

탄성 파이프에서 전파하는 비틀림파와 인접 점성유체의 상호작용

Interaction between Torsional Waves Propagating in an Elastic Pipe and an Adjacent Viscous Fluid

朴春光*·김진오†

Chunguang Piao and Jin Oh Kim

1. 서론

초음파 기술이 다양한 분야에 널리 사용되는 사례 중 하나는 생산공정에서 유체의 성질이나 유체성질의 변화를 측정하는 것이다⁽¹⁾. 유체에 접하는 탄성판의 상호작용 개념이 Roth와 Rich⁽²⁾에 의해 제시된 이후, 유체에 담기는 도파관(waveguide)를 사용하는 연구가 많이 이루어져 오고 있다. 탄성봉에서의 비틀림파 또는 비틀림진동과 인접 점성유체와의 상호작용이 이론적 및 실험적으로 연구된 바 있다^(3,4). 본 논문은 Fig. 1에 도시한 바와 같은 탄성 파이프에서 전파하는 비틀림파와 파이프의 외부 또는 내부 점성유체와의 상호작용을 이론적으로 다룬다.

2. 파이프 외부 유체와의 상호작용

2.1 문제의 정식화

탄성 파이프가 Fig. 1(a)에 보인 바와 같이 외부 점성유체에 담겨 있고, 원주방향으로 진동하는 비틀림파가 축방향으로 전파한다. 파이프의 전단탄성계수는 G , 밀도는 ρ_s 이고, 유체의 점도는 μ , 밀도는 ρ_f 이다.

탄성 파이프에서 원주방향 진동변위 u_θ 와 유체에서 원주방향 진동속도 v_θ 는 각각 다음 운동방정식을 만족한다^(5,6).

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = G \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \quad r_i \leq r \leq r_o \quad (1)$$

$$\rho_f \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \quad r_o \leq r < \infty \quad (2)$$

파이프와 유체의 경계면에서 전단응력과 진동속도의 연속성에 의해 경계조건이 설정된다.

$$r = r_i \text{에서} \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 0 \quad (3)$$

$$r = r_o \text{에서} \quad G \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (4)$$

$$r = r_o \text{에서} \quad v_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \quad (5)$$

$$r \rightarrow \infty \text{에서} \quad v_\theta \rightarrow 0 \quad (6)$$

2.2 엄밀해

식(1)-(6)의 모든 물리량들을 무차원화 한다. 이때 길이 기준은 r_o , 속도 기준은 $c_0 [= (G/\rho_s)^{1/2}]$, 시간 기준은 r_o/c_0 이다. 이에 따른 무차원 변수는 $\rho = \rho_f/\rho_s$ 와 $R = \rho_f r_o c_0/\mu$ 이다. 무차원화 된 운

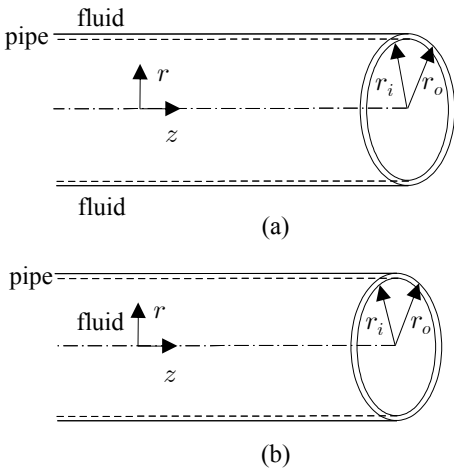


Fig. 1 Schematic of an elastic pipe; (a) pipe with an outer fluid, (b) pipe with an interior fluid.

† 교신저자; 정회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@ssu.ac.kr

Tel : (02) 820-0662, Fax : (02) 820-0668

* 정회원, 숭실대학교 대학원 기계공학과

동방정식과 경계조건을 만족하는 엄밀해를 구하는 과정에서 무차원 형태의 파동 전파속도 c 와 감쇠 h 가 다음 식으로 표현된다.

$$\frac{A_s \left[\frac{I_2(A_s)}{I_2(A_s r_i)} - \frac{K_2(A_s)}{K_2(A_s r_i)} \right]}{i\omega \left[\frac{I_2(A_s)}{I_2(A_s r_i)} - \frac{K_2(A_s)}{K_2(A_s r_i)} \right]} - \frac{\rho A_f K_2(A_f)}{R K_1(A_f)} \left[\frac{I_1(A_s)}{I_2(A_s r_i)} + \frac{K_1(A_s)}{K_2(A_s r_i)} \right] = 0 \quad (7)$$

$$A_s = \sqrt{(ih + \omega/c)^2 - \omega^2} \quad (8a)$$

$$A_f = \sqrt{(ih + \omega/c)^2 - i\omega R} \quad (8b)$$

식 (7)의 해는 Mathematica의 FindRoot 기능을 사용하여 구할 수 있다⁽⁷⁾. 그리하여 $c = c(R, \rho)$ 와 $h = h(R, \rho)$ 가 얻어진다.

