

임의 형상 음향공동의 고정밀도 고유치 해석을 위한 NDIF 법 개발

Development of the NDIF method for accurate eigenvalue analysis of arbitrarily shaped acoustic cavities

강상욱† · 김진곤*
S. W. Kang and J. G. Kim

1. 서 론

임의 형상 음향 공동의 고유치를 구하는 데에 가장 일반적으로 사용되는 방법은 유한요소법이나 경계요소법을 이용하는 것이다. 그러나 상기 방법들은 해의 정밀도가 다소 떨어지는 단점을 지니고 있다. 본 저자는 이러한 단점을 극복하기 위해 고정밀도 고유치 해석 기법인 NDIF 법을 개발하여 임의 형상 음향공동의 고유치 해석에 성공적으로 적용하였다⁽¹⁾.

그러나 제안된 방법⁽¹⁾은 볼록 음향 공동에 대해서는 유효하나 오목 음향 공동에 대해서는 해가 매우 부정확함이 최근에 연구에서 밝혀졌다. 본 논문에서는 상기 문제점을 해결하기 위해 분할영역법을 이용한 개선된 NDIF 법(Modified NDIF method, MNDIF method)를 제안한다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

음향 공동에 대한 헬름홀츠 방정식(Helmholtz equation)은 다음과 같다⁽²⁾.

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

여기서 p 는 음향 공동 임의 위치에서의 음압을 나타내며, k 는 고유치 파라미터를 의미한다. 그리고 음향 공동의 강체벽 경계조건은 다음과 같이 표현된다⁽²⁾.

$$\frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

여기서 Γ 는 음향 공동의 경계를 의미하며, n 은 경계에서의 법선 방향을 의미한다.

2.2 분할된 영역에 대한 시스템 행렬 추출

Fig. 1은 오목 형상을 가진 임의 형상 음향 공동을 보여준다. 본 논문에서는 이 오목 음향 공동을 두 개의 볼록 영역 D_I 와 D_{II} 로 분할한 후 각각의 영역에 대해 기존의 NDIF 법을 적용하여 시스템 행렬식을 구한다. 이를 위해 영역 D_I 의 내부 한 점에서의 음압을 다음과 같이 가정한다.

$$p_I(\mathbf{r}^{(I)}) = \sum_{s=1}^{N_I+N_a} A_s J_0(k|\mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|), \quad (3)$$

여기서 J_0 는 제 1종 0차 베셀함수를 의미하며, N_I 와 N_a 는 영역 D_I 의 경계 Γ_I 과 Γ_a 위에 놓여진 노드의 개수를 각각 나타낸다. 그리고 $\mathbf{r}^{(I)}$ 과 $\mathbf{r}_s^{(I)}$ 는 영역 내부의 한 점과 경계 위의 한 점에 대한 위치벡터를 각각 나타낸다.

식(2)에서 제시된 강체벽 경계조건을 영역 D_I 의 경계 Γ_I 위에 놓인 노드에 대해 이산화하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial p_I(\mathbf{r}_i^{(I)})}{\partial n_i^{(I)}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_I, \quad (4)$$

여기서 $\mathbf{r}_i^{(I)}$ 와 $n_i^{(I)}$ 는 i 번째 경계 노드의 위치벡터와 법선 방향을 각각 의미한다.

이제 식(3)을 식(4)에 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\sum_{s=1}^N A_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) = 0 \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_I,$$

식(5)는 다음과 같이 경계 Γ_I 과 접경 Γ_a 에 대해 분리해서 다시 작성한다.

$$\sum_{s=1}^{N_I} A_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) \quad (6)$$

$$+ \sum_{s=N_I+1}^{N_I+N_a} A_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N_I,$$

† 교신저자: 정희원, 한성대학교 기계시스템공학과

E-mail: swkang@hansung.ac.kr

Tel: 02-760-4228, Fax: 02-760-4329

* 대구 가톨릭대학교 기계자동차공학부

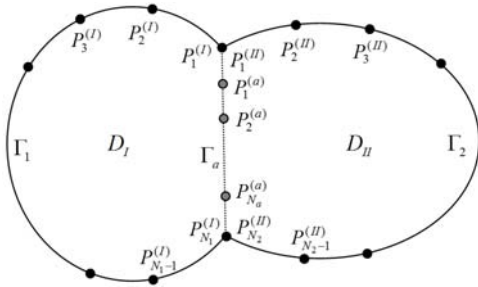


Fig. 1 Concave acoustic cavity divided with 2 convex domains

식(6)을 행렬식의 형태로 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{VM}_{11} \mathbf{A}_1 + \mathbf{VM}_{1a} \mathbf{A}_a = \mathbf{0} \quad (7)$$

