

# 시공간 선 부호 시스템의 아웃티지 확률 분석

김현수 · 이주영 · 양승건 · 임승찬\*

한경대학교

## Outage Probability Analysis of Space-Time Line Code System

Hyeonsoo Kim · Juyoung Lee · Seung Geon Yang · Seung-Chan Lim\*

Hankyong National University

E-mail : julie019@naver.com / juyoung05@hanmail.net / tmdrjs1543@naver.com / sclim@hknu.ac.kr

### 요 약

Space-time line code (STLC)라는 새로운 다이버시티 기술의 발명 이후로, 오류율과 에르고딕 용량이 이론적으로 분석되었지만, 아웃티지 확률에 대한 연구가 수행되지 않았다. 본 논문에서는 STLC 시스템의 순시 신호 대 잡음비의 확률 밀도 함수를 도출하고, 아웃티지 확률의 닫힌-형식 표현을 수학적으로 유도하였다. 또한, 전산 실험을 통하여 분석 결과의 정확성을 검증하고, 시스템 설계 및 구현에 대한 통찰을 제시하였다.

### ABSTRACT

Since the invention of a novel diversity technique, namely a space-time line code (STLC), though the previous studies have theoretically analyzed the error rate and ergodic capacity, the outage probability has not been revealed yet. In this paper, we characterize the probability density function of the instantaneous signal-to-noise ratio, and mathematically derive the closed-form expression of the outage probability. Based on numerical simulations, furthermore, we validate the accuracy of the mathematical analysis, and present the insight into the system design and implementation.

### 키워드

Diversity, multiple-input multiple-output, outage probability, space-time line code

### 1. 서 론

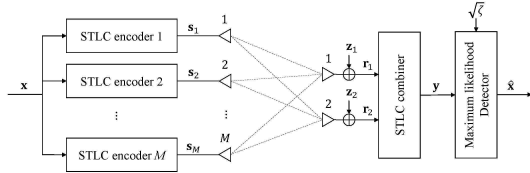
시공간 선 부호화(space-time line code, STLC)는 송신단에 채널 상태 정보(channel state information, CSI)가 있는 다중입력 다중출력(multiple-input multiple-output, MIMO) 시스템에 활발히 응용되고 있다 [1], [2]. STLC는 CSI 정보에 기반한 부호화와 단순한 결합 기법을 적용함으로써 MIMO 시스템의 성능을 향상시킬 수 있다. 또한, STLC는 임의의 송신 안테나 수에 대하여 MIMO 채널의 최대 공간 다이버시티를 달성 가능하다 [1], [3].

STLC 기술이 제안된 이후에 STLC 시스템의 수

학적 성능 분석을 위한 연구가 진행되었다. 논문 [3]에서는 STLC 시스템의 심볼 오류율(symbol error rate)과 비트 오류율(bit error rate)이 유도하였고, STLC가 최대 공간 다이버시티를 달성한다는 사실을 엄밀히 증명하였다. 논문 [4]에서는 에르고딕 용량(ergodic capacity)을 도출함으로써 STLC 시스템이 달성 가능한 최대 전송률이 분석되었다. 반면, STLC 시스템의 아웃티지 확률에 대한 연구는 현재까지 이루어지지 않았기 때문에 딥 페이딩(deep fading)에 의한 데이터 손실 가능성을 분석하기 위하여 추가적인 연구가 필요하다.

본 연구에서는 STLC 시스템의 아웃티지 확률을 수학적으로 분석하는 것을 목표로 한다. 두 개의 수신 안테나가 장착된 STLC 시스템에서 순시 신호 대

\* corresponding author

그림 1.  $M \times N$  STLC 시스템 모델.

잡음비(signal-to-noise ratio, SNR)을 도출 후 순시 SNR의 확률 밀도 함수(probability density function, PDF)를 유도한다. 또한, 유도된 PDF를 기반으로 수학적 분석을 통해 STLC 시스템의 아웃티지 확률을 분석한다. 본 논문의 수학적/수치적 분석을 통해 STLC 시스템의 아웃티지 확률이 송신 안테나 수에 따라 감소한다는 사실을 검증한다.

