

# 感度電子裝置에 影響을 주는 幾何學的 因數의 理論的 研究와 測定

(Theoretical Investigations and measuring Techniques  
of Geometrical Factor influencing Sensitive  
Electronic Devices)

李 時 奎\*  
(S. K. Lee)

## ABSTRACT

In the designs of the sensitive electronic devices such as phase sensitive detector, X-ray diffractometer, and neutron diffractometers, we must take into account the geometrical factors in a coil systems and extraneous stray fields. Input wave forms in such a sensitive electronic devices are often altered by the influence of these factors. Since the magnitude of the stray fields is generally very small, this affection may be removed by applying a good shielding but it is not easy to remove the affection from a geometrical factor. This affection must be however calculated by the theoretical methods and analytical solution in the equation of these factors. The fundamental purpose of this paper lie in the theoretical calculations and practical measurements of the geometrical factor in the coil systems, finite solenoid, and four point probe. In the theoretical calculations, the geometrical factors in the coil systems were calculated by applying the elliptic functions and in the contact points were calculated by applying the elliptic functions and in the contact points were calculated by applying the eigen functions and the infinite series. The measurements were carried out by using the sensitive electronic device made from author's design, as shown in the Fig. 9. The result of this work has verified the essential correctness of theoretical investigations and measuring techniques of geometrical factors on the design of sensitive electronic devices. It also has

several advantages such that: (1) all the data obtained may give effective data to designer to work on the field of sensitive electronic devices or microelectronic devices, (2) it has evidently explained the characteristics of electrical investigations and physical definition, and has removed the conventional error of geometrical factors in the coil systems and contact points.

## 1. 序 論

位相感度 檢出器나 X-ray 廻折計 및 中性子 廻折計 등과 같은 感度電子 測定器의 設計에 있어서 問題되는 點은 coil systems 의 幾何學的 因數와 周圍의 漂流磁場이다. 感度電子 測定器의 入力波는 때때로 이들의 影響때문에 變化를 이르게서 測定器의 性能이 상실하는 일이 많다. 一般의 漂流磁場의 影響은 매우 적은 것이므로 遮磁 效果를 作用시켜서 除去할 수 있지만 幾何學的 因數에 基인하는 影響은 그리 쉽게 決定되지 않는다. 即 理論的으로 究明하여 算出한 수 밖에 없다.

本論文의 主目的은 이와 같은 幾何學的 因數를 理論的으로 算出하는 同時에 實際的인 微視的 測定에서 얻고자 하는데 있다. 理論的 算出에서 coil systems 에 있어서는 物理的 의미에 따라 橢圓函數를 적용하였고, contact systems 에 있어서는 無限級數의 Eigen 函數를 적용하였다. 測定에 있어서는 筆者의 裝置로 알려진 感度電子 裝置를 使用하였는데(그림 9), 研究의 結果는 理論值와 測定值와의 一致性을 證明하였다. 이 過程에서 얻어진 모든 結果의인 資料들은 感度電子測定器의 設計者들에게 매우 有益한 資料가 될 것으로 생각된다. 더욱이 結果는 coil systems 와 contact systems 에 있어서의 電氣的 特性과 物理的 意義를 明白히 하였고 또 從來 方法에서의 誤差의인 因數를 除去하였다.

\* Abercrombie Engineering Lab.  
Houston, Texas. USA

## 2. 두 개의 同軸코일系에 對한 幾何學的 因數

두 개의 同軸코일이 있을 때 만약 1次 코일에 어떤 信號源이 연결되었다면 2次코일에서는 그 信號를 感受할 수 있을 것이다. 또 1次코일에 電流  $i_1$ 이 흐르게 되면, 2次코일에는  $i_2$ 라는 電流가 흐르게 될 것이다. 만약 1次 코일에 電荷  $-Q_1$ 가 蓄積된다면 1次코일로부터 有限距離에 있는 2次코일에는  $+Q_2$ 의 電荷가 誘導될 것이다. 이 경우 電流源은 이 코일系에 있어서 loop 電流를 形成할 것이며 2次코일의 loop 電流는 1次코일의 電流의 크기에 따라서 決定될 것이다.

만약 固體로 된 導體나 半導體의 物質이 두 코일間에 挿入되었다면, 導電媒質은 코일系의 周圍에 均一하게 形成될 것이다. 이 導電媒質의 密度는 1次코일의 電流源이 一定한 條件下에서는 이들 코일系間의 幾何學的 因數에 따라서 決定된다. 지금 이 코일의 周圍를 둘러싼 幾何學的 因數를  $g$ 라하고, 均一한 導電媒質의 電導率을  $\sigma$ 라하면 信號  $E$ 는 다음 式으로 表示된다.

$$E = K \int \int \int g \sigma dr dz \quad (1)$$

但  $K$ 는 電源電流와 同軸코일系의 次序에 따라 決定되는 比例定數이고,  $g$ 는 單位 幾何學的 因數이다.  $g$ 와  $\sigma$ 는 各各  $r$ 과  $z$ 의 函數이며,  $r$ 은 半徑 方向의 座標(m)이고  $z$ 는 軸方向의 座標(m)이다.