마찬가지 방법으로, 영역 D_{II} 의 내부 한 점에서의 음압을 다음과 같이 가정한다.

$$p_{II}(\mathbf{r}^{(II)}) = \sum_{s=1}^{N_2+N_a} B_s J_0(k|\mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|), \quad (8)$$

영역 D_I 에 대해 수행한 과정을 반복하면, 영역 D_{II} 에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{VM}_{22} \mathbf{B}_2 + \mathbf{VM}_{2a} \mathbf{B}_a = \mathbf{0} \quad (9)$$

2.3 전체 시스템 행렬 구성 및 고유치 추출

식(7)과 식(9)에서 주어진 두 블록 영역 D_I 와 D_{II} 에 대한 시스템 행렬식으로부터 전체 영역에 대한 시스템 행렬식을 추출하기 위하여, 두 영역의 접경 Γ_a 에 위치한 노드에서의 연속 조건(음압 연속 및 음압 기울기 연속 조건⁽²⁾) 식(9)와 식(10)이 고려된다.

$$p_I(\mathbf{r}_i^{(I)}) = p_{II}(\mathbf{r}_i^{(II)}), \quad i = 1, 2, \dots, N_a, \quad (10)$$

$$\frac{\partial p_I(\mathbf{r}_i^{(I)})}{\partial n_i^{(I)}} = -\frac{\partial p_{II}(\mathbf{r}_i^{(II)})}{\partial n_i^{(II)}}, \quad i = 1, 2, \dots, N_a. \quad (11)$$

먼저 식(10)에 식(3)과 식(8)을 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{N_1+N_a} A_s J_0(k|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) \\ &= \sum_{s=1}^{N_2+N_a} B_s J_0(k|\mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|) \end{aligned} \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_a.$$

식(12)의 양변을 식(6)과 같이 변형한 후 행렬식으로 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{UM}_{a1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{UM}_{aa} \mathbf{A}_a \\ &= \mathbf{UM}_{a2} \mathbf{B}_2 + \mathbf{UM}_{aa} \mathbf{B}_a. \end{aligned} \quad (13)$$

다음으로 식(11)에 식(3)과 식(8)을 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{N_1+N_a} A_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) \\ &= -\sum_{s=1}^{N_2+N_a} B_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|) \end{aligned} \quad (14)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_a.$$

식(14)의 양변을 식(6)과 같이 변형하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{VM}_{a1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{VM}_{aa} \mathbf{A}_a \\ &= \mathbf{VM}_{a2} \mathbf{B}_2 + \mathbf{VM}_{aa} \mathbf{B}_a \end{aligned} \quad (15)$$

이제 식(7), 식(9), 식(14), 식(15)를 연립하면 다음과 같은 전체 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}(k) \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

여기서 최종 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(k)$ 은 고유치 파라미터 k 의 함수이며, $\mathbf{SM}(k)$ 과 \mathbf{C} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{SM} &= \begin{bmatrix} \mathbf{UM}_{aa} - \mathbf{UM}_{a1} \mathbf{VM}_{11}^{-1} \mathbf{VM}_{1a} & \mathbf{UM}_{a2} \mathbf{VM}_{22}^{-1} \mathbf{VM}_{2a} - \mathbf{UM}_{aa} \\ \mathbf{VM}_{aa} - \mathbf{VM}_{a1} \mathbf{VM}_{11}^{-1} \mathbf{VM}_{1a} & \mathbf{VM}_{a2} \mathbf{VM}_{22}^{-1} \mathbf{VM}_{2a} - \mathbf{VM}_{aa} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \{\mathbf{A}_a \quad \mathbf{B}_a\}^T \end{aligned} \quad (17, 18)$$

마지막으로 해석 대상 음향 공동의 고유치는 식(17)의 시스템행렬의 판별식 $\det[\mathbf{SM}(k)] = 0$ 의 해로부터 구할 수 있다⁽¹⁾.

3. 결 론

본 논문에서는 임의의 형상 음향 공동의 고유치를 구하기 위한 분할영역법 기반 NDIF법에 대한 이론 정립이 성공적으로 이루어졌다. 향후 정립된 이론 검증을 위한 예제 연구가 수행될 것이다.

후기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2010-0009422).

참고문헌

- (1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, "Eigenmode analysis of arbitrarily shaped two-dimensional cavities by the method of point-matching," *J. of the Acoustical Society of America*, 107(3), 1153~1160.
- (2) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, New York: Litton Education Publishing.