\beta} d\bar{\epsilon}_{ij}^p - f \bar{\gamma} \bar{\alpha}_{ij} d\bar{\epsilon}_e^p) - \bar{s}'_{ij} (1-f) \bar{\zeta} d\bar{s}_{ij} = 0 \quad (22)$$

$$\bar{K} = \frac{f}{1-(1-f)\bar{\zeta}} \left[\bar{\beta} - \bar{\gamma} \bar{\alpha}_{ij} \frac{\bar{s}'_{ij}}{\sigma_y} \right]$$

$$\bar{K}_t = \frac{f}{1-(1-f)\bar{\zeta}} (\bar{\beta} - \bar{\gamma} \bar{\alpha}_{ij|1}),$$

$$\bar{K}_c = \frac{f}{1-(1-f)\bar{\zeta}} (\bar{\beta} + \bar{\gamma} \bar{\alpha}_{ij|1})$$

여기서, 하첨자 t 와 c 는 각각 인장과 압축을 의미한다. 그럼 Armstrong-Frederick식의 경화계수는 아래와 같이 얻어질 수 있다.

$$\bar{\beta} = \frac{1-(1-f)\bar{\zeta}}{f} \frac{\bar{K}_t + \bar{K}_c}{2},$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1-(1-f)\bar{\zeta}}{f} \frac{\bar{K}_c - \bar{K}_t}{2\bar{\alpha}_{s1}} \quad (23)$$

α_s 은 역하중 (reverse loading) 시의 계수이다. 그럼 최종 후방응력 (ultimate back stress)은

$$(\alpha_{ij}^u \alpha_{ij}^u)^{1/2} = \left[\frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{1-f}{f} \right)^2 \frac{\zeta^2}{\gamma^2} h_t^2 + 2 \frac{1-f}{f} \frac{\beta \zeta}{\gamma^2} \frac{dE^p}{d\epsilon_e^p} \right]^{1/2} \quad (24)$$

$$0 < f \leq 1, \quad dE^p \equiv d\bar{\epsilon}_{ij}^p d\bar{s}_{ij}.$$

명목적 탄젠셜 모듈러스 E_t 는 결함인자와 유효 모듈러스 \bar{E}_t 의 함수로 표현되면;

$$E_t = \frac{d\sigma_e}{d\epsilon_e^p} = \frac{d\sigma_e}{d\bar{\sigma}_e} \frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_e^p} \frac{d\bar{\epsilon}_e^p}{d\epsilon_e^p} = (1-\phi)^2 \bar{E}_t \quad (25)$$

한편, Aifantis [7]는 비구역적 후방응력을 아래와 같이 표현하였다.

$$\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} + C_{2ij} \nabla^2 |\alpha_{ij}| = \alpha_{ij} + C_{2ij} \nabla^2 \alpha_e \quad (26)$$

여기서 후방응력 기울기 계수는 텐서 (tensor)형

태로;

$$C_{2ij} \propto \frac{\alpha_{ij}}{|\alpha_{ij}|} \quad \text{혹은} \quad C_{2ij} \propto \frac{s_{ij} - \alpha_{ij}}{|s_{ij} - \alpha_{ij}|}, \quad (27)$$

만면 Voiadjis et. al. [9]는 다음과 같이 비구역적 후방응력을 표현하였으며;

$$\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} + C_2 \nabla^2 \alpha_{ij} \quad (28)$$

스칼라 기울기 계수가 적용되었다. Aifantis와 같은 경우 식은 간단하게 나타낼 수 있으나 실험을 통해서 텐서 형태의 후방응력 기울기 계수를 결정하는 것은 매우 힘든 일이며 수 많은 실험이 요구된다. 따라서 보다 간단한 형태의 스칼라 기울기 계수를 가정하는 것이 더욱 바람직하다. 그럼 비구역적 응력과 후방응력은 각각;

$$\hat{\sigma}_y = \sigma_y + C_1 \nabla^2 \bar{\epsilon}_e^p, \quad C_1 = C_1(\bar{\epsilon}_e^p) \quad (29)$$

