

상태 공간 방정식을 이용한 마이크로 외팔보의 진동 특성 파악

Vibration characteristics identification of microcantilevers using state-space equation

이진우† · 이수일*

Jin Woo Lee and Soo Il Lee

1. 서 론

마이크로 외팔보(microcantilever)는 원자 현미경(Atomic Force Microscope), 고주파 램프 스위치(RF-MEMS switch), 마이크로 공명기(micro resonator) 등과 같은 NEMS/MEMS 동역학 기반 마이크로 구조물에 널리 사용되고 있다. 육안으로 볼 수 없는 마이크로/나노 샘플을 분류해 내는 경우에는 일정한 크기나 주파수로 가진되는 외팔보의 응답이 샘플에 따라 달라지는 특성을 이용한다⁽¹⁾. 그리고, 신호의 전달/차단을 위해 개폐되는 외팔보의 잔류 진동의 특성은 주변 유체의 영향을 강하게 받는다⁽²⁾. 따라서, 사용되는 상황에 따른 외팔보의 진동 응답 특성의 정확한 기술은 NEMS/MEMS 동역학 기반 마이크로 구조물 특성 연구에 크게 기여할 수 있다.

실험을 통해 얻은 마이크로 외팔보의 물리적 현상을 간단한 해석 모델과 신호 분석 기법을 이용하여 설명하려는 연구가 다수 시도되고 있다⁽³⁻⁵⁾. Hong과 Lee⁽³⁾는 적합 직교 분해 법(Proper Orthogonal Decomposition method)를 이용하여 원자 현미경용 외팔보의 비선형 현상을 설명하였고, Zhang과 Murphy⁽⁴⁾는 모달 해석 기법을 이용하여 원자 현미경의 동적 현상을 설명하였다. 이러한 연구들을 좀 더 발전시키기 위해서는 계속된 실험 현상을 잘 구현할 수 있는 수학적 모델과 그 표현법에 대한 연구가 필요하다.

본 논문에서는 유한 요소법과 상태 공간 표현법을

이용하여 마이크로 외팔보의 진동 특성을 파악하는 방법론을 제시한다. 첫째, 원자 현미경용 마이크로 외팔보의 해석 모델에 유한 요소법을 적용하여, 질량/강성/댐핑 행렬과 구성된 연립 대수 방정식을 구성한다. 두 번째, 연립 대수 방정식을 상태 공간 표현법(state-space representation)을 이용하여, 다양한 외력에 대한 진동 응답을 구할 수 있는 상태 공간 방정식을 구한다. 세 번째, 물리적으로 가능성이 있는 외력에 대한 응답을 구해서 그 특성을 서로 비교한다.

2. 마이크로 외팔보의 유한 요소 모델

Fig. 1과 같은 외팔보의 횡방향 변위($w(x,t)$)는 외팔보 자체의 감쇠를 무시할 수 있다면, 식 (1)을 통해 얻을 수 있다. 식 (1)에서 m 은 단위 길이당 질량, EI 는 굽힘 강성(flexural rigidity), $f(x,t)$ 는 단위 길이당 작용하는 외력을 나타낸다.

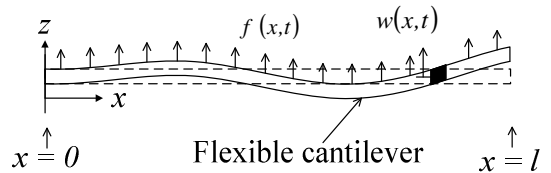


Fig. 1 Microcantilever for AFM

$$m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = f(x,t) \quad (1)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (2)$$

만약, 외부 요인에 의한 감쇠가 존재한다고 가정하고 유한 요소법을 이용하면 식 (1)은 식 (2)와 같은 연립 대수 방정식으로 변환된다. 식 (2)에서,

† 교신저자: 정회원, 아주대학교 기계공학부

E-mail: jinwoolee@ajou.ac.kr

Tel: 031-219-3659, Fax: 031-219-1611

* 정회원, 서울 시립대학교 기계정보공학부

질량 행렬(\mathbf{M}), 감쇠 행렬(\mathbf{C}), 강성 행렬(\mathbf{K})는 각 요소의 요소 질량/감쇠/강성 행렬로 구성된다.

