# 파라미터 추정기법을 이용한 회전익 멀티로터 시스템 모델링

Multicopter System modeling using parameter estimation

조완석[1]*, 이명화[2]
한국항공대학교[1], 한국항공대학교[2]

초 록

본 논문에서는 멀티로터 시스템의 모델리을 위한 방법으로 파라미터 추정법을 제시하였으며 이를 위해 실제 비행데이터를 이용한다. 파라미터 추정법으로는 예측오차 기법과 순화최소자승법이 사용되었고 그 결과를 나타내었다.

## 1. 서 론

드론이라 불리는 무인 회전익 비행기는 과거에 군사적 목적으로 개발되어왔으나 최근 다양한 분야에서 실용성을 보여 민간 수요가 급증하였다. 이에 따라 범세계적으로 많은 기업들이 드론 사업에 뛰어들어 핵심 기술개발을 진행하고 있다.

무인 회전익 기체가 기본적으로 작업을 수행하기 위해서는 신뢰할만한 성능의 자동항법장치 및 제어기능을 갖추고 있어야 하며 이에 따라 작업 성능의 질이나 안정성이 보장되는 만큼 기체에 대한 정확한 모델링과 그에 맞는 제어기설계가 필수적이다.

본 논문에서는 RLS(순환최소자승법), PEM(오차예측법) 을 이용한 회전익 기체의 시스템 식별 기법을 제안하였으며 실제 비행데이터를 이용해 본 모델에 대한 상태공간식의 시스템 행렬을 추정하여 시뮬레이션을 구성한 후 출력값을 비교해 성능을 검증하였다.

## 2. 본 론

### 2.1 수학적 멀티로터 시스템 모델링

기존의 멀티로터 시스템 모델링 방법은 수학적인 모델링 기법들을 이용하여 구동기 운동방정식과 그 외의 관성 모멘트 등을 측정하여 멀티콥터 시스템의 운동방정식을 구하여 평형점 에서의 전달함수를 구한다.[1]

구동기의 운동 방정식은 아래와 같다. 먼저 모터의 운동방정식은 다음과 같으며

$$V_{in} = i_M R_M + L_M \frac{di}{dt} + K_{bemf}\omega_M \tag{1}$$

$$T_e = J\frac{d\omega_M}{dt} + B\omega_M + T_L = K_M i_M \tag{2}$$

프로펠러의 항력과 양력의 관계식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} T &= K_T \rho n^2 D^4 \\ Q &= K_Q \rho n^2 D^5 \end{aligned} \tag{3}$$

위 식(1)과 (2)에서 모터식에서 $T_L$은 프로펠러의 토크 $Q$가 되며 위 식을 정리하여 미소변화량에 대하여 푼 뒤 전달함수를 구하면

$$\frac{\delta\omega}{\delta V} = \frac{b}{a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \tag{4}$$

으로 표현이 가능하다. 여기서 $a_1, a_2, a_3, b$ 는 각각

$$\begin{aligned} a_1 &= JL_M \\ a_2 &= K_T \rho D^4 \frac{1}{2\pi}\omega_{ss} L_M - JR + L_M B \\ a_3 &= R_M B + K_M K_{bemf} + K_Q \rho D^5 \frac{1}{2\pi^2}(\omega_{ss} R) \\ b &= -K_M \end{aligned} \tag{5}$$

이다.

다음으로 프로펠러 모델 식을 선형화 하면 아래와 같이 선형화가 가능하다. 아래 식에서 평형점에서의 각속도는 헥사콥터가 호버링 하는 순간의 각속도 이다.

$$\begin{aligned} (T_{ss} + \delta T) &= K_T \rho \left(\frac{\omega_{ss} + \delta\omega}{2\pi}\right)^2 D^4 \\ \delta T &= K_T \rho \frac{1}{2\pi^2}(\omega_{ss}\delta\omega) D^4 \end{aligned} \tag{6}$$

프로펠러 추력 식을 이용하면 추력식이 위와 같이 선형화가 가능하다.

