

EDISON Co-rotational Plane beam-Dynamic tip load를 이용한 가진주파수 변화에 따른 외팔보의 자유단 진동 연구

박 철 우^{1*} · 주 현 식^{1*}

¹서울대학교 우주항공공학과

초록

In this paper, Timoshenko and Euler-Bernoulli beam theories (EB-beam) are used, and Fast Fourier Transformation(FFT) analysis is then employed to extract their natural frequencies using both analytical approach and Co-rotational plane beam(CR-beam) EDISON program. EB-beam is used to analyze a spring-mass system with a single degree of freedom. Sinusoidal force with various frequencies and constant magnitude are applied to tip of each beam. After the oscillatory tip response is observed in EB-beam, it decreases and finally converges to the so-called 'steady-state.' The decreasing rate of the tip deflection with respect to time is reduced when the forcing frequency is increased. Although the tip deflection is found to be independent of the excitation frequency, it turns out that time to reach the steady state response is dependent on the forcing frequency.

Keywords : Timoshenko, Euler-Bernoulli beam, FFT, Co-rotational plane beam model, steady-state, dynamic tip load

1. 서 론

외팔보(cantilevered beam)는 미세한 자동 기계 장치로 된 조종자(micro-robotic manipulators)의 분야나 원자력 발전소, 항공 산업, 현미 수술(micro-surgery) 장비에 사용되는 기계 장비의 요소, 그리고 정밀성을 요구하는 다양한 산업분야에 사용되고 있다. 대부분의 경우, 외팔보의 자유단에 조화 가진을 받게 되고, 가진주파수가 고유주파수와 크게 다르다 하더라도 외팔보에서 세로방향(transverse direction)으로 진동이 일어나게 된다.

Pratiher와 Dwivedy(2011)은 주기적으로 변하는 자기장 영역에서 외팔보의 진동과 주파수 분석을 비선형적으로 수행하였다. 또한 Thomas, Wilson 그리고 Wilson(1973)은 Timoshenko beam을 유한요소로 해석하여 고유주파수를 구하는 연구를 수행하였다.

본 논문에서는, Timoshenko와 Euler-Bernoulli beam theory를 적용하여 외팔보를 1차 자유도 spring-mass model로 설정하여 해석을 진행하고, EDISON Co-rotational Plane beam Dynamic tip load(CR beam)를 사용하여 얻어진 예측결과를 분석하여 spring-mass model과 비교하였다. 또한 CR beam을 통해

얻은 결과를 바탕으로 감쇠현상 대한 분석을 진행하였다.

2. 본 론

이 장에서는 외팔보의 이론적인 모델링과 신속 Fourier 변환을 이용한 해석의 타당성을 검증한다. 또한, 외팔보 끝단에 일정한 진폭 및 변화하는 가진주파수에 대한 주파수 반응에 대한 경향성을 확인한다.

2.1 이론적 배경

2.1.1 이론적 모델

외팔보를 무게가 없는 강성 k 와 대응하는 유효 질량인 m_{eff} 가 자유단에 달려 있는 형태로 가정을 한다. 이 모델의 고유주파수는 (1)식과 같이 표현할 수 있으며, 보의 물성치를 통해 강성 k 역시 구할 수 있다.

$$w_{eff} = \sqrt{\frac{k}{m_{eff}}}, \quad k = \frac{3EI}{L^3} \quad (1)$$

Table 1. 이론값 및 해석값의 주파수 비교

	고유주파수(Hz)	가진주파수(Hz)					
이론값	4	1	2	3	6	8	10
해석값	3.99999	1.00002	1.99995	2.99997	5.99995	7.99999	10.00004

또한, 끝단에 있는 유효 질량은 (2),(3)식을 통해 아래와 같이 구할 수 있다. (여기서 α_n 은 continuous system을 통해 나온 식에서의 첫 번째 모드형상에서의 계수를 나타낸다.)

$$m_{eff} = \frac{3EI}{L^3 w_{eff}^2}, w_{eff} = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad (2)$$

$$m_{eff} = \frac{3EI}{L^3} \frac{mL^3}{\alpha_n^4 EI} = \frac{3}{\alpha_n^4} m \quad (m = beam\ mass) \quad (3)$$