3. 파이프 내부 유체와의 상호작용

3.1 문제의 정식화

탄성 파이프가 Fig. 1(b)에 보인 바와 같이 내부 점성유체를 담고 있고, 원주방향으로 진동하는 비틀림파가 축방향으로 전파한다.

탄성 파이프에서 원주방향 진동변위 u_θ 와 유체에 서 원주방향 진동속도 v_θ 는 각각 다음 운동방정식을 만족한다^(5,6).

$$\text{(식 (1)과 동일)} \quad r_i \leq r \leq r_o \quad (9)$$

$$\text{(식 (2)와 동일)} \quad 0 \leq r \leq r_i \quad (10)$$

파이프와 유체의 경계면에서 전단응력과 진동 속도의 연속성에 의해 경계조건이 설정된다.

$$r = r_o \text{에서} \quad \text{(식 (3)과 동일)} \quad (11)$$

$$r = r_i \text{에서} \quad \text{(식 (4)와 동일)} \quad (12)$$

$$r = r_i \text{에서} \quad \text{(식 (5)와 동일)} \quad (13)$$

$$r = 0 \text{에서} \quad \text{(식 (6)과 동일)} \quad (14)$$

3.2 엄밀해

식(9)-(14)의 모든 물리량들을 무차원화 한다. 2.2 절의 내용에서 r_o 를 r_i 로 변경하는 것 외에는 동일하다. 파동 전파속도 c 와 감쇠 h 가 다음 식으로 표현된다.

$$\frac{A_s \left[\frac{I_2(A_s)}{I_2(A_s r_o)} - \frac{K_2(A_s)}{K_2(A_s r_o)} \right]}{i\omega \left[\frac{I_2(A_s)}{I_2(A_s r_o)} - \frac{K_2(A_s)}{K_2(A_s r_o)} \right]} + \frac{\rho A_f I_2(A_f)}{R I_1(A_f)} \left[\frac{I_1(A_s)}{I_2(A_s r_o)} + \frac{K_1(A_s)}{K_2(A_s r_o)} \right] = 0 \quad (15)$$

식 (15)의 해로서 $c = c(R, \rho)$ 와 $h = h(R, \rho)$ 가 얻어진다.

4. 결 론

탄성 파이프에서 비틀림파의 전파와 인접 외부 또는 내부 점성유체와의 상호작용을 이론적으로 해석하였다. 수학적으로 식과 경계조건을 설정하고 엄밀해를 구하였다. 그 과정에서 파동 전파속도와 감쇠가 표현되는 식을 얻었고, 비틀림파에 대한 인접 점성유체의 영향을 나타낼 수 있게 되었다.

후 기

본 연구는 지식경제부 및 정보통신산업진흥원의 “IT융합 고급인력과정 지원사업”의 지원으로 수행되었음 (NIPA-2012-C6150-1101-0004).

참 고 문 헌

- (1) Lynnworth, L. C., 1989, Ultrasonic Measurements for Process Control, Academic Press, Boston.
- (2) Roth, W., Rich, S. R., 1953, A new method for continuous measurement - General theory of the ultraviscon, J. Appl. Phys., 24(7), 940-950.
- (3) Kim, J. O., Y. Wang, Bau, H. H., 1991, The effect of an adjacent viscous fluid on the transmission of torsional stress waves in a submerged waveguide, J. Acoust. Soc. Am., 89(3), 1414-1422.
- (4) Kim, J. O., Chun, H. Y., Interaction between the torsional vibration of a circular rod and an adjacent viscous fluid, ASME J. of Vib. Acoust., 125(1), 39-45.
- (5) Achenbach, J. D., 1975, Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland Pub., Amsterdam.
- (6) Fax. R. W., McDonald, A. T., 1998, Introduction to Fluid Mechanics, 5th ed., John Wiley & Sons, New York.
- (7) Wolfram, S., 1999, The Mathematica Book, 4th ed., Wolfram Media Inc., Champaign.