단순 다각형 내부의 두 가시성 다각형에 대한 집합 연산을 수행하는 효율적인 RMESH 알고리즘

김수환*

*부산외국어대학교

Efficient RMESH Algorithms for the Set Operations of Two Visibility Polygons in a Simple Polygon

Soo-Hwan Kim*

*Busan University of Foreign Studies

E-mail : shkim@bufs.ac.kr

요 약

단순 다각형 P의 가시성 다각형은 점이나 에지와 같은 가시원으로부터 가시적인 P의 내부 점들의 집합을 말한다. 가시성 다각형은 점들의 집합이므로 가시성 다각형에 대한 교집합과 합집합과 같은 집합 연산을 수행할 수 있다. 두 가시성 다각형의 교집합은 두 가시원으로부터 동시에 가시적인 점들의 집합이고, 합집합은 두 가시원 중 하나 이상에 가시적인 점들의 집합이다. 기존 연구로서 n개의 정점을 갖는 두 가시성 다각형에 대해 O(n) 시간에 수행되는 순차 알고리즘이 나와 있다. 본 논문에서는 $O(n^2)$ 크기의 재구성가능한 메쉬(Reconfigurable MESH) 병렬 모델에서 $O(\log^2 n)$ 시간에 해결하는 병렬 알고리즘을 제시한다.

ABSTRACT

The visibility polygon of a simple polygon P is the set of points which are visible from a visibility source in P such as a point or an edge. Since a visibility polygon is the set of points, the set operations such as intersection and union can be executed on them. The intersection(resp. union) of two visibility polygons is the set of points which are visible from both (resp. either) of the corresponding two visibility sources. As previous results, there exist O(n) time algorithms for the set operations of two visibility polygons with total n vertices. In this paper, we present $O(\log^2 n)$ time algorithms for solving the problems on a reconfigurable mesh with size $O(n^2)$.

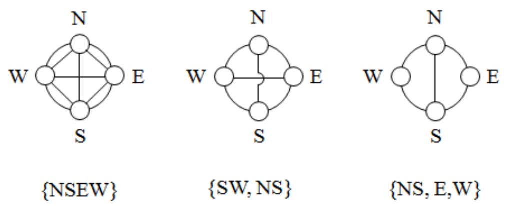
키워드

재구성가능한 메쉬, 가시성, 가시성 다각형

Ⅰ. 서 론

재구성가능한 메쉬(Reconfigurable Mesh; 줄여서 RMESH)는 1988년 Miller 등[1]에 의해 처음 소개된 병렬처리 모델로서 최근까지 RMESH 모델을 기반으로 한 병렬 알고리즘 설계에 대한 논문이 많이 발표되고 있다[2]. RMESH의 기본 구조는 프로세서들을 재구성가능한 버스 시스템에 의해 메쉬 형태로 연결된 것이다. 각 프로세서는 동(E), 서(W), 남(S), 북(N)의 4개 포트를 가지며, 알고리즘의 실행 중에 버스 스위치에 의해 각 포트 사이를 연결하거나 또는 차단하는 것이

가능하다(그림 1 참조). 프로세서의 포트 연결을 적절히 조절하여 프로세서들을 여러 버스 조각(subbus)으로 분할할 수 있다. 한 순간에 하나의 프로세서만이 버스 조각에 대한 방송(broadcast)을 할 수 있고, 같은 버스 조각에 연결된 모든 프로세서들은 방송된 자료를 상수 시간에 읽을 수 있다. $n \times n$ RMESH의 각 프로세서는 $O(\log n)$ 비트 크기의 기억공간을 상수 개 저장할 수 있고, 사칙연산을 비롯한 기본 연산을 상수 시간에 수행할 수 있다. 또한, 각 프로세서는 자신이 속한 행과 열을 인지할 수 있다.



<그림 1> 프로세서 스위치 상태의 예

다각형 내부의 두 점 p, q를 연결하는 선분이 다각형 외부와 만나지 않으면, 이 두 점 p와 q는 서로 가시적이라고 말한다. 다각형 내부의 점 p에 가시적인 점 q가 에지 e 상에 존재하면, 점 p는 에지 e에 가시적이라고 말한다. 단순 다각형 내부의 점이나 에지로부터 가시적인 다각형 내부 점들의 집합을 가시성 다각형(visibility polygon)이라고 부른다. 본 논문에서는 주어진 단순 다각형의 가시성 다각형들의 합집합과 교집합을 구하는 문제를 고려한다.

일반적인 두 다각형의 교차영역을 구하는 문제는 $O(n\log n + k)$ 시간에 해결된다[3].여기서 n은 두 다각형의 정점의 총 개수이고 k는 출력, 즉, 교차 영역의 크기로서 그 값은 $O(n^2)$이다. 다각형 내부의 두 가시성 다각형의 합집합과 교집합을 구하는 문제는 $O(n)$ 시간에 해결된다[4]. 가시원이 점이나 에지인 경우 가시성 다각형을 구하는데 선형 시간이 소요되므로, 다각형 내부의 두 가시원이 주어져 있을 때, 이 들로부터 가시적인 영역(합집합)과 동시에 가시적인 영역(교집합)을 구하는 문제도 선형 시간에 해결된다.