만일 2次코일이 數個의 同軸코일로 構成되어 있고 導電率도 均一하게 形成되었다면 (1)式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E = K \int \int \int \sigma_1 g_1 dr_1 dz_1 + K \int \int \int \sigma_2 g_2 dr_2 dz_2 + K \int \int \int \sigma_3 g_3 dr_3 dz_3 + \dots = K \left\{ \int \int \int \sigma_1 g_1 dr_1 dz_1 + \int \int \int \sigma_2 g_2 dr_2 dz_2 + \int \int \int \sigma_3 g_3 dr_3 dz_3 + \dots \right\} \quad (2)$$

但  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ 은 領域 1, 2, 3, ...에 對한 各各의 電導率이다. (2)式으로부터 幾何學的 因數를 다음과 같이 定義할 수 있다.

$$E = K \left[ \sigma_1 G_1 + \sigma_2 G_2 + \sigma_3 G_3 + \dots \right] = K \sum_{i=1}^n \sigma_i G_i \quad (3)$$

$$\text{但 } G_1 = \int \int \int g_1 dr_1 dz_1, \quad G_2 = \int \int \int g_2 dr_2 dz_2,$$

$$G_3 = \int \int \int g_3 dr_3 dz_3, \dots$$

$$\sum_{i=1}^n G_i = 1 \text{ 이면}$$

$$E = K \sigma_i, \quad \sigma_i = \sum \sigma_i$$

여기에서  $G_1, G_2, G_3, \dots$ 는 領域 1, 2, 3, ...에 對한 幾

何學的 因數이고  $E/K$ 는 一般的으로 이 系의 導電率의 값을 表示하게 된다. 實際의 경우에 있어서는 이 코일系間에 挿入된 物質이 圓筒形이거나 圓板形일 때 幾何學的 因數는 各各 水平 또는 垂直 幾何學的 因數로 分類될 수 있다.

### (a) 圓筒 shell의 水平幾何學的 因數

이 경우의 導電率은 垂直方向으로는 變化하지 않고  $z$ 의 函數로서 半徑 方向으로만 變化하게 된다. 두 코일系間에 形成되는 均一한 媒質은 同軸 圓筒 shell의 個數에 따라서 表示되며, 이 媒質의 導電率은 한 圓筒 shell로부터 다른 shell로 向해서 變化하게 된다. 따라서 이들 圓筒 shell의 幾何學的 因數는 다음과 같은 式으로 주어진다.

$$G_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{2} \frac{r^3 dz}{\left[ r^2 + \left( z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2} \left[ r^2 + \left( z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} g dz$$

$$\text{但 } g = \frac{d}{2} \frac{r^3}{\left[ r^2 + \left( z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2} \left[ r^2 + \left( z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$G_r$  = 圓筒 shell의 水平幾何學的 因數

$r$  = 圓筒 shell의 半徑

$d$  = 두 개의 同軸 coil system 간의 距離

$z$  = 圓筒 shell의 中心으로부터의 距離(軸座標)

이 積分式은 均一領域의 全空間에 對한 導電率을 나타내며 이의 解는 附錄 (A-1)에서 다음과 같은 式으로 유도된다.

$$G_r = \frac{1}{2d} \frac{u}{(u^2+1)^2} \left[ (u^2+3)(\sqrt{u^2+1}-1)K(k) - (u^2-1)(\sqrt{u^2+1}+1)E(k) \right] \quad (5)$$

$$\text{但 } K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad k^2 < 1$$

$$k = \frac{2(u^2+1)^{1/2}(\sqrt{u^2+1}-1)}{u^2} \quad k^2 < 1$$

$$u = \frac{2r}{d}$$

그림 1과 그림 2는 표 1과 표 2에서 얻어진 水平幾何學的 因數의 性質을 表示한 것이다.

### (b) 圓板에 對한 垂直幾何學的 因數

垂直幾何學的 因數에 있어서 導電率은 水平方向에 對해서는 不變이고,  $r$ 이 函數로서 軸座標  $z$ 에 따라서 變化한다.