따라서 외팔보를 아래의 (4)식과 같이 1차 자유도 형태로 나타낼 수 있다.

$$m_{eff} \ddot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

여기서 보의 자유단에 조화 가진을 세로방향(transverse direction)으로 받는다고 생각하면 (5)식으로 나타낼 수 있게 되어 최종적인 이론식을 구할 수 있다.

$$m_{eff} \ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \quad (5)$$

2.1.2 CR-beam 모델

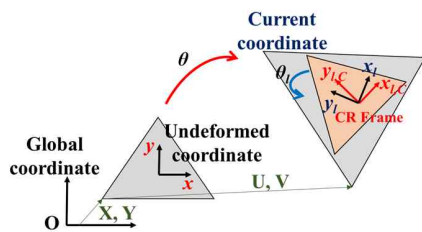


Fig. 1 CR-Beam 모델

Fig. 1과 같이 정의된 요소의 운동에너지와 관성력에 의한 가상일의 관계로 CR-beam 모델의 방정식을 아래의 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_y \ddot{x} + C_y \dot{x} + K_y x = F(t) \quad (6)$$

$$M_y = \frac{\partial f_g}{\partial \dot{x}}, C_y = \frac{\partial f_d}{\partial \dot{x}}, K_y = \frac{\partial f_g}{\partial x} \quad (7)$$

식(7)을 통하여 CR-beam 방정식은 감쇠효과(damping effect)를 포함한다.

2.1.3 신속 Fourier 변환 (FFT) 분석

EDISON Program 'Co-rotational Plane Beam - Dynamic tip load'에서 가정한 모델에 대한 가진주파수 및 고유주파수를 검증하기 위하여 MATLAB 내장함수인 FFT를 이용하였다. 다음 Fig. 2은 4Hz의 고유주파수와 3Hz의 가진주파수에 대한 신속 Fourier 변환을 나타낸다. 단위 시간(time step)은 0.01초이며, 총 5,000초에서의 외팔보 변화를 분석하였다. 보다 정확한 검증을 위하여 1,000,000개의 단위시간 전진에 대해 분석하였다. Table 1.은 MATLAB 내장함수 FFT를 이용해 계산한 두 모델의 가진주파수 및 고유주파수 값이 일치하는 것을 나타낸다.

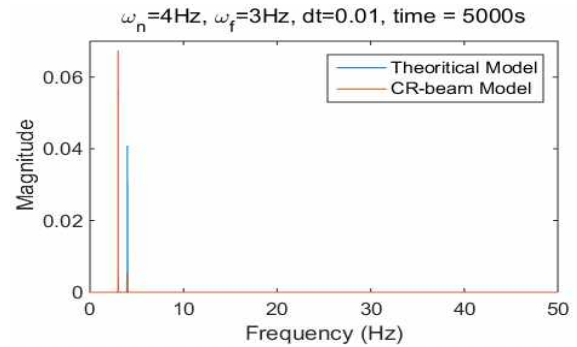


Fig. 2 두 모델의 FFT 그래프

2.2 해석결과

2.2.1 가진주파수 변화에 대한 외팔보 자유단의 거동경향

Fig. 3은 단면 형태가 원인 외팔보 자유단에 하중이 가해지는 형태를 나타낸 것이다. 외력의 크기는 시간 t에 따라 사인함수형태를 따라가며, 본 논문에서 해석을 진행한 모델의 물성치 값과 외력 크기는 Table. 2에 나타났다.

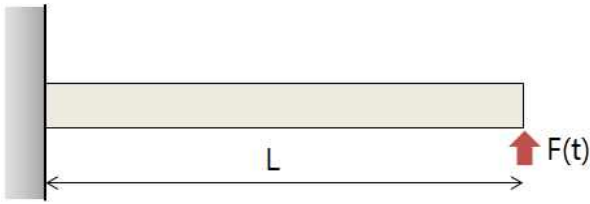


Fig. 3 외팔보 자유단에 외력이 가해지는 형태

Table. 2 설정된 모델의 물성치 값과 외력의 크기

	수치
단면 반지름 (m)	0.2764
외팔보 길이 (m)	10
영률 (Pa)	2.1×10^{11}
밀도 (kg/m^3)	7.85×10^3
외력 (N)	$10^5 \sin(\omega_f t)$