$\hat{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{ij} + C_2 \nabla^2 \bar{\alpha}_{ij}$, $C_2 = C_2(\bar{\alpha}_e) = C_2(\bar{\epsilon}_e^p)$ 로 표현되며 여기서

$$|\bar{\alpha}_{ij}| = \bar{\alpha}_e = \left(\frac{3}{2} \bar{\alpha}_{ij} \bar{\alpha}_{ij} \right)^{1/2} \quad \text{이다.}$$

한편 항복곡선은 응력, 후방응력 및 등가 소성 변형률의 함수로 표현될 수 있다.

$$\hat{s}'_{ij} \equiv s_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}, \quad \hat{s}'_{ij} \equiv \bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij} \quad (30)$$

$$F = F(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\alpha}_{ij}, \bar{\epsilon}_e^p) \quad (31)$$

$$F = \frac{1}{2} (\bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) (\bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_y^2$$

$$= \frac{1}{2} (\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} - C_2 \nabla^2 \bar{\alpha}_{ij}) (\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} - C_2 \nabla^2 \bar{\alpha}_{ij}) -$$

$$\frac{1}{3} (\bar{\sigma}_y + C_1 \nabla^2 \bar{\epsilon}_e^p)^2 = \frac{1}{2} \hat{s}'_{ij} \hat{s}'_{ij} - \frac{1}{3} \hat{\sigma}_y^2$$

그럼 일치조건은;

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\bar{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} d\bar{\alpha}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_e^p} d\bar{\epsilon}_e^p \quad (32)$$

여기서,

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = (\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} - C_2 \nabla^2 \bar{\alpha}_{ij}) = \bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij} = \hat{s}'_{ij}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} = - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = - (\bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) = - \hat{s}'_{ij}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon_e^p} = - C_2^* \nabla^2 \bar{\alpha}_{ij} (\bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) - \frac{2}{3} \hat{\sigma}_y C_1^* \nabla^2 \bar{\epsilon}_e^p$$

$$C_i^* = \frac{\partial C_i}{\partial e_i^p}$$

한편 소성 흐름 (plastic flow) 성분과 등가 소성 변형량은 아래와 같다.

$$d\bar{e}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \hat{s}'_{ij}, \quad d\bar{e}_e^p = \frac{2}{3} \lambda \hat{\sigma}_e \quad (33)$$

보다 구체적인 일치조건식은 다음과 같다.

$$dF = \hat{s}'_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} - \hat{s}'_{ij} (1-f) \bar{\zeta} d\bar{s}_{ij} - \lambda \left(f \frac{4}{9} \bar{\beta} \hat{\sigma}_y^2 - \frac{2}{3} f \bar{\gamma} \hat{s}'_{ij} \alpha_{ij} \hat{\sigma}_y + \frac{2}{3} C_2^* g_{ij}^{\alpha} \hat{s}'_{ij} \hat{\sigma}_y + \frac{4}{9} C_1^* g^k \hat{\sigma}_y^2 \right) \quad (34)$$

여기서 $g_{ij}^{\alpha} = \nabla^2 \bar{\alpha}_{ij}$, $g^k = \nabla^2 \bar{e}_e^p$.

따라서 일치조건을 통해 얻은 소성변형량 증분은;

$$d\bar{\epsilon}_{kl}^p = \frac{\hat{s}'_{vw} \bar{C}_{vwmn}^{\epsilon d} \hat{s}'_{kl} d\bar{\epsilon}_{mn}}{LHT} \quad (35)$$

$$LHT = \hat{s}'_{pq} \bar{C}_{pqrs}^{\epsilon d} \hat{s}'_{rs} + f \frac{4}{9} \bar{\beta} \hat{\sigma}_y^2 - \frac{2}{3} f \bar{\gamma} \hat{s}'_{pq} \alpha_{pq} \hat{\sigma}_y + \frac{2}{3} C_2^* g_{pq}^{\alpha} \hat{s}'_{pq} \hat{\sigma}_y + \frac{4}{9} C_1^* g^k \hat{\sigma}_y$$

그러므로 응력증분은;

$$d\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e (d\bar{\epsilon}_{kl} - d\bar{e}_{kl}^p) \quad \text{혹은} \quad d\bar{\sigma}_{ij} = L_{ijkl}^e d\bar{\epsilon}_{kl} \quad (36)$$