두 개의 同軸코일間에 形成되는 均一媒質은 同軸 圓筒의 個數로서 表示될 수 있으며, 電導率은 이 垂直幾何學

의 因數에 따라서 左右된다. 이 圓板의 垂直幾何學의 因數는 다음과 같은 式으로 表示된다.

$$G_z = \int_0^{z_0} \frac{d}{2} \frac{r^3 dr}{\left[r^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2} \left[r^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \int_0^{z_0} g dr \quad (6)$$

$$\text{但 } g = \frac{d}{2} \frac{r^3}{\left[r^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2} \left[r^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

이 方程式의 一般解는 附錄 (A-2)에서 유도하였다.

$$G_z = \frac{d}{4} \frac{2\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + 2\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 - 4\left(z^2 - \frac{d^2}{4}\right)}{\left[\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right]^2} \quad (7)$$

i)  $-\frac{d}{2} > z > \frac{d}{2}$  일때

$$G_z = \frac{d}{8z^2} \quad (8)$$

ii)  $-\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$  일때

$$G_z = \frac{1}{2d} \quad (9)$$

그림 3에서 62.5%의 電導率은 中心으로부터 單位 1 사이의 領域에 存在하며 92%의 電導率은 中心으로부터 單位 5사이의 領域에 存在함을 나타내준다. 또한 그림 1은 中心과 單位 1사이의 領域에 38.8%의 電導率이 存在하며 中心과 單位 3사이의 領域에는 71.11%의 電導率 이 存在하고, 中心과 單位 7사이의 領域에 74.06%의 電導率 이 存在함을 나타내 준다.

Solid state 裝置 設計에 있어서 이들 因數들은 매우 重要한 資料가 되며 또한 必要한 數值들은 이 因數를 곱하므로써 얻을 수 있는 것이다.

### 3. Solenoid의 自己誘導에 對한 幾何學的 因數

任意的 斷面積 S를 가지고 있는 空心 toroid의 inductance는

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} \iint \frac{ds}{r} \quad (10)$$

로 주어진다. 만약 이 toroid에 透磁率  $\mu$ 인 鐵心을 쓰고 그 斷面積이 均一하다면, 磁束은  $\mu$ 倍로 增加할 것이다. 따라서 이의 自己 inductance는

$$L = \mu \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \quad (11)$$

그러나 엄밀히 말하면 全斷面을 通해서 磁束密度는 一定하지 않으므로 이 公式은 짧은 solenoid나 임의의 모양을 가진 코일에는 적용할 수 없다. 任意的 形狀을 가지고 있는 單層 coil의 自己 inductance는 Neuman의 公式에 依해서 다음과같이 表示된다.

[단,  $\vec{ds}_1 \cdot \vec{ds}_2 = r^2 ds_1 \cdot ds_2 \cdot 2 \cos \theta$  조건에서]

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \iint \frac{\vec{ds}_1 \cdot \vec{ds}_2}{r} \quad (12)$$

$$\therefore L = \frac{\mu_0 n^2}{4\pi} \iiint \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos \theta}{r} \quad (13)$$

이 方程式의 一般解<sup>(3)</sup>는 隋圓積分으로 變形시킬 수 있으므로 附錄 (A-1)의 計算에서 다음과 같은 解를 얻게 된다.

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} G_s$$

$$G_s = \frac{4}{3\pi} \left[ \frac{\sqrt{1+r^2}}{r^2} \left( K(k) + (r^2-1)E(k) \right) - r \right] \quad (14)$$

여기서  $G_s$ 는 幾何學的 因數 또는 補正因數이다.  $r$ 은 solenoid의 直徑이고,  $k$ 는 隋圓積分의 母數이다.

$$\text{또 } K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$k = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \quad (15)$$

### 4. 코일系에 對한 幾何學的 因數의 測定

幾何學的 因數를 測定하기 爲해서 感度電子裝置를 使用하였다. 이 裝置는 序論에서 말한 바와 같이 筆者가 半導體의 bulk 導電率의 測定과 粒子檢出用 擴散板의 擴散抵抗을 決定하기 爲해서 設計한 것으로서 4개의 同軸 코일系를 가지고 있고, 이 코일系는 LC parameter를 가진 bridge 回路로 構成되었다. 두쌍의 bridge 回路의 位置의 調整으로써 高度의 感度を 얻을 수 있다. 두개의 부속 成分 A와 B를 가지고 있으며, A는 垂直幾何學的 因數를 測定하는데 使用되고, B는 水平幾何學的 因數를 測定하는데 使用된다. 測定結果는 다음과 같은 式으로 計算할 수 있다.

$$G_\theta = \frac{\sin^2 \theta}{2d^2} \quad (16)$$

이식은 附錄 (A-1), (A-2)에서 計算한 理論式과 比較하여 볼때 똑같은을 알 수 있다. 測定에서 얻은 結果는 表 3과 表 4에 표시하였다. 이 感度電子裝置는 高度의 感度を 얻을 수 있다. 即 microvolt의 微小電氣量도 充分히 感知할 수 있고, 물체 特徵으로서는 金屬材料를 全然 使用하지 않은 것이다. 有機化合物의 絕緣體로 구성되어 있는데 이 絕緣體는 比誘電率과 dissipation factor가 테스트되어야 하기때문에 그 電氣의 特性은 本實驗에서 이미 測定하였다. 이 測定器는 有機化合物의 絕緣材料로서 만들어졌기 때문에 試料의 導電率을 完全히 測定할 수 있다. 金屬材料로 된 測定器라면 測定結果에서 試料의 導電率인지 測定器材料의 導電率인지를 區別할 수 없을 것이다.

