

相似型電子計算機에 의한 周波數變調系統의 解析

(Analysis of Frequency Modulation System by Analog Computer Techniques)

韓 萬 春* · 邊 慕 瑞**
(Man-Choon Han, Mo-Suh Byun)

Abstract

To analyze the frequency modulation system the characteristic equation of the F-M system, i.e., Mathieu's equation, is derived from the equivalent circuits of direct modulation system. The analysis of F-M equation is undertaken by the Yonsei 101 Analog Computer. And the computer solution is compared with the theoretical solution.

It is concluded that not only the frequency but also the amplitude of the carrier wave are changed by varying the modulation index and the system becomes unstable if the modulation index is increased near to unity.

1. 序 論

信號를 變調하는 方法은 使用하는 搬送波에 依하여 持續波(C-W)變調과 펄스(pulse)變調로 大別할 수 있고, 또 指定된 搬送波를 變調하는 方法에 따라 振幅變調, 周波數變調 및 位相變調로 區分할 수 있다. 이러한 各種 變調方式은 個別的으로 使用할 수도 있으나 完全한 通信系統을 構成하기 위하여는 必要에 따라 2種 以上の 方式을 組合하여 使用하는 境遇도 있다.

周波數變調는 上述한 持續波變調의 一種으로써 振幅變調와 比較하면 改善된 應答特性을 얻는데 必要한 周波數帶域幅은 增加하지만 雜音이나 混信을 잘 辨別해내는 特徵이 있다.

그러므로 本稿에서는 이러한 特性을 가지는 周波數變調系統의 微分方程式을 誘導한 다음 延世 101 相似型 電子計算機에 依하여 解를 求하고 變調度의 變化가 被變調波의 周波數, 振幅 및 系統의 安定性에 미치는 影響을 研究, 檢討하려고 한다.

2. 周波數變調波의 發生

周波數變調波를 發生시키는 方法은 間接變調과 直接變調의 두가지로 大別할 수 있다.

A. 間接變調

積分과 位相變調에 依하여 狹帶域周波數變調波를 發生시킨후 周波數偏差를 必要한 值까지 增加시키기 爲하여

* 延世大學理工大學電氣工學科. 理事.
Dept. of Electrical Eng, College of Science & Engineering, Yonsei University. (D)

** 首都工科大學電氣工學科. 正會員.
Dept. of Electrical Eng. Soo-do Technical Institute.(M)

周波數를 遞倍한다. 즉 처음에 變調信號를 積分하여 크리스탈發振器에서 供給되는 搬送波를 位相變調하는데 使用한다.

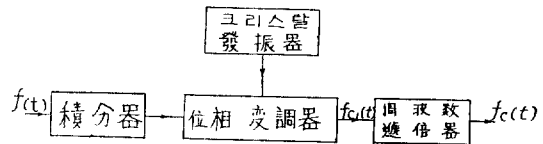


그림 1 間接變調系統圖

B. 直接變調

이 方式은 變調信號가 直接 搬送波의 周波數를 變化시키는 變調方式이며 間接變調方式보다 周波數遞倍를 省略해도 된다. 實例을 들면 代表的 直接變調方式인 리액턴스管變調器는 變調信號의 入力에 따라 同調回路의 리액턴스를 變化시키는데 사용된다.

그림 2의 (a) 는 可變리액턴스가 並列連結된 發振器同調回路이며 (b) 는 리액턴스管 變調回路의 實例이다. 本 論文에서는 주로 直接變調方式을 取扱한다.

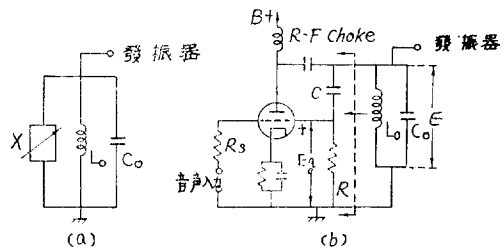


그림 2. 리액턴스管變調器

먼저 入力信號가 零인 條件下에서 同調回路의 全 實効

容量은 다음과 같다.

$$C_{eff} = C_0 + C + gmRC \approx C_0 + gmRC, \quad gmK \gg 1 \dots (1)$$

變調波인 可聽周波入力電壓 E_s 가 變化하면 그리드 바이어스 電壓은 入力信號에 따라 變化하며 眞空管의 遷移 컨덕턴스 g_m 도 變化하고 따라서 同調回路에 挿入되는 實効容量 $gmRC$ 도 變化한다.

그림 3의 (a)는 五極管을 使用하는 리액턴스管 變調器이며 (b)는 微小信號에 대한 (a)의 等價回路로서 線型增分모형을 使用하여 그린 것이다.