결과적으로 $\frac{\delta T}{\delta V}$ 는 분모가 2차인 이차 시스템으로 된다는 것을 알 수 있으며 여기서 2차 시스템은 입력 이 전압(V), 출력이 추력(T)인 전달함수로 생각할 수 있다.

## 2.2 멀티로터 시스템 운동 방정식

쿼드콥터나 헥사콥터와 같은 멀티로터 시스템의 운동방정식은 아래와 같이 병진운동과 회전운동으로 나누어 생각할 수 있다. 운동방정식 유도과정에서 시스템은 강체로 가정하며 공기에 의한 항력 로터간의 간섭은 무시하며 시불변 시스템으로 가정하고 비행 시 비행체의 회전중심과 무게중심이 일치한다고 가정하였다.

멀티로터 시스템의 운동방정식을 표현하기 위해 NED(North-East-Down)관성 좌표계와 x-y-z 기체고정 좌표계를 이용하였으며 두 좌표계간의 좌표변환 행렬은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C_N^B = \begin{bmatrix} c\theta\, c\psi & c\theta\, s\psi & -s\theta \\ -c\phi\, s\psi + s\phi\, s\theta\, c\psi & c\phi\, c\psi + s\phi\, s\theta\, s\psi & s\phi\, c\theta \\ s\phi\, s\psi + c\phi\, s\theta\, c\psi & -s\phi\, c\psi + c\phi\, s\theta\, s\psi & c\phi\, c\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

위 좌표변환 행렬을 이용하여 멀티로터 시스템의 비선형 운동방정식을 표현하면,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rv - Qw - gsin\theta \\ Pw - Ru + gcos\theta \sin\phi \\ Qu - Pv + gcos\phi \cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_z/m \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P + Q\sin\phi\tan\theta + Rcos\phi\tan\theta \\ Q\cos\phi - R\sin\phi \\ Q\sin\phi\sec\theta + R\cos\phi\sec\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}})QR - \frac{I_P \omega_G}{I_{xx}} Q + \frac{1}{I_{xx}} L \\ (\frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}})PR - \frac{I_P \omega_G}{I_{yy}} P + \frac{1}{I_{yy}} M \\ (\frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}})PQ - \frac{1}{I_{zz}} N \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_N \\ \dot{P}_E \\ \dot{P}_D \end{bmatrix} = C_N^B \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} F_z \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 \\ l(T_5 - T_2) \\ l(T_1 + T_6 - T_3 - T_4) \\ Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 + Q_5 - Q_6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

미소 변화량으로 위 운동방정식을 선형으로 근사화 시키면 아래와 같이 선형 운동 방정식이 얻어 진다.

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{u} \\ \delta\dot{v} \\ \delta\dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g\delta\theta \\ g\delta\phi \\ -\delta F_z/m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta\dot{P} \\ \delta\dot{Q} \\ \delta\dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta L/I_{xx} \\ \delta M/I_{yy} \\ \delta N/I_{zz} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta P \\ \delta Q \\ \delta R \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 2.3 PEM(Prediction Error Method)

PEM(예측 오차 기법)은 파라미터 추정기법의 한 종류로서 예측값을 실제값의 데이터와 계산하여 그 오차를 줄여나가는 기법이다.[2]

$$\epsilon(t, \theta_*) = y(t) - \hat{y}(t|\theta_*) \quad (14)$$

여기서 $y(t)$는 실제 값이며 $\hat{y}(t|\theta_*)$는 예측 값이다. 여기서 구해진 오차값 $\epsilon(t, \theta_*)$를 이용해 노옴 $V_N(\theta, Z^N)$ 을 구한다.

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} l(\epsilon_F(t, \theta)) \quad (15)$$

본 논문에서 함수 $l(\bullet)$은 이차형식으로

$$l(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon^2 \quad (16)$$

로 하였으며 최소화 기법으로는 수치적 최소화 기법을 이용하여서 그 식은 아래와 같다.

$$\hat{\theta}_N^{(i+1)} = \hat{\theta}_N^{(i)} - \mu_N^{(i)} [R_N^{(i)}]^{-1} V_N{}' (\hat{\theta}_N^{(i)}, Z^N) \quad (17)$$

여기서 $\mu_N^{(i)}$은 스탭 사이즈가 되고 $R_N^{(i)}$은 수색 방향을 수정하는 벡터이다.