測定時에 注意할 點은 實驗室內의 地磁界 方向을 먼저 테스트하여야 한다.

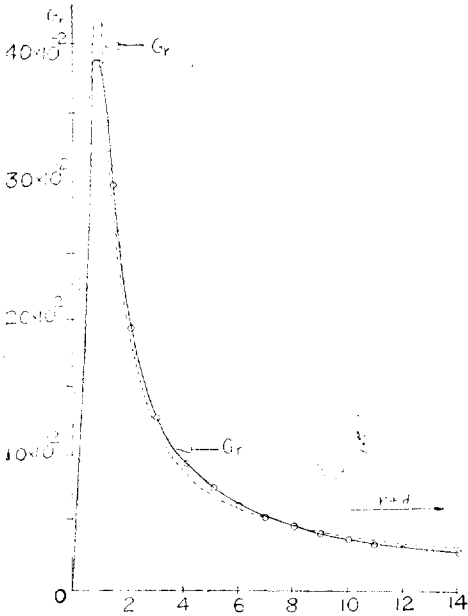


그림 1. 同軸코일系에서의 水平幾何學的 因數  
 實線은 理論曲線( $G_r$ )이고, 點線은 實驗曲線( $G'_r$ )  
 (Fig. 1 shows the horizontal geometrical factor in the coaxial coil systems. Solid line shows theoretical curve, and dashed line the experimental curve)

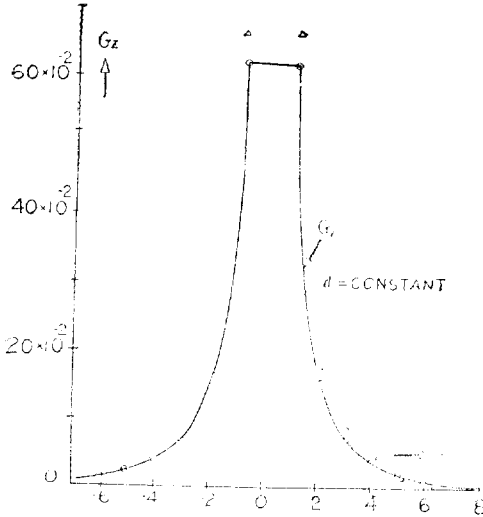


그림 2. 水平幾何學的 因數  
 ○點은 計算值이고, △點은 測定值이다.  $G_r$ 은  $d$ 가 一定할 때 半徑  $r$  函數에 對한 水平幾何學的 因數이고  $G_d$ 는 半徑  $d$  이 一定할 때이다.  
 (Fig. 2 shows the horizontal geometrical factor, and ○ is calculation point, △ is measuring point,  $G_r$  is horizontal geometrical factor of a function of radius  $r$  at  $d$  is constant, and  $G_d$  is horizontal geometrical factor as the function of distance  $d$  at  $r$  is constant)

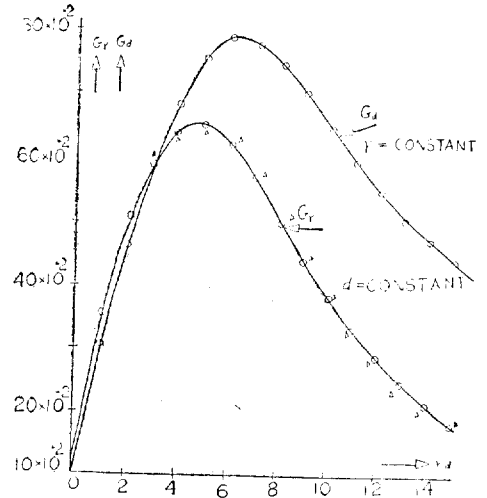


그림 3. 圓板에 對한 垂直幾何學的 因數  
 ○點은 理論值, △點은 測定值이다. 이曲線은 對稱이다.

(Fig. 3 shows the vertical geometrical factor for a circular disk, or samples of elliptic disk.  $G_z$  is vertical geometrical factor, ○ is a point calculated theoretically, and △ is measuring point. This curve is calculated symmetrically)

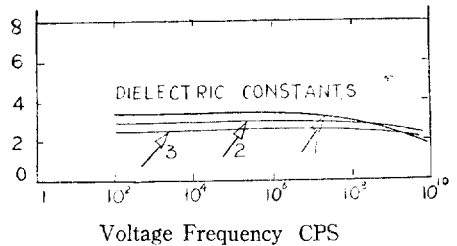


그림 4. Good data tested by our laboratory showing the electrical properties of insulators used in this experiment  
 (1) Polytetra fluoroethylene  
 (2) Polyethylene  
 (3) Polystyrene  
 (4) Test temperature = 20° ~ 27° C  
 (5)  $\tan \delta$  is dissipation factor  
 (6) Reference (4)

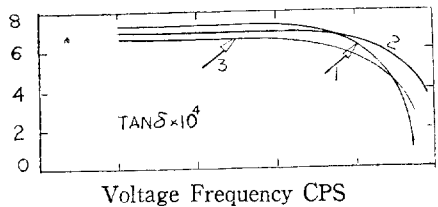


그림 5. The same 그림 4

表 1.