## II. 시스템 모델

임의의 양의 정수  $M$ 에 대하여 그림 1은  $M$  개의 송신 안테나와 두 개의 수신 안테나가 있는 STLC 시스템을 보여준다.  $M \times 2$  STLC 시스템의 수신단에서는 CSI를 사전에 획득하여 사용 가능함을 가정한다 [1], [2]. 인덱스  $i \in \{1, 2\}$ 와  $j \in \{1, \dots, M\}$ 에 대하여,  $j$ 번째 수신 안테나와  $i$ 번째 송신 안테나 사이의 채널 이득  $h_{i,j}$ 가 평균이 0이고 분산이 1인 복소 가우시안 랜덤 변수라고 가정한다. 인덱스  $j \in \{1, \dots, M\}$ 에 대하여  $\mathbf{h}_j = [h_{j,1}, h_{j,2}]^T$ 를  $j$ 번째 송신 안테나의 채널 이득 벡터로 정의한다. 또한, 모든 채널 정보의 이득 합을  $\zeta$ 라고 할 때, 이는 다음의 식으로 계산된다:

$$\zeta = \sum_{j=1}^M (|h_{j,1}|^2 + |h_{j,2}|^2). \quad (1)$$

변조 심볼의 평균 송신 에너지를  $\sigma_x^2$ 라고 할 때, 변조 심볼 벡터  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ 를 고려하자.  $j$ 번째 송신 안테나에 대한 부호화기(encoder)는 변조 심볼 벡터  $\mathbf{x}$ 를 STLC 심볼 벡터  $\mathbf{s}_j = [s_{j,1}, s_{j,2}]^T$ 로 변환한다 [1]:

$$\begin{aligned} s_{j,1} &= \frac{1}{\sqrt{\zeta}} (h_{1,j}^* x_1 + h_{2,j}^* x_2), \\ s_{j,2} &= \frac{1}{\sqrt{\zeta}} (h_{2,j}^* x_1 - h_{1,j}^* x_2). \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $1/\sqrt{\eta}$ 는 송신 전력을  $\sigma_x^2$ 로 설정하기 위하여 적용된 정규화 인자이다. 인덱스  $t \in \{1, 2\}$ 에 대하여 부호화된 각 STLC 심볼  $s_{j,t}$ 은  $j$ 번째 송신 안테나를 통해 시간  $t$ 에 송신된다.

인덱스  $i \in \{1, 2\}$ 에 대하여  $i$ 번째 안테나를 통해 수신된 수신 벡터를  $\mathbf{r}_i = [r_{i,1}, r_{i,2}]^T$ 라고 할 때, 시간  $t$ 에서의 수신 심볼을 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$r_{i,t} = \sum_{j=1}^M h_{i,j} s_{j,t} + z_{i,t}. \quad (3)$$

여기서  $z_{i,t}$ 는 평균이 0이고 분산이  $\sigma_z^2$ 인 복소 가우시안 랜덤 변수로서 부가 백색 잡음(additive white Gaussian noise, AWGN)을 의미한다. 송신된 변조 심볼을 복원하기 위하여 수신단에서는 맹검 검출(blind detection)을 수행함으로써 벡터  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$ 를 도출한다 [1]:

$$\begin{aligned} y_1 &= r_{1,1} + r_{2,2}^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \sum_{j=1}^M h_{1,j} (h_{1,j}^* x_1 + h_{2,j}^* x_2) + z_{1,1} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \sum_{j=1}^M h_{2,j} (h_{2,j} x_1 - h_{1,j} x_2) + z_{2,2}^* \\ &= \sqrt{\zeta} x_1 + \underbrace{z_{1,1} + z_{2,2}^*}_{\tilde{z}_1} \\ y_2 &= r_{2,1}^* - r_{1,2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \sum_{j=1}^M h_{2,j}^* (h_{1,j} x_1 + h_{2,j} x_2) + z_{2,1}^* \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \sum_{j=1}^M h_{1,j} (h_{2,j} x_1 - h_{1,j} x_2) - z_{1,2} \\ &= \sqrt{\zeta} x_2 + \underbrace{z_{2,1}^* - z_{1,2}}_{\tilde{z}_2} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\sqrt{\zeta}$ 는 유효 채널 이득을 나타내고,  $\tilde{z}_k$ 는 평균이 0이고 분산이  $\sigma_z^2 = 2\sigma_z^2$ 인 AWGN을 의미한다. 수신단에서는 결합 심볼 벡터  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$ 와 유효 채널 이득  $\sqrt{\zeta}$ 을 바탕으로 최대 우도 검출(maximum likelihood detection)을 수행하여  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2]^T$ 를 추정한다.

## III. 아웃티지 확률 분석

단일 송수신 안테나 시스템의 SNR을  $\rho = \sigma_x^2 / \sigma_z^2$ 라고 표기할 때, STLC 시스템의 SNR  $\xi$ 은 다음과 같이 계산된다:

$$\xi = \frac{\zeta \sigma_x^2}{\sigma_z^2} = \frac{\rho}{2} \zeta. \quad (5)$$

식 (5)에 표현된 순시 SNR은  $2M$  개 채널 정보의 이득 합  $\zeta$ 와  $\rho/2$ 의 곱임을 알 수 있다. 따라서, 순시 SNR  $\xi$ 는  $\rho/2$ 가 곱해진  $4M$ 의 자유도를 갖는 카이 제곱(chi-squared) 랜덤 변수이므로 다음의 PDF를 갖는다:

$$f_\xi(u) = \frac{(\rho/2)^{-2M}}{(2M-1)!} u^{2M-1} \exp\left(-\frac{2u}{\rho}\right). \quad (6)$$