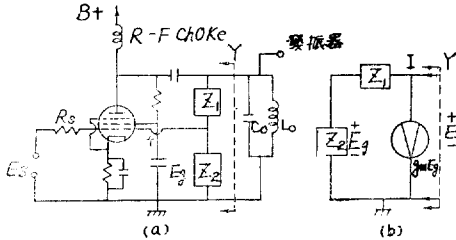


그림 3. 五極管 리액턴스管 變調器

陽極컨덕턴스 g_p 를 無視하고 $R_s \gg Z_2$ 로 假定하면 그림 3의 (b)에서 어드미턴스는

$$Y = \frac{I}{E} = \frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{g_m E_g}{E}, \quad g_p = 0, \quad R_s \gg Z_2 \dots (2)$$

인데

$$E_g = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} E \dots (3)$$

이므로 $Z_1 \gg Z_2, gmZ_2 \gg 1$ 이면

$$Y = \frac{1}{Z_1 + Z_2} (1 + gmZ_2) \approx \frac{gmZ_2}{Z_1} \dots (4)$$

이다.

즉, 이 同調回路의 兩端에서 본 어드미턴스는 gm 에 比例한다.

이 回路에서 Z_2 와 Z_1 중 하나가 리액턴스이고 하나는 抵抗이면 Y 는 gm 에 比例하는 冢冢턴스로 된다. 例를 들어 $Z_1 = 1/j\omega C$ 이고 $Z_2 = R$ 이면 $Y = j\omega gmRC$ 로써 實効容量으로 볼 수 있고 $Z_1 = R, Z_2 = 1/j\omega C$ 이면 $Y = gm/j\omega RC$ 로써 實効컨덕턴스로 볼 수 있다. 즉 $Z_1 = 1/j\omega C, Z_2 = R$ 이며 $R \ll \frac{1}{\omega C}, gm \gg 1$ 인 경우 리액턴스管回路는 發振器 同調回路의 回路定數 L_0, C_0 의 兩端에 걸린 實効容量 $C' = gmRC$ 으로 動作한다.

C' 를 包含하여 全體回路의 發振周波數는

$$\omega^2 = \frac{1}{L_0(C_0 + C')} = \frac{1}{L_0 C_0 (1 + C'/C_0)} \dots (5)$$

이며 $C' \ll C_0$ 로 假定하면 共振周波數는 近似的으로 다음과 같이 表示된다.

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{1 + C'/C_0}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{C'}{2C_0}\right), \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C_0} \dots (6)$$

3. FM 方程式의 構成

A. 周波數變調系統의 方程式

1) 리액턴스管變調器에서 求한 方程式

리액턴스管變調回路와 그 等價回路는 그림 2에 表示하였는데 그 等價回路만을 그림 4에 옮겨 그렸다. (a)에는 回路定數 R, L, C 를 다 表示하였으나 (b)에는 thermionic valve의 負抵抗의 效果를 利用하여 連結線 및 誘導線輪의 抵抗의 效果를 中和시켰다고 생각하며 抵抗에서의 損失이 없다고 假定하여 抵抗을 無視한 것이다.

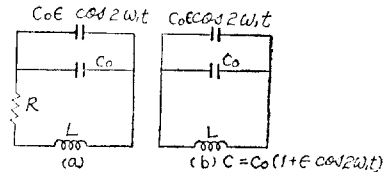


그림 4. 리액턴스管變調器의 等價回路

(b)에서 리액턴스管變調器의 入力信號인 可聽周波數가 $2\omega_1$ 이라면 發振回路의 容量 C 는 時間에 對하여 變化하며 $C = C(t)$ 로 表示할 수 있다.

容量 C 에 充電되는 電荷를 Q 라하면 回路方程式은 다음과 같다.

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC(t)} = 0 \dots (7)$$

여기서 $C(t) = C_0(1 + \epsilon \cos 2\omega_1 t)$ 이고 C_0 는 常數이며 $\epsilon \ll 1$ 로 假定하면 위의 식은 다음과 같이 表示된다.

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC_0(1 + \epsilon \cos 2\omega_1 t)} = 0 \dots (8)$$

여기서 $t=0$ 이면 搬送周波數는 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ 이 된다. 이때 $C(t)$ 는 $C_0(1 - \epsilon)$ 에서 $C_0(1 + \epsilon)$ 까지 周期的으로 變化하므로 周波數는 $1/[LC_0(1 - \epsilon)]$ 로 부터 $1/[C_0(1 + \epsilon)]$ 까지 變化하며 搬送波는 變調되었다고 한다.

$(1 + \epsilon \cos 2\omega_1 t)$ 을 二項定理에 依해 展開하여 (8)식에 代入하면 (8)식은 다음과 같이 變形된다.