Gr	r	d	Gr'
0.388430	1	1	0.420
0.194215	2	2	0.211
0.129477	3	3	0.128
0.097107	4	4	0.090
0.077686	5	5	0.075
0.064738	6	6	0.061
0.055490	7	7	0.052
0.048559	8	8	0.045
0.043159	9	9	0.040
0.038843	10	10	0.036
0.035312	11	11	0.034
0.032369	12	12	0.032
0.029879	13	13	0.030
0.027745	14	14	0.028
0.025895	15	15	0.026
0.024277	16	16	0.025
0.022849	17	17	0.023
0.021579	18	18	0.022
0.020444	19	19	0.021
0.019421	20	20	0.020

表 3.

Gz	d	z	Gz'
0.625	5	1	0.665
0.160	5	2	0.175
0.070	5	3	0.075
0.040	5	4	0.035
0.025	5	5	0.020
0.018	5	6	0.015
0.013	5	7	0.010
0.010	5	8	0.008
0.008	5	9	0.006
0.006	5	10	0.004

表 2.

Gr	d	r	Gd	r	d
0.021278	10	1	0.023127	5	1
0.042947	10	2	0.043785	5	2
0.058566	10	3	0.060157	5	3
0.065520	10	4	0.071416	5	4
0.065555	10	5	0.077686	5	5
0.061579	10	6	0.079733	5	6
0.055884	10	7	0.078598	5	7
0.049816	10	8	0.075312	5	8
0.044045	10	9	0.070745	5	9
0.038843	10	10	0.065551	5	10
0.034280	10	11	0.060186	5	11
0.030330	10	12	0.054939	5	12
0.026931	10	13	0.049979	5	13
0.024010	10	14	0.045392	5	14
0.021496	10	15	0.041212	5	15

表 4.

Gs	r	K(k)	E(k)
0.680398	1	1.840978	1.358610
0.509195	2	2.104872	1.296374
0.427456	3	2.217970	1.149826
0.400209	4	2.263523	1.126264
0.385610	5	2.290226	1.111370
0.371563	6	2.302793	1.110898
0.359356	7	2.312176	1.102702
0.352285	8	2.316630	1.101131
0.345873	9	2.323213	1.099560
0.340562	10	2.326355	1.097989

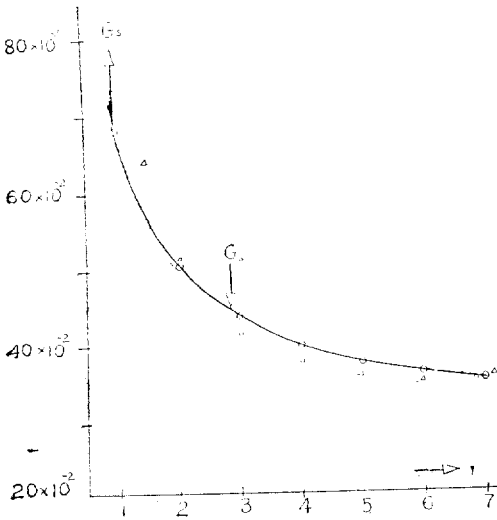


그림 6. 有限 solenoid 의 自己誘導에 對한 幾何學的 因數 ( $G_s$ )

○點은 理論值, △點은 測定值

(Fig. 6 shows the geometrical factor to the self-inductance of a finite solenoid.  $G_s$  is geometrical factor to the solenoid, being often called numerical factor. ○ is the point calculated theoretically, and △ is measuring point)

5. 半導體의 固有抵抗을 測定하는 Four-point prove 의 幾何學的 因數

表面 固有抵抗은 다음 式으로 주어진다.

$$\rho = G_p \frac{V}{I} \tag{17}$$

但  $G_p$  는 길이의 次元을 가지고 있는 Four-point prove 의 幾何學的 因數로서 標本의 크기와 모양에 따라서 決定되는 函數이다.

$I$  는 電流,  $V$  는 電位,  $\rho$  는 sheet 의 固有抵抗이다.

(a) 無限 sheet

無限 sheet 에 對한 電位는 다음과 같은 幾何學的 因數로 表示된다.

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{I\rho}{2\pi} \log r \tag{18}$$

$$S_n = \sum_{j=0}^n ar^j = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \tag{19}$$

但  $r$  은 電流源으로부터의 距離이다.