### 2.4 RLS(Recursive Least Square)

RLS(순환최소자승법)은 파라미터 추정기법의 한 종류로서 그 식은 다음과 같다.

$$\theta = [X^T X]^{-1}[X^T Y] \tag{18}$$

여기서 $\theta$는 찾고자 하는 파라미터(Parameter) 행렬이고 $Y$ 는 출력 행렬, $X$ 는 상태 행렬이다.

### 2.5 상태 변수 및 상태 방정식

위에서 유도한 해석적 방법에서 입력(전압) 과 출력(각속도)사이의 전달함수는 2차 전달 함수인 것을 보였다. 여기서 모터의 인덕턴스는 매우 작기 때문에 무시할수 있다. 이를 이용하면 입력으로 전압과 출력으로 자세각 $\phi$ 또는 $\theta$사이의 전달함수는 3차함수로 볼 수 있다. 이를 이용하여 상태방정식은 3차 시스템이 되어야 하므로 아래와 같이 상태 변수를 선정하였다. [3]

$$\begin{aligned} X &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \tag{19}$$

2.5.1 x-axis state variable

$$X = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ u \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ U = PWM_{Pitch} \tag{20}$$

2.5.2 y-axis state variable

$$X = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ v \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ U = PWM_{Roll} \tag{21}$$

### 2.6 파라미터 추정 결과

2.6.1 y-axis 시스템 행렬 추정

y축의 추정된 상태공간 행렬은 아래와 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1.0123 & 2.6292 & 0.0483 \\ 0.4296 & -0.0991 & 0.1871 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0614 \\ 0.0021 \end{bmatrix} \tag{22}$$

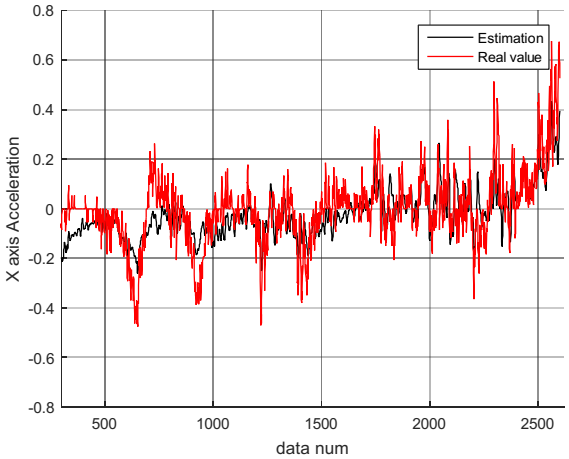


Fig 1. Angular acceleration estimation

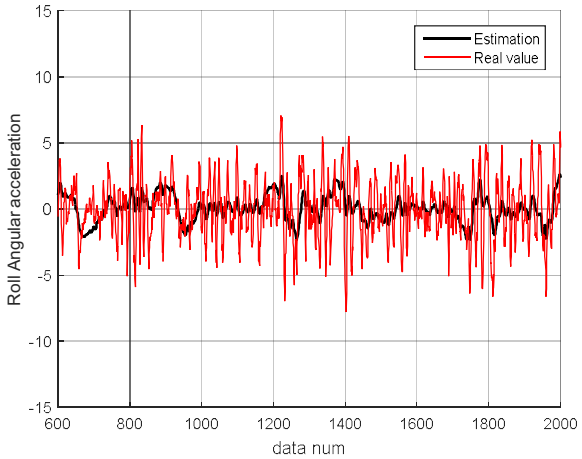


Fig 2. Acceleration estimation

추정된 상태공간 행렬을 이용하여 전달함수를 구하면 아래와 같다.

$$\frac{\delta\theta}{\delta PWM_{Pitch}} = \frac{-0.04133\,s + 0.007648}{s^3 - 0.4581\,s^2 + 11.69\,s - 0.2161} \tag{23}$$