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \sum_{n=1}^N \mathbf{m}^{(n)} \quad (3-a)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \sum_{n=1}^N \mathbf{c}^{(n)} \quad (3-b)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \sum_{n=1}^N \mathbf{k}^{(n)} \quad (3-c)$$

$$\mathbf{m}^{(n)} = \int \rho' [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \quad (4-a)$$

$$\mathbf{c}^{(n)} = \int c' [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \quad (4-b)$$

$$\mathbf{k}^{(n)} = \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \quad (4-c)$$

식 (4)에서 $[\mathbf{N}]$ 와 $[\mathbf{B}]$ 는 형상 함수와 형상함수의 공간 미분식으로 구성된 행렬이다.

3. 마이크로 외팔보의 상태 공간 방정식

유한 요소 법을 사용하여 유도된 식 (2)의 질량 행렬은 대각 행렬이 아니므로, 상태 공간 표현법을 그대로 적용할 수 없다. 따라서, 질량 행렬(\mathbf{M})의 모달 벡터(Φ)를 이용하면, 식 (2)는 식 (5)로 치환된다.

$$\overline{\mathbf{M}} \ddot{\bar{\mathbf{v}}} + \overline{\mathbf{C}} \dot{\bar{\mathbf{v}}} + \overline{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (5)$$

$$\overline{\mathbf{M}} = \Phi^{-1} \mathbf{M} \Phi \quad (6-a)$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \Phi^{-1} \mathbf{C} \Phi \quad (6-b)$$

$$\overline{\mathbf{K}} = \Phi^{-1} \mathbf{K} \Phi \quad (6-c)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \{v_1, v_2, \dots, v_{2N-1}, v_{2N}\} \quad (7)$$

식 (7)의 각 원소를 식 (8)과 같은 규칙으로 치환하여, 식 (9)와 같은 상태 공간 방정식을 구하였다.

$$v_j = z_{2j-1}, \quad \dot{v}_j = z_{2j} \quad (8)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B} \bar{\mathbf{f}}_m \quad (9-a)$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{z}} \quad (9-b)$$

$$\bar{\mathbf{z}} = \{z_1, z_2, \dots, z_{4N-1}, z_{4N}\} \quad (10)$$

3. 결 론

본 연구에서는, 유한 요소법과 상태 공간 표현법을 이용하여 마이크로 외팔보의 진동 응답을 구할 수 있는 상태 공간 방정식을 유도하였다. 향후 이 방정식을 이용하여 실험으로 관찰된 마이크로 외팔보의 물리적 현상을 설명하고자 한다.

후 기

이 논문은 2011학년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초 연구사업임 (No. 2011-0005830). 또한, 본 연구는 2011학년도 아주대학교 일반 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- (1) Lee, S. I., Howell, S. W., Raman, A. and Reifenger, R., 2002, Nonlinear Dynamics of Microcantilevers in Tapping Mode Atomic Force Microscopy: a Comparison between Theory and Experiment, *Physical Review B*, Vol. 66, pp. 115409.
- (2) Lee, J. W., Tung, R., R. Arvind, Sumali, H. and Sullivan, J. P., 2009, Squeeze-film damping of flexible microcantilevers at low ambient pressures: theory and experiment, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 19, pp. 105029.
- (3) Hong, S. H. and Lee, S. I., 2010, Vibration Analysis of the Tapping AFM Microcantilevers Using Proper Orthogonal Decomposition, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 20, No. 4, pp. 414~421.
- (4) Zhang, Y. and Murphy, K. D., 2011, Multi-modal Analysis on the Intermittent Contact Dynamics of Atomic Force Microscope, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, pp.5569-5582.
- (5) Spletzer, M., Raman, A. Reifenger, R., 2010, Spatio-temporal Dynamics of Microcantilevers Tapping on Samples Observed under an Atomic Force Microscope integrated with a scanning laser Doppler vibrometer: applications to proper orthogonal decomposition and model reduction, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 20, pp.085024.