$S_n$  는 幾何學的 級數이고,  $a$  는 第一項,  $r$  은 公比이다.

만일  $a=1$ ,  $r=\frac{1}{2}$  이라면 幾何學的 級數는

$$S_n = \frac{(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-1/2} = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$$

그런데

$$\varphi - \varphi_0 = \Delta \varphi = V$$

$$\therefore V = \frac{I\rho}{\pi} = \log 2 \tag{20}$$

故로

$$\rho = \frac{V}{I} \cdot \frac{\pi}{\log 2} = \frac{V}{I} 4.5324 \dots \tag{21}$$

따라서 無限 sheet 의 幾何學的 因數  $G_p$  는 4.5324... 가 됨을 알 수 있다. 그러나 有限 sheet 의 경우에는 그렇게 간단하지는 않다.

(b) 有限 sheet 에 對한 幾何學的 因數

有限 sheet 에 對한 幾何學的 因數의 一般解는 A. Mircea<sup>10)</sup>에 의하여 Green 函數로써 다음 型態의 式으로 表示하였다.

$$G_p^{-1} = 2 \sum_k \lambda_k^{-1} \left[ f_k(r_4) - f_k(r_1) \right] \left[ f_k(r_3) - f_k(r_2) \right] \tag{22}$$

여기서  $f_k(r)$  은 標準化 Eigen 函數이고,  $\lambda_k$  는 Eigen 值의 演算子이다.

만약 有限半導體 sheet 上에 電流源이 存在한다면 이 sheet 上의 電位는 Poisson 의 方程式으로 表現할 수 있다. 事實上 Four-point prove 를 使用하는 瞬間에는 印 度든지 電流源이 存在한다.

$$\nabla^2 A(r) = I\rho \tag{23}$$

但  $A(r)$  = vector 電位,  $I$  = 電流,  $\rho$  = 半導體의 sheet 의 固有抵抗이다. 그림 8 에서 두點間의 電位差를 생각하므로써 다음 式을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} V &= A(r_4) - A(r_1) \\ \text{但 } A_k &= I\rho \lambda_k^{-1} \left[ f_k(r_4) - f_k(r_1) \right] \\ V &= \sum_k I\rho \lambda_k^{-1} f_k(r) \left[ f_k(r_4) - f_k(r_1) \right] \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

여기에  $A(r_1)$  과  $A(r_2)$  는 (24) 式의 特解이다.  $G$  는 (17) 式으로 부터 다음 式을 얻는다.

$$G = \frac{I\rho}{V} = \frac{I\rho}{\sum_k I\rho \lambda_k^{-1} f_k(r) \left[ f_k(r_3) - f_k(r_2) \right]} \tag{24}$$

이 式에서 만약  $f_k(r) = f_k(r_3) - f_k(r_2)$  이라면 Mircea 의 一般解와 一致한다는 것을 알 수 있다. 여기서 sheet 가 平行 六面體이므로 (24) 式의  $\lambda_k$  와  $f_k$  가 展開될 수 있다. 따라서 (24) 式을 無限 級數로 連續 展開하므로써 附錄 (A-1) 로 부터 다음 式을 얻는다.

$$G_p^{-1} = -\frac{s}{bc} \sum_p \sum_q \frac{\sinh \beta \cosh(x-3)}{\beta \cdot \cos h \beta x} \tag{25}$$

$$\text{但 } \beta = \pi \left[ \left( \frac{P}{Y} \right)^2 + \left( \frac{q}{z} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{26}$$

$$X = \frac{a}{s}, Y = \frac{b}{s}, Z = \frac{2c}{s} \tag{27}$$

(25) 式을 展開하므로써 附錄 (A-2) 에서 다음 式을 얻는다.

$$G_p^{-1} = \frac{s}{bc} \left\{ \frac{b}{\pi s} \log \left( \exp\left(\frac{-\pi s}{b}\right) + \exp\left(\frac{\pi s}{b}\right) \right) \cdot \frac{1 - \exp[-\pi(2a/b)]}{1 - \exp[-\pi(2a-4s)/b]} \right. \\ \left. + \frac{2c}{\pi s} \log \left( \exp\left(\frac{-\pi s}{2c}\right) + \exp\left(\frac{\pi s}{2b}\right) \right) \cdot \frac{1 - \exp[-\pi(2a/b)]}{1 - \exp[-\pi(2a-4s)/b]} \right. \\ \left. + \frac{8b}{s} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (r)^{-1} \exp\left(-\frac{a}{b}r\right) \sin h\left(\frac{s}{b}r\right) \cos h\left(\frac{a-3s}{b}r\right) \right\} \quad (28)$$

$$\text{但 } \gamma = \frac{b}{s} \beta = \pi \left[ p^2 + \left(\frac{b}{2c}q\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