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega_0^2 (1 - \epsilon \cos 2\omega_1 t + \epsilon^2 \cos^2 2\omega_1 t - \epsilon^3 \cos^3 2\omega_1 t + \dots) Q = 0 \dots (9)$$

여기서 $\epsilon^2, \epsilon^3, \dots$ 의 高次項을 無視하면 周波數變調系統의 微分方程式으로

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega_0^2 (1 - \epsilon \cos \omega_1 t) Q = 0 \dots (10)$$

을 얻을 수 있다.

2) Inverse capacitance 變調器에서 求한 方程式

이것은 그림 5와 같은 容量 microphone에서 볼 수 있다.

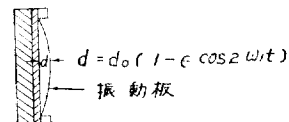


그림 5. 容量 Microphone

周波數 $2w_1$ 의 音波가 振動板에 부딪치면 microphone의 容量은 거리 $d=d_0(1-\epsilon \cos 2w_1 t)$ 에 反比例하여 變化하여 任意的 瞬間의 容量은 $c(t)=k/d_0(1-\epsilon \cos w_1 t)$ 로 表示된다. 여기서 d_0 는 振動板이 停止하였을때의 極板間의 거리이고 k 는 microphone에 따라 決定되는 常數이다

(7) 式에서 $c = \frac{k}{d}$ 로 表示하면

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC_0}(1-\epsilon \cos 2w_1 t)Q = 0 \dots\dots\dots(11)$$

또는

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + w_0^2(1-\epsilon \cos 2w_1 t)Q = 0 \dots\dots\dots(12)$$

이며 $w_0^2 = 1/LC_0$ 이다.

여기서 (10)식과 (12)식을 比較하면 각각 다른 形態의 變調器에서 出發하였으나 結局 같은 式에 到達함을 알수 있다.

이제 $z = w_1 t$, $Q = y$ 를 (12)식에 代入하여 整理하면

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z)y = 0 \dots\dots\dots(13)$$

을 얻을수 있으며 여기서

$$a = (w_0/w_1)^2$$

$$q = w_0 \frac{\Delta w}{w_1^2} \dots\dots\dots(14)$$

$$\Delta w = \frac{1}{2}(w_{max} - w_{min}) = \frac{1}{2}w_0\epsilon$$

이다. 이때 $\Delta w/w_0 = \gamma$ 로 하면 2γ 는 變調度를 表示한다.

(13) 式은 Mathieu 方程式의 一般形이다. 그러므로 周波數變調系統이 變數係數 微分方程式인 Mathieu 方程式으로 表示됨을 알수 있다.

B. 理論的 考察

여기서는 解를 求하는 過程은 省略하고 結果만을 表示하기로 한다. 여러가지 理論的 解法이 있으나 먼저 Riccati 型으로의 變換에 依한 概略的 近似解를 求하면 $h = (q/a^2) \gg 1$ 로 놓았을때 解는 다음과 같이 된다.

$$y = \bar{c} \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(h) \cos[(a^{\frac{1}{2}} - 2r)z - \bar{\alpha}] \dots\dots\dots(15)$$

여기서 \bar{c} 및 $\bar{\alpha}$ 는 常數이다.

(15) 式에 依하면 偏解는 一定한 常數로 表示된다.

더 正確한 解를 求해보면 Mathieu의 微分方程式을 滿足하는 二個의 獨立解는 다음과 같이 表示된다.

$$\left. \begin{aligned} y_1(z) &\approx \frac{\text{const}}{(a-2q \cos 2z)^{\frac{1}{2}}} \cos[(a+2q)^{\frac{1}{2}} E(\lambda, z)] \\ y_2(z) &\approx \frac{\text{const}}{(a-2q \cos 2z)^{\frac{1}{2}}} \sin[(a+2q)^{\frac{1}{2}} E(\lambda, z)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

여기서 $E(\lambda, z)$ 은 Modulus $\lambda = 2 \left[\frac{q}{(a+2q)} \right]^{\frac{1}{2}} < 1$ 의 第二種 不完全楕圓積分이다.

(16) 및 (17)式에서 周波數變調波는 周波數뿐만 아니라 振幅도 周期的으로 變化함을 알수 있다.

(8)式에서 $a = w_0^2 = \frac{1}{LC_0}$, $\rho^2 = (1 + \epsilon \cos 2w_1 t)^{-1}$ 로 놓

으면 $Q'' + a\rho^2 Q = 0$ 로 된다.