여기서 C_{ijkl}^e 는 탄성계수를 나타내며 탄-소성 계수인 L_{ijkl}^e 은 각각 아래와 같다.

$$C_{ijkl}^e = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right]$$

$$\bar{L}_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl}^e - \frac{\bar{C}_{ijvw}^e \hat{s}'_{vw} \bar{C}_{tukl}^e \hat{s}'_{tu}}{LHT} \quad (37)$$

여기서 항 ' LHT '는 위의 분모항이다. 한편

$$\bar{C}_{ijkl}^{\epsilon d} = \bar{C}_{ijkl}^e - (1-f) \bar{\zeta} \bar{C}_{ijkl}^d \quad (38)$$

$$C_{ijkl}^d = C_{ijkl}^e - \frac{1}{3} \delta_{ij} C_{ddkl}^e \quad \text{이다.}$$

만약 $f = 1$, $\beta = H$, $\gamma = 0$, $C_1 = C_2 = 0$ 그리고 $\phi = 0$ 라면 위의 식은 통상적인 Prager 이동경화법칙식을 이용한 구성방정식과 동일하다.

$$\bar{L}_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl}^e - \frac{\bar{C}_{ijvw}^e \hat{s}'_{vw} \bar{C}_{tukl}^e \hat{s}'_{tu}}{\hat{s}'_{pq} \bar{C}_{pqrs}^e \hat{s}'_{rs} + f \frac{4}{9} \bar{\beta} \hat{\sigma}_y^2} \quad (39)$$

한편 변형량 기울기 항이 무시된다면;

$$\bar{L}_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl}^e - \quad (40)$$

$$\frac{[1 - (1-f) \bar{\zeta}] \bar{C}_{ijvw}^e \hat{s}'_{vw} \bar{C}_{tukl}^e \hat{s}'_{tu}}{[1 - (1-f) \bar{\zeta}] \hat{s}'_{pq} \bar{C}_{pqrs}^e \hat{s}'_{rs} + f \frac{4}{9} \bar{\beta} \hat{\sigma}_y^2 - \frac{2}{3} f \bar{\gamma} \hat{s}'_{pq} \alpha_{pq} \hat{\sigma}_y}$$

끝으로 응력율은 하부구조 스핀 텐서에 대해서 동회전 (co-rotation)으로 나타내며 이는 순수한 강체회전을 의미한다. 현상학적인 소성 스핀은 다음과 같으며 또한 소성 스핀은 흡사하게 후방응력과 객관적 응력율로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$W_{ij}^p|_1 = \eta (\alpha_{ik} D_{kj}^p - D_{ik}^p \alpha_{kj}), \quad (41)$$

$$W_{ij}^p|_2 = \xi (\alpha_{ik} \dot{\sigma}_{kj}^p - \dot{\sigma}_{ik}^p \alpha_{kj})$$

여기서 D^p 는 소성변형율이다. 변형 에너지 등가 원리를 토대로 다음과 같이 각 후방응력 성분에 대한 조합이 본 연구에 적용되었다.

$$W_{ij}^p|_m = [W_{im}^p|_1 \alpha_{mk}|_1 + W_{im}^p|_2 \alpha_{mk}|_2] \alpha_{kj}^{-1}|_m \quad (42)$$

응력과 후방응력에 대한 동축 회전율은 하부구조 스핀에 의해 표현되며 그 식은 아래와 같다.

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \Omega_{kj} \quad (43)$$

$$\overset{\circ}{\alpha}_{ij} = \dot{\alpha}_{ij} - \Omega_{ik} \alpha_{kj} + \alpha_{ik} \Omega_{kj}$$

$$\Omega_{ij} = W_{ij} - W_{ij}^p|_m, \quad W_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i})$$

3. 수치해석 결과

본 논문에서는 단순전단 (simple shear) 변형에 대해서 유한변분 (explicit finite difference) 해석이 적용되었다. 따라서 안전한 해를 얻기 위한 시간증분 (time increment)은 von Neumann 안전조건을 통해 결정되었으며 아래와 같다.

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x}{\sqrt{G/\rho}} \quad (44)$$

또한 변형 물체 중앙에 초기 결함 (perturbation)이 삽입되어 국부화 소성변형집중 현상이 분석되었다. 초기 전단 응력의 분포는 아래와 같으며 전단밴드는 불균일 변형의 결과로 나타난다.