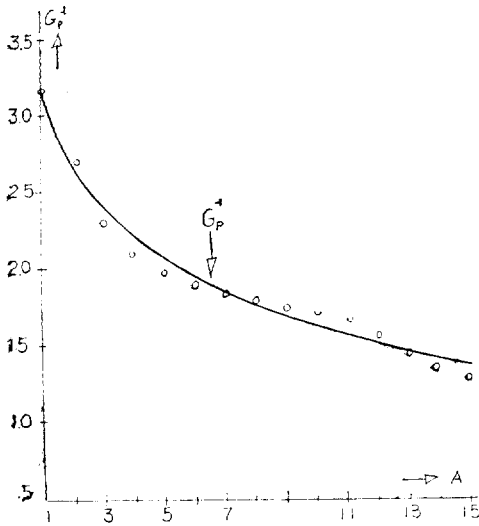


그림 7. 반도체의 固有抵抗을 測定하기 爲한 Four-point prove의 幾何學的 因數 ( $G_p^{-1}$ )

實線은 平均値이고, ○點은 (28)式에 依한 計算値이다.

(Fig. 7 shows geometrical factor of Four-point prove for measuring resistivity of semiconductor materials. This solid line is average curve for the geometric factor to the Four-point prove, and the points of ○ are the points calculated by the equation (28).  $A = a \times b = \text{area}$ ,  $G_p$  is geometrical factor for Four-point prove. This solid curve is very useful and practical in measuring resistivity of semiconductor materials)

단약 試料 標本이 얇은 필립이면 다음 式을 가진다.

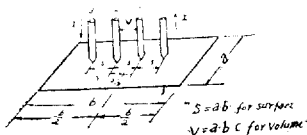


그림 8

$$G_p^{-1} = \frac{1}{\pi c} \log \left[ \exp\left(\frac{-\pi s}{b}\right) + \exp\left(\frac{\pi s}{b}\right) \right] \cdot \frac{1 - \exp\left(\frac{-\pi 2a}{b}\right)}{1 - \exp\left(\frac{-\pi(2a-4s)}{b}\right)} \quad (30)$$

筆者의 目的은 위에서 말한 바와 같이 數學의 一般解보다 이 문제의 解析의 解를 얻는데 있기 때문에 (28)式의 解로부터 解析値를 電子計算機로서 求하였다. 그림 7은 Four-point prove의 電氣의 特性을 주는 同時에 이 그림 7은 半導體의 固有抵抗 測定에 있어서 매우 有益한 役割을 한다.

參考文獻

1. F.M. Smits: The Bell System Technical Journal, May 1958, pp. 711-718.
2. A. Mircea: Intreprinderea de Piese Radio si Semiconductori, Bucuresti, Rumania, September of 1963 pp. 459-462.
3. Valdes L.: I.R.E. 42, Feb., 1954, pp. 420-422.
4. Uhler, A.: The Bell System Technical Journal, 34, Jan. of 1955, p 105.
5. Ollendorff, F.: Potentialfelder der Elektrotechnik, Springer, Berlin, 1932.
6. Nikitina, V.N.: Izvest. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Geofiz. no 4, 1960, pp. 607-616.
7. L.A. Girifalco and D.R. Behrend: Physical Review, Vol, 124, No 2, October, 1961, pp. 420-427.
8. V.I. Stafeev: Journal of Technical Physics, Vol. XXVIII. No. 8, SSSR, 1958, pp. 1631-1641.
9. Erik Halién: Electromagnetic Theory, Published by John Wiley & Sons Inc. 1962, pp. 212-223.
10. Eugene Jahnke: Table of Functions with Formulae and Curves, Dover Publication, New York, 1945.
11. Frank M. Clark: Insulating Materials for Design and Engineering Practices, John Wiley & Sons Inc. pp. 521-606.
12. Poehler T.O. and W. Liben: IEEE, June of 1964, pp. 731-732.

附 錄

A-1. 圓筒 shell의 幾何學的 因數

단일 두개의 同軸 coil system 간의 圓形 loop 電流의 幾何學的 因數가  $r < d$  일 때 同軸 圓筒型으로 構成되었다면 幾何學的 因數  $G_r$ 은 (4)式에서

$$G_r = \int_{-\infty}^{\infty} g dz, \\ \text{但 } g = \frac{d}{2} \cdot$$

$$0 < k < 1$$

$$G_r = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{d}{2} \frac{r^3 dz}{\left[ r^2 + \left( z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2} \left[ r^2 + \left( z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$= \int_{-d/2}^{d/2} \frac{d}{2} \frac{r^3 dz}{\left[ r^4 + z^4 + \frac{d^4}{16} - z^2 d^2 + 2r^2 z^2 + 2r^2 z^2/4 + 2d^2 z^2/4 \right]^{3/2}}$$