식 (6)에 도출된 순시 SNR의 PDF를 이용하여 STLC 시스템의 아웃티지 확률  $P_{out}$ 을 분석할 수 있다. 주어진 아웃티지 용량  $C_{out}$  [nats/s/Hz]에 대하여 아웃티지 확률은 다음과 같이 정의된다:

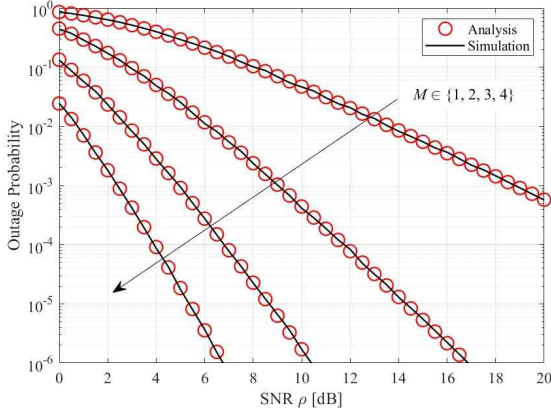


그림 2.  $C_{out} = 1$  [nats/s/Hz]일 때, 다양한 송신 안테나 수에 대한 STLC 시스템의 아웃티지 확률.

$$P_{out} = \Pr\{\log(1+\xi) \leq C_{out}\}. \quad (7)$$

식 (7)의 정의를 기반으로 아웃티지 확률을 다음과 같이 계산할 수 있다:

$$P_{out} = \Pr\{\xi \leq \exp(C_{out}) - 1\} \\ = \int_0^{\exp(C_{out})-1} f_{\xi}(u) du. \quad (8)$$

식 (8)에 순시 SNR의 PDF (6)을 대입 후 적분의 선형성을 이용하면, 최종적으로 다음의 아웃티지 확률을 계산할 수 있다:

$$P_{out} = \frac{1}{(2M-1)!} \gamma\left(2M, \frac{2}{\rho}(\exp(C_{out})-1)\right). \quad (9)$$

여기서 함수  $\gamma(\beta, x)$ 는 양의 정수  $\beta$ 에 대한 하부 불완전 감마함수(lower incomplete gamma function)로서 다음과 같이 정의된다:

$$\gamma(\beta, x) = \int_0^x u^{\beta-1} \exp(-u) du. \quad (10)$$

#### IV. 시뮬레이션 결과

STLC 시스템의 아웃티지 확률 분석 결과를 검증하기 위하여 시뮬레이션에 기반한 수치적 분석을 수행한다. 그림 2는 아웃티지 용량이  $C_{out} = 1$  [nats/s/Hz]로 설정되었을 때 STLC 시스템의 아웃티지 확률을 보여준다. 수학적 분석 결과가 몬테카를로 실험 결과와 일치하므로, 다양한 송신 안테나 수에 대하여 식 (9)의 수학적 분석 결과가 정확성을 검증할 수 있다.

그림 2의 결과를 통하여 송신 안테나 수( $M$ )가 아웃티지 확률에 미치는 영향을 관찰할 수 있다. STLC 시스템에 대하여 송신 안테나 수를  $M \in \{1, 2, 3, 4\}$ 으로 증가시켰을 때, 다이버시티 이득이 증가함에 따라서 아웃티지 확률이 현저히 감소하는 사실을 관찰할 수 있다. 따라서, 그림 2의 결과를 통하여 낮은 아웃티지 확률을 갖는 STLC 시스템을 설계하기 위해서는 큰 안테나 구성을 고려하는 것이 중요하다는 것을 알 수 있다.

#### V. 결론

본 연구에서는 STLC 시스템의 순시 SNR의 PDF를 도출하고 아웃티지 확률을 수학적으로 유도하였다. 또한, 수학적/수치적 분석을 통하여 낮은 아웃티지 확률을 달성하기 위한 STLC 시스템의 설계 지침을 제시하였다.

#### Acknowledgement

이 성과는 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. NRF-2022R1G1A1010641).

#### References

- [1] J. Joung, "Space-time line code," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 1023 - 1041, Feb. 2018.
- [2] J. Joung, "Space-time line code for massive MIMO and multiuser systems with antenna allocation," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 962 - 979, Feb. 2018.
- [3] S.-C. Lim and J. Joung, "Transmit antenna selection for space-time line code systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 69, no. 2, pp. 786 - 798, 2021.
- [4] S.-C. Lim and J. Joung, "Ergodic capacity of space-time line code systems with transmit antenna selection," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 71, no. 8, pp. 9089 - 9094, 2022.