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \epsilon H(x_2 - d), \quad 0.5 - d \leq x_2 \leq 0.5 \quad (45)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 0 \leq x_2 < 0.5 - d, \quad \alpha_{12} = \sigma_{12} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Figure 1

Fig. 2

(f)

C_1 C_2

Fig. 4

가
가
가
Armstrong-Frederick
가

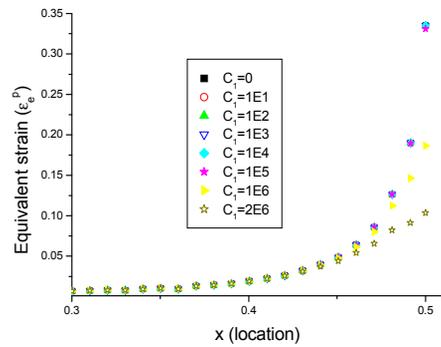
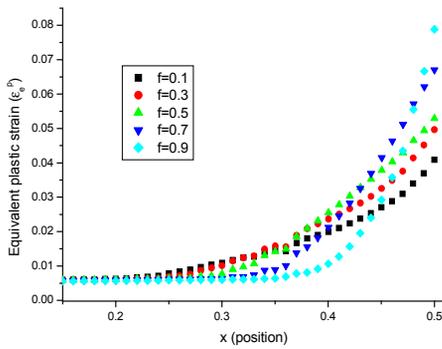


Fig. 1 Distribution of equivalent plastic strain: effect of fractional factor f

Fig. 3 Distribution of equivalent plastic strain: strain gradient coefficient (C_1)

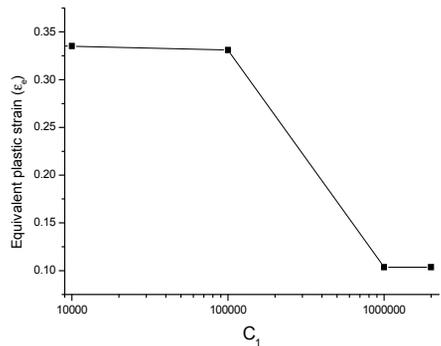
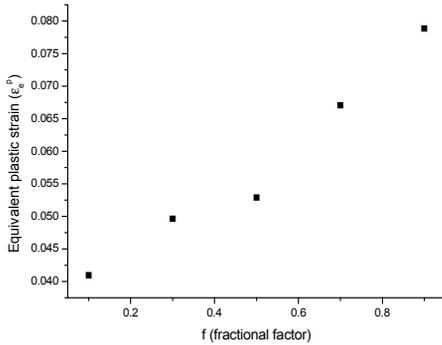


Fig. 2 Effect of fractional factor f at center of work piece

Fig. 4 Effect of 1st strain gradient coefficient (C_1)

Figure 3

가 Fig. 5 6

가

(C_1)가 가

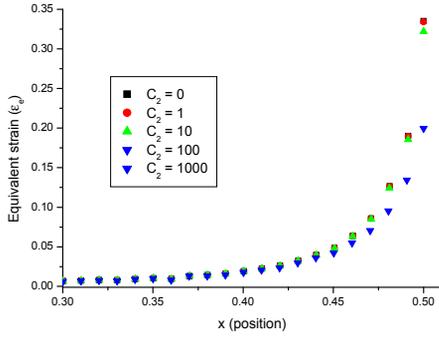


Fig. 5 Distribution of equivalent plastic strain: back stress gradient coefficient (C_2)

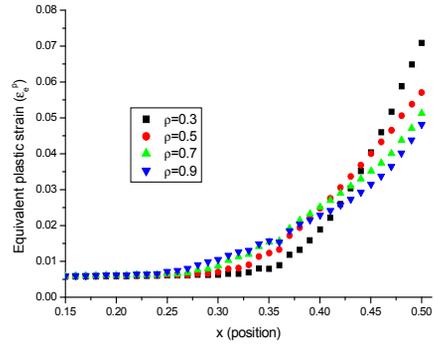


Fig. 7 Distribution of equivalent plastic strain: Phillips coefficient (ρ)