여기서  $\tan \theta = \frac{z}{r}$ ,  $\frac{dz}{\cos^2 \theta} = \frac{dr}{r}$ ,  $u = \frac{2r}{d}$  로 놓으면

$$G_r = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dr^4 \cdot d\theta}{2 \cos^2 \theta d^4 \left[ \left( \frac{r^4}{d^4} + \frac{1}{16} + \frac{r^2}{2d^2} \right) + \left( \frac{2r^4}{d^4} - \frac{r^2}{2d^2} \right) \tan^2 \theta + \frac{r^4 \tan^4 \theta}{d^4} \right]^{3/2}}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{u^4 d\theta}{2d \cos^2 \theta [(u^2+1)^2 + 2u^2(u^2-1) \tan^2 \theta + u^4 \tan^4 \theta]^{3/2}}$$

이 方程式은 橢圓積分의 表를 使用하여 計算하므로써 그 解를 얻는다.

$$G_r = \frac{1}{2d} \frac{u}{(u^2+1)^2} \left[ (u^2+3)(\sqrt{u^2+1}-1) K(k) - (u^2-1)(\sqrt{u^2+1}+1) E(k) \right]$$

故로 (5)式이 求하여졌다. 여기서

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad k^2 < 1$$

$$k = \frac{2(u^2+1)^{1/4} (\sqrt{u^2+1}-1)}{u^2} \quad k^2 < 1$$

$$u = \frac{2r}{d}$$

이 解에서  $K(k)$ ,  $E(k)$  및  $k$  는 各各 第一種, 完全 橢圓積分 및 橢圓積分의 母數인 複素數이다.  $k^2$  이 0 과 1 사이에서 實數가 되면 橢圓積分은  $-\frac{\pi}{2}$  와  $\frac{\pi}{2}$  사이의 實數에 對해서 實數值가 된다.  $K(k)$ ,  $E(k)$ 는 二項定理에 依해서 다음과 같이 展開된다.

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 k^4 + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \right)^2 k^6 + \dots \right]$$

$$0 < k < 1$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \frac{k^4}{4} - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right]$$

이 橢圓積分은  $K(k)$  및  $E(k)$ 의 數值的 計算法에 依해서도 얻어진다. 橢圓積分의 變換으로부터 다음 式을 얻는다.

$$K(k) = \frac{2}{1-k'} k \left( \frac{1-k'}{1+k'} \right)$$

$$k_0' = k', \quad k'_{n+1} = \frac{2kk'n}{1+k'n}, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{(1-k'n)}{(1+k'n)} \rightarrow 0, \quad K(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore K(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1+k'n}$$

A-2. 圓板에 對한 垂直幾何學의 因數

두 個의 coil 系간의 圓形 loop 電流에 對한 垂直幾何學 因數가 圓板으로 구성되었다면 幾何學의 因數  $G_z$  는 다음과 같다.

$$G_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{2} \frac{r^3 dr}{2 \left[ r^2 + \left( z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2} \left[ r^2 + \left( z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

여기서  $u=r^2$ ,  $du=2rdr$ ,  $M=(z+\frac{d}{2})$ ,  $N=(z-\frac{d}{2})$  라 놓으면

$$G_z = \frac{d}{4} \left[ \frac{-2[(M^2+N^2)u+2M^2N^2]}{[4M^2N^2-(M^4+2M^2N^2+N^4)] \sqrt{u^2+(M^2+N^2)u+M^2N^2}} \right]_0^{\infty}$$

$$- \frac{2(M^2+N^2) \left( 2 \frac{1}{2} - 1 \right)}{[4M^2N^2-(M^4+N^4)]}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{[u^2+(M^2+N^2)u+M^2N^2]^{3/2}}$$

$$\therefore G_z = \frac{d}{4} \frac{2(M^2+N^2)-4MN}{(M^2-N^2)^2}$$

여기서  $M$ ,  $N$ 를 다시 置換하면

$$G_z = \frac{d}{4} \frac{2 \left( z + \frac{d}{2} \right)^2 + 2 \left( z - \frac{d}{2} \right)^2 - 4 \left( z^2 - \frac{d^2}{4} \right)}{\left[ \left( z + \frac{d}{2} \right)^2 - \left( z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^2}$$

故로 (6)式이 유도 되었다.

i)  $-\frac{d}{2} > z > \frac{d}{2}$

$$G_z = \frac{d}{4} \frac{4z^2 + d^2 - 4z^2 + d^2}{(2zd)^2} = \frac{8}{8z^2}$$

ii)  $-\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$

$$G_z = \frac{d}{4} \frac{4z^2 + d^2 - d^2 + 4z^2}{4z^2 d^2} = \frac{1}{2d}$$

本論文의 理論的 部分은 1964年 1月22日 IRE 學會 主權에서 열린 美國 東南部地區 大學 學術研究會에서 筆者에 依하여 發表되었던 本文에 實際의인 微視的 測定을 追加한 것을 筆者의 諒解를 얻어서 번역한 것이다.

譯者 仁荷工大 J. K. Lee  
(1965年 2月 20日 接受)