2.6.2 x-axis 시스템 행렬 추정

x축의 추정된 상태 공간 행렬은 아래와 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -17.0123 & 0.7744 & -1.0878 \\ -0.2931 & 0.0549 & 0.1256 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0329 \\ -0.001 \end{bmatrix} \tag{24}$$

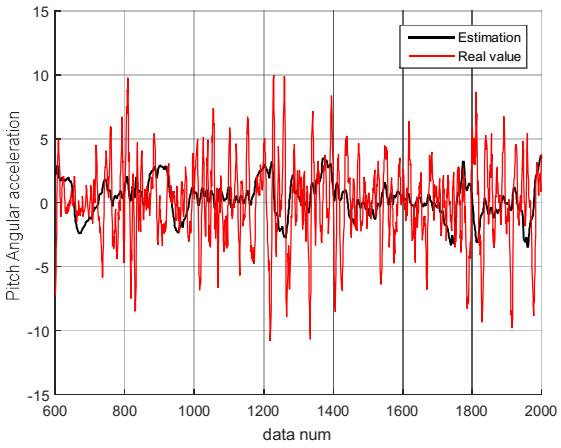


Fig 3. Angular acceleration estimation($rad/s^2$)

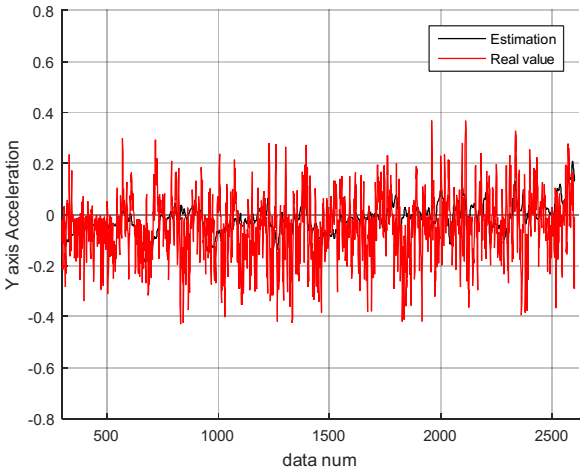


Fig 4. Acceleration estimation ($m/s^2$)

추정된 상태공간 행렬을 이용하여 전달함수를 구하면 아래와 같다.

$$\frac{\delta\theta}{\delta PWM_{Roll}} = \frac{-0.03288\,s + 0.005194}{s^3 - 0.8999\,s^2 + 17.8\,s - 2.534} \quad (25)$$

결정된 모델의 정확도를 식(26)의 값으로 나타내었으며

$$fit = \left[1 - \frac{|y - \hat{y}|}{|y - \bar{y}|}\right] \times 100\% \quad (26)$$

여기서 $y$는 실제 출력을 $\hat{y}$는 추정시스템의 출력을 $\bar{y}$는 실제출력의 평균을 나타낸다. 그 결과 x축과 y축의 정확도는 55% 24%를 보였다.

## 3. 결 론

파라미터 추정기법을 이용하여 멀티로터 시스템을 모델링 하기위해 예측오차 기법과 순화최소자승법을 이용하였고 그 결과 실제 데이터의 노이즈 성분을 제거할 때 더욱 정확한 모델을 찾을수 있을것으로 보인다. 모델링의 타당성을 검증하기 전에 파라미터 추정법을 이용하여 선정된 상태변수들이 타당한지 검증하는 단계가 필요하다.

## 후 기

본 연구는 미래창조과학부 및 정보통신기술 진흥센터의 방송중계 차량 탑재형 멀티콥터캠 시스템 기술 개발 사업의 연구결과로 수행 되었음.

## 참고문헌

[1] S.H.Kim, 2014, Motor Control, Bokdu
[2] L . Ljung, 1999, System Identification Theory for the user, PRENTICE HALL PTR, Upper saddle River
[3] Taesam Kang, 2015, H-infinity Control System Design for a Quad-rotor, Journal of Institute of Control, Robotics and Systems