Fig. 4에서 고유 진동수는 4Hz이고 가진 주파수는 3Hz 일 경우, 파란색 그래프는 Timoshenko and Euler-Beam Theory에 근거한 이론값이며, 주황색 그래프는 CR-beam에서의 결과를 나타낸다. 500초 동안 살펴보았을 때, CR-beam에서의 결과는 시간이 지남에 따라 자유단 변위가 점점 줄어드는 것을 관측할 수 있었다. 반면, Timoshenko and Euler-Beam Theory에 근거한 이론값은 감쇠를 고려하지 않은 모델이기 때문에 자유단 변위가 감소하지 않고 그대로 유지되는 정상상태로 나타났다.

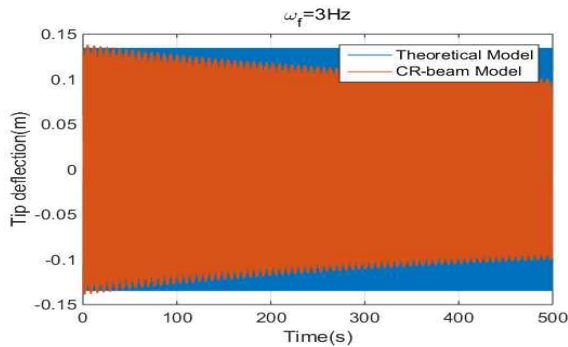


Fig. 4 500초 동안에 따른 두 모델의 자유단 변위의 경향

CR-beam의 결과에서 시간에 따른 자유단 변위에 대한 경향성과 정상상태를 파악하기 위해 충분한 시간인 10,000 초에 대한 연구를 진행하였고, 정상상태를 충분히 확인할 수 있는 5,000초에 대한 결과를 Fig. 5를 통해 나타내었다.

Fig. 5에서 CR-beam을 이용한 결과 값은 가진주파수 ω_f 가 증가할수록 정상상태가 되기 전까지 시간에 따른 끝단 변위 감소율이 증가하며 외팔보는 이론적인 변위에 비해 변

위가 감소하는 경향을 나타내었다. 또한, 가진주파수 ω_f 가 고유주파수 ω_n (4Hz)에 근접할수록 외팔보의 자유단 세로 방향의 변위가 증가함을 알 수 있었다. 가진주파수의 변화에 따른 세로방향의 변위의 크기는 다르나 일정시간이후에 정상상태로 상태변화가 일어남을 알 수 있었다. 이는 2.2.2에서 더 자세히 기술하였다.

2.2.2 변화하는 가진 주파수에서 주기에 따른 최대 끝단 변위의 경향

Fig. 6에서는 가진주파수가 주어졌을 때 주기가 진행됨에 따라 세로방향의 최대 변위의 변화를 나타내었다. 가진주파수에 따른 최대 변위의 크기는 Fig 5.에서 확인했듯이 다른 경향을 나타냈으나, 일정 주기가 지났을 때 최대 변위가 일정해지는 정상상태가 됨을 확인할 수 있었다. 따라서 분해된 결과에 사용된 모델은 고유주파수와 같지 않은 변화하는 가진주파수에 대하여 가진주파수가 증가할수록 외팔보의 거동은 감쇠하는 경향이 있음을 제시한다. Fig. 6에 따르면, 정상상태가 되기 전까지 가진 주파수에 따라서 감쇠 경향성은 불규칙한 형태를 보였지만, 정상상태에 이르는 시간을 확인하기 위해 가진주파수에 따른 정상상태에 다다른 주기를 확인하여 약 3000초이며, 이는 Table. 3에 나타냈다.