재구성가능한 메쉬에서 두 다각형의 교차 영역을 구하는 문제는 $O((n+k)^3)$ 크기의 RMESH에서 상수 시간에 구할 수 있다[5]. k는 $O(n^2)$이므로, 이 알고리즘은 최대 $O(n^6)$ 크기의 RMESH를 요구한다. 두 가시성 다각형의 교차 영역의 크기는 $O(n)$ 이므로 [5]의 알고리즘을 이용하면 최대 $O(n^3)$ 크기의 RMESH가 필요하다. 본 논문에서는 최대 $O(n^2)$ 크기의 RMESH를 사용하여 로그 시간에 두 가시성 다각형의 합집합과 교집합을 구하는 알고리즘을 제시한다.

II. 기본 성질

Kim[5]은 가시성 다각형에 대한 다음의 정리 1, 2, 3을 증명하였다.

정리 1. 다각형 P의 두 점 p와 q가 점 또는 에지인 가시원 s로부터 가시적이면, P의 내부에서 정의되는 p와 q 사이의 최단 경로 $\pi(p,q)$의 모든 점도 s로부터 가시적이다.

정리 2. 다각형 P에서 정의되는 두 가시성 다각형의 교차 영역은 항상 하나의 연결된 영역이다.

정리 3. 다각형 P에서 정의되는 두 가시성 다각형의 교차 영역은 $O(n)$ 개의 에지로 구성된다.

정리 1, 2, 3으로부터 다음의 따름정리 4, 5, 6을 유도할 수 있다.

따름정리 4. 다각형 P에서 정의되는 두 가시성 다각형 V_1과 V_2에 대해서, V_1의 한 에지와 한 점에서 교차하는 V_2의 에지의 개수는 두 개 이하이다.

따름정리 5. 다각형 P에서 정의되는 두 가시성 다각형이 분리되어 있는 경우 외에는 합집합 영역이 하나의 연결된 영역이다.

따름정리 6. 다각형 P에서 정의되는 두 가시성 다각형의 합집합 영역은 $O(n)$ 개의 에지로 구성된다.

III. 상수 시간 병렬 알고리즘

$n \times m$ RMESH에서 i번째 행과 j번째 열에 위치한 프로세서를 $R(i,j)$로 나타낸다, 여기서 $0 \le i < n$이고 $0 \le j < m$이다. $R(i,*)$는 R의 i번째 행을 의미하고, $R(*,j)$는 j번째 열을 의미한다. 이제 $2n \times 2n$ RMESH R의 첫 번째 열에 두 가시성 다각형 V_1과 V_2의 각 에지가 배치되어 있다고 하자. 여기서 가시성 다각형 $V_1 = (p_0, p_1, \dots, p_{r-1})$이고 $V_2 = (q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$, $n = r + s$이라고 하자. 초기에 $R(i,0)$에는 V_1의 각 에지 (p_i, p_{i+1})이 저장되고 $(i = 0, \dots, r-1, p_r = p_0)$, $R(r+j, 0)$에는 V_2의 각 에지 (q_j, q_{j+1})이 저장된다$(j = 0, \dots, s-1, q_s = q_0)$. 각 정점 v에는 다음과 같은 정보를 유지한다.

pid : v가 배치될 프로세서 열 번호
point : v의 좌표
adj : v에 인접한 정점의 pid
adj_point : v에 인접한 정점의 좌표

초기에 각 정점 p_i의 pid는 i이고($i=0,...,r-1$), p_i의 adj는 $i+1$, adj_point는 p_{i+1}이다($i=0,...,r-2$). p_{r-1}의 adj는 0이고 adj_point는 p_0이다. 각 정점 q_j의 pid는 $r+j$이고($j=0,...,s-1$), q_j의 adj는 $r+j+1$, adj_point는 q_{j+1}이다($j=0,...,s-2$). q_{s-1}의 adj는 r이고 adj_point는 q_0이다. 앞으로 $R(i,*)$가 보유하고 있는 에지의 pid 정보인 (pid, adj) 쌍을 (s_i,t_i)로 표시한다.

두 가시성 다각형의 교차영역을 구하는 알고리즘의 개요는 다음과 같다. 알고리즘의 종료시 교차 영역에 해당하는 다각형의 정점 리스트 $(v_0, v_1, ..., v_{m-1})$이 RMESH R의 첫 번째 열에 배치되고, $R(0,0)$에 교차영역의 크기 m이 저장된다. $m=0$이면 교차영역이 공집합임을 의미한다.