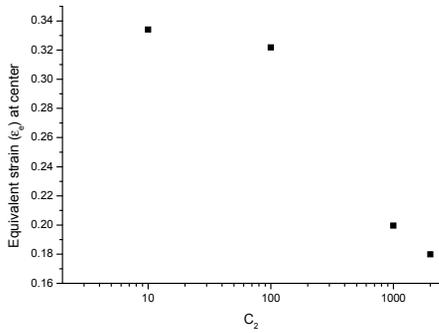


Fig. 6 Effect of 2nd back stress gradient co. (C_2)

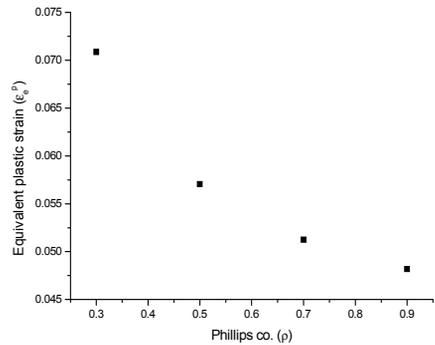


Fig. 8 Effect of Phillips coefficient (ρ)

가
 C_1 가 가
 Figure 7 8 Phillips (ρ)

Phillips 가

4. 결어

본 논문에서는 변형량 기울기가 조합된 후방응력 이동경화 구성방정식이 제안되었다. 또한 후

방응력 경화식은 두 개의 상이한 후방응력을 결합으로 구현되었으며 아울러 연속체 결합 이론과의 조합을 통해 소성변형 물체 내에서의 결합의 진전도 해석될 수 있다. 수치해석 결과, 소성 변형량 기울기가 증가함에 따른 소성변형 집중 국부화 현상은 감소하는 것으로 밝혀졌다.

참고 문헌

1. Y. Huang, S. Ou, K. C. Hwang, M. Li and H. Gao, "A conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity", Int. J. Plas., Vol. 20, 2004, pp. 753~782
2. S. P. Lele and L. Anand, "A large-deformation strain-gradient theory for

- isotropic viscoplastic materials", *Int. J. Plas.*, Vol. 25, 2009, pp. 420~453
3. C. Polizzotto, "A nonlocal strain gradient plasticity theory for finite deformation", *Int. J. Plas.*, Vol. 25, 2009, pp. 1280~1300
 4. E. H. Lee, "Elastic-plastic deformation at finite strain", *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, 1969, pp. 1~6
 5. R. A. B. Engelen, M. G. D. Geers and F. P. T. Baaijen, "Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modeling of softening behavior", *Int. J. Plas.*, Vol. 19, 2003, pp. 403~433
 6. V. G. Kouznetsova, M. G. D. Geers and W. A. M. Brekelmans, "Multi-scale second order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 193, 2004, pp. 5525~5550
 7. E. C. Aifantis, "On the role of gradients in the localization of deformation and fracture", *Int. J. Engr. Sci.*, Vol. 30, 1992, pp. 1279~1299
 8. P. Gudmunson, "A unified treatment of strain gradient plasticity", *J. Mech. Phys.*, Vol. 52, pp. 1379~1406
 9. G. Z. Voyiadjis, R. A. Al-Rub and A. N. Palazotto, "Thermodynamic framework for coupling of anisotropic viscodamage for dynamic localization problems using gradient theory", *Int. J. Plas.*, Vol. 20, 2004, pp. 981~1038
 10. Saczuk, K. Kackl and H. Stumpf, "Rate theory of nonlocal gradient damage-gradient viscoelasticity", *Int. J. Plas.*, Vol. 19, 2003, pp. 675~706
 11. G. Z. Voyiadjis and T. Park, "Kinematic description of damage for finite strain plasticity", *Int. J. Eng. Sci.*, 1999; 54 (4), pp. 483-511
 12. Z. Mroz, H.P. Shrivastava and R.N. Dubey, "A non-linear hardening mode and its application to cyclic loading", *Acta Mech.* 1976, 24, pp. 51-61
 13. A. Phillips, L. Tnag and M. Ricciuti, "Some new observation on yield surfaces", *Acta Mech.*, 1974, 20, pp. 23-29
 14. N. Borona, "A nonlinear CDM model for ductile failure", *Eng. Fracture Mech.*, 1997, 58 (1/2), pp. 11-28