Table. 3 가진주파수 변화에 따른 정상상태 도달시간

가진주파수 (Hz)	해석 모델 주기(s)	정상상태 도달시간 (s)
1	1	3000
2	0.5	3000
3	1	3000
6	1	3000
8	0.25	3000
10	0.5	3000

3. 결 론

본 논문에서는 Timoshenko and Euler-Beam Theory에 근거한 이론적인 외팔보 자유단의 변형값과, CR-beam을 이용한 외팔보의 자유단의 변형값에 대한 경향 및 차이점을 제안하였다. 이론적 외팔보의 자유단 변형에 대한 해석의 타당성을 제시하기 위하여 신속 Fourier변환을 사용하여 두 모델의 고유주파수와 가진주파수를 비교하였고, CR-beam을 이용하여 조화가진의 변화에 대한 결과를 제시하였다. 비교된 값들을 통해 외팔보의 자유단 변위 특징을 나타내었으며, 변화되는 가진주파수에 대한 경향을 확인하였다.

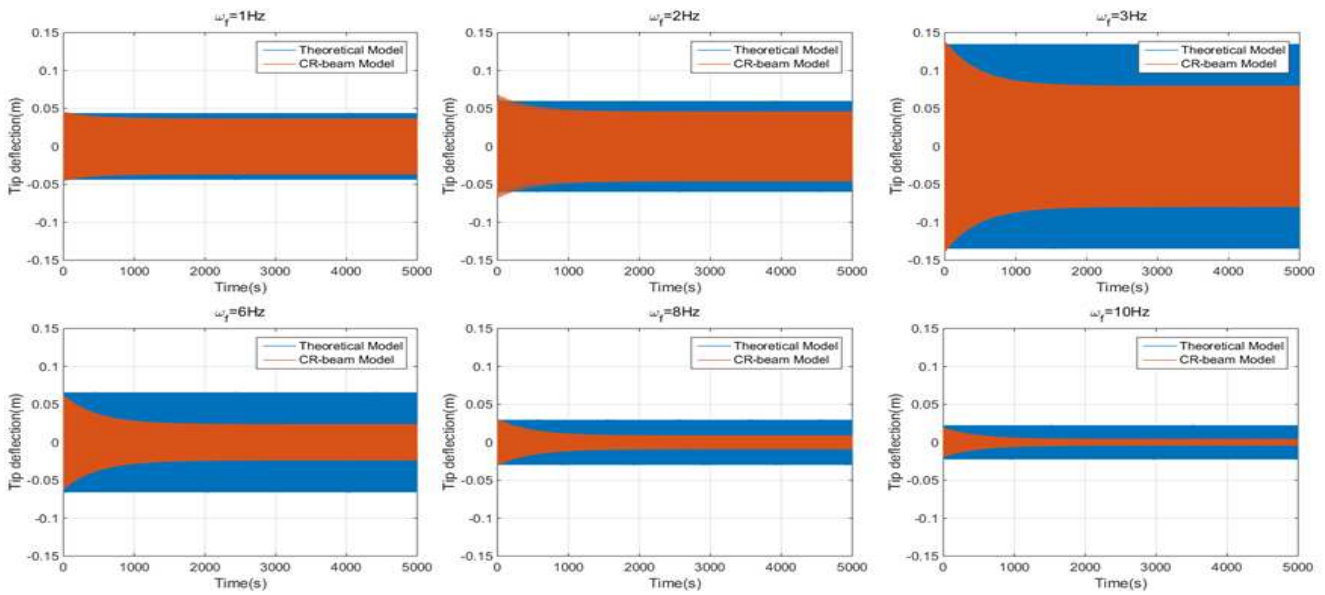


Fig. 5 가진주파수 변화에 따른 자유단의 물리적 변위 응답

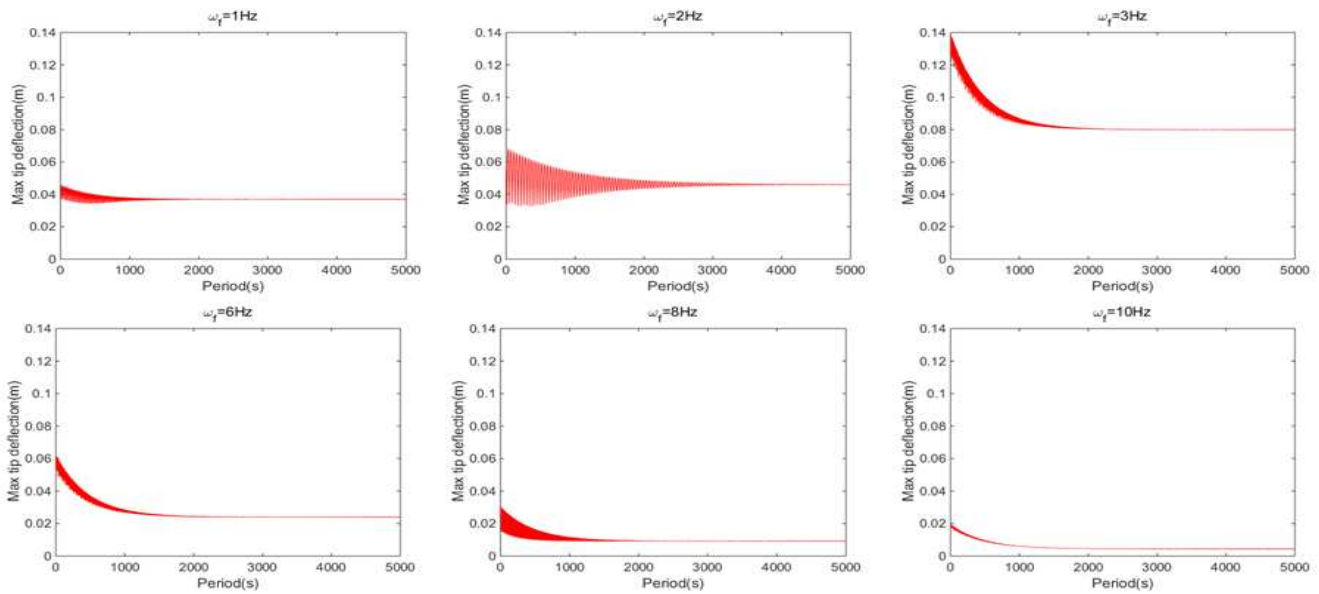


Fig. 6 가진주파수 변화에서 주기에 따른 최대 진폭 변화 그래프

가진주파수가 증가함에 따라 외팔보의 자유단에서 각 주기의 최대 자유단 변위비가 증가하여 감쇠를 고려하지 않은 Timoshenko and Euler-Beam Theory에 근거한 외팔보의 자유단 변위와는 큰 차이가 있음을 제시한다. 고유주파수와 근접한 가진주파수에 대해서는 공진주파수에 근접하기 때문에 외팔보의 자유단 세로방향 변위가 증가하게 된다. 또한, FFT그래프에서 가진주파수에서 y축 크기 값이 고유주파수에서의 크기 값보다 더 크기 때문에, 시간이 충분히 지남에 따라 외팔보는 모델이 가진 고유주파수가 아닌 가진주

파수에 의존하는 경향을 보였다. 마지막으로, 6가지 경우 모두를 비교해 본 결과, 정상상태에 도달하는 시간은 가진주파수와는 독립적인 관계임을 확인하였다.

실제 외팔보 자유단의 거동은 감쇠효과가 고려된 CR-beam의 예측 결과에 가깝다. 따라서 본 논문에서 제시한 가진주파수와 외팔보 자유단 변위의 관계를 입증하기 위해서는 CR-beam 모델의 고유주파수가 변화함에 따른 자유단 변위의 관계, 조화 가진에서 고정된 외력의 크기 변화에 따른 자유단 변위의 관계가 필요하다.

참 고 문 헌

- Barun, P., and Santosha, K. D.,** (2011) Nonlinear vibrations and frequency response analysis of a cantilever beam under periodically varying magnetic field, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 39, pp.378-391.
- Thomas, D. L., Wilson, J. M., and Wilson, R. R.,** (1973) Timoshenko beam finite elements, *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), 315-330.
- Le, T. N., Battini, J. \M., HjiAj, M.,** (2011) Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams, *computational Mechanics*, 48(2), pp.153-161.
- Craig Jr, R. R., and Kurdila, A. J.,** (2006) *Fundamentals of Structural Dynamics*, 2nd Edition, pp. 200-205.
- Singiresu, S. R.,** (2011) *Mechanical Vibrations*, 5th Edition, pp.721-728.