<u>알고리즘 1:</u>

1. $R(i,0)$는 자신이 보유한 에지 (v,w)의 정점 v에 대한 pid, point, adj, adj_point를 구한다.
2. V_1과 V_2의 경계선이 교차하는 지를 판별하고, 교차점이 있으면 단계 3으로 간다. 교차점이 없는 경우, $R(0,0)$에 교차영역의 크기를 0으로 설정하고($m=0$) 종료한다.
3. 각 $R(i,*)$는 에지 (s_i,t_i)와 한 점에서 교차하는 에지를 찾는다.
4. $R(i,*)$는 (s_i,t_i)에서의 교차점의 개수를 구하여 $R(i,0)$로 전달한다($i=0,1,...,r-1$).
5. R은 교차점의 총 개수 t를 구하고, $R(0,*)$에 있는 교차점부터 순서대로 각 교차점에 pid k를 지정한다, $k=n,...,n+t-1$.
6. 각 $R(i,*)$가 보유하고 있는 교차점이 (s_i,t_i)와 (s_j,t_j)의 교차점인 경우, $R(j,*)$에 이 교차점 정보를 전달한다, $i=0,...,r-1$, $j=r,...,n-1$.
7. 각 $R(i,*)$는 자신이 보유한 정점과 교차점들의 정렬된 리스트 $(s_i=s_{i,0}, s_{i,1}, ..., s_{i,k-1}=t_i)$에서 교차영역의 에지가 되는 구간 $(s_{i,h}, s_{i,h+1})$을 찾아 정점 $s_{i,h}$에 대한 adj, adj_point 값을 설정한다($3 \le k \le 4$).
8. 각 정점의 adj 정보에 의해 구성되는 유향 그래프를 [5]의 방식으로 R에 임베딩한다.
9. 교차점에 해당하는 정점을 보유하고 있는 프로세서 하나를 선택하여 특별한 기호를 방송하고 이를 읽은 프로세서들로 구성된, 유향 사이클그래프를 구성하는 에지들을 [6]의 방식으로 사이클 정점 순서를 찾아, R의 첫 번째 열에 배치한다.

위 알고리즘 1에서 단계 9를 제외하면 상수 시간에 수행된다. 단계 9는 $O(\log^2 n)$ 시간에 수행된다[6]. 두 가시성 다각형의 합집합을 구하는 알고리즘은 알고리즘 1과 거의 유사하다. 두 가시성 다각형이 분리되어 있지 않은 경우, 합집합 영역은 하나의 연결된 영역이다. 알고리즘 1의 단계 7을 다음과 같이 수정하면 합집합 영역을 구할 수 있다.

단계 7: 각 $R(i,*)$는 자신이 보유한 정점과 교차점들의 정렬된 리스트 $(s_i=s_{i,0}, s_{i,1}, ..., s_{i,k-1}=t_i)$에서 합집합 영역의 에지가 되는 구간 $(s_{i,h}, s_{i,h+1})$을 찾아 정점 $s_{i,h}$에 대한 adj, adj_point 값을 설정한다($3 \le k \le 4$).

교차점을 중심으로 어떤 세그먼트가 합집합 영역인지 교집합 영역인지는 두 에지의 방향을 조사하면 알 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 $n \times n$ RMESH에서 두 가시성 다각형의 교집합과 합집합을 구하는 $O(\log^2 n)$ 시간 알고리즘을 제시하였다. 앞으로의 연구과제는 프로세서를 $o(n^3)$를 사용하여 상수 시간으로 수행하는 알고리즘을 개발하는 것과 세 개 이상의 가시성 다각형들에 대한 집합 연산을 수행하는 효율적인 RMESH 알고리즘을 개발하는 것이다.

참고문헌

[1] R. Miller, V. K. Prasanner Kumar, D. Reisis, and Q. Stout, Meshes with Reconfigurable Buses, Proc. 5th MIT Conf. on Adv. Res. in VLSI, 163-178, 1988.

[2] R. Wankar and R. Akerkar, "Reconfigurable architectures and algorithms: a resear survey", I.J. of Computer Science and Applications, vol. 6, no. 1, 108-123, 2009.

[3] S. S. Ahn, "Output Sensitive Polygon Intersection," MS thesis, KAIST, Korea, 1991.

[4] S. H. Kim, "Optimal Algorithms for theSet Operations of Two Visibility Polygons in a Simple Polygon," J. of KIISE: Computer Systems and Theory, vol. 31, no. 2, 102-111, 2004 (in Korean).

[5] S. H. Kim, "Constant time RMESH algorithms for polygon intersection problems," J. of KIISE: Computer Systems and Theory, vol. 26, no. 11, 1344-1352, 1999 (in Korean).

[6] S. H. Kim, "An Efficient RMESH algorithm for finding a cycle vertex sequence from the edge set of a directed cycle graph," J. of KIISE: Computer Systems and Theory (accepted).