$a \gg 1$ 및 $0 < \epsilon < 1$ 의 條件이 滿足되면 (16)式에서 安定解는 다음과 같이 된다.

$$Q = A(1 + \epsilon \cos 2w_1 t)^{\frac{1}{2}} \cos[w_0 \int_0^t dt / (1 + \epsilon \cos 2w_1 t)^{\frac{1}{2}}]$$

$$= A(1 + \epsilon \cos 2w_1 t) \cos\left\{ \frac{w_0}{(1 + \epsilon)^{\frac{1}{2}}} \int_0^t dt / (1 - \lambda^2 \sin^2 w_1 t)^{\frac{1}{2}} \right\}, \lambda^2 = 2\epsilon / (1 + \epsilon) \dots\dots\dots(17)$$

여기서 A 는 常數이며 最大最小 振幅比는 다음과 같이 된다.

$$\left[\frac{a+2q}{a-2q} \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(18)$$

4. 計算機의 結線 및 解의 記錄

A. 計算機의 結線

(12)式에서 $y = Q$, $w_0^2 \epsilon = 2q$ 로 놓으면 代表的 周波數變調系統의 方程式은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (w_0^2 - 2q \cos 2w_1 t)y = 0 \dots\dots\dots(19)$$

(19)式의 解를 求하기 위하여 相似型電子計算機를 結線하려면 먼저 各種 常數를 決定하여야 한다.

直流增幅器의 出力電壓은 ± 100 V 이므로 y 의 最大値를 100 V 以內로 定한다.

ϵ 의 값이 $0 < \epsilon < 1$ 일때 $w^2 - 2q \cos 2w_1 t$ 의 값은 $0 \sim 100$ V 以內이다 하므로 w^2 및 $2q$ 를 40 V로 하면 $2q \cos 2w_1 t$ 가 ± 40 V일 때 $w^2 - 2q \cos 2w_1 t$ 는 $0 \sim 80$ V 이므로 計算機는 安定한 演算이 可能하다.

이때 乘算機의 特性을 考慮하여 w_{max} 이 4 CPS 以內로 되면서 演算素子의 選擇에 便利하게 하기 위하여 그림 6의 k_1, k_2, k_3 를 각각 10, 12, 10으로 하면 搬送周波數는 $w_0 = \sqrt{\frac{40 \times 10 \times 12 \times 10}{100}} = 21.9$ 이며 $f_0 = w_0 / 2\pi = 3.48$ (CPS)이다.

또 $2w_1$ 은 w_0/w_1 의 比를 100單位에 가깝도록 크게 하기 위하여 k_5, k_6 을 각각 $\frac{1}{2}$ 로 하면 $(2w_1)^2 = \frac{1}{4}$, $w = 0$. 25 이므로 $f_1 = \frac{w_1}{2\pi} = 0.404$ (CPS)이며 周期은 約 25秒이다.

그러면 $w_0/w_1 \approx 86.4$ 로써 搬送波와 變調信號이 周波數比가 약 86.4인 두 信號間의 周波數變調現象을 考察할 수 있는 것이다.

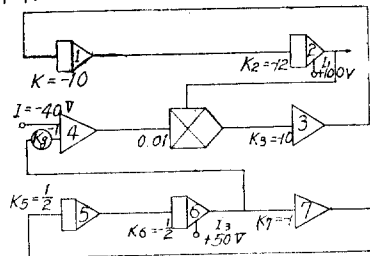


그림 6 計算機 結線圖

以上에 對한 結線圖가 그림 6 이다.

B. 記 錄

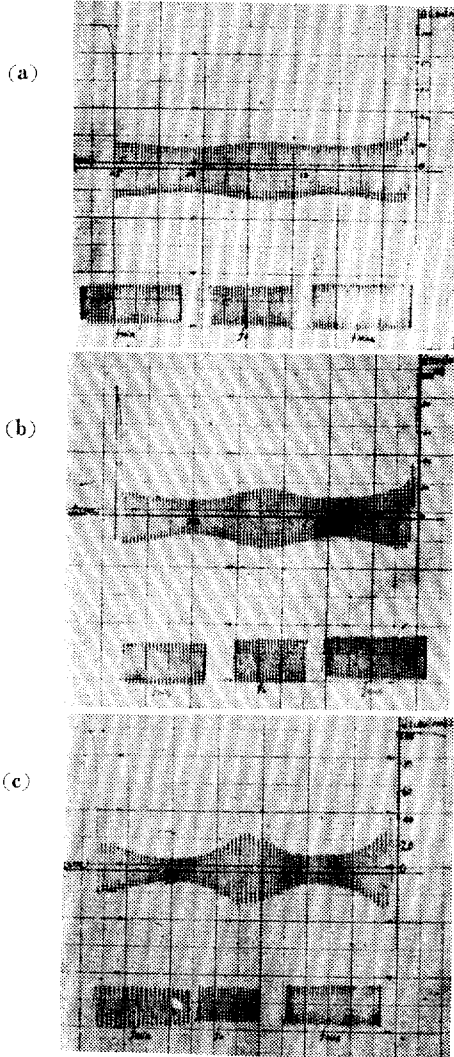
周波數變調는 無線周波帶의 搬送波를 音聲周波帶의 變調信號로 變調시키는 것이 實際的인 意義가 있으나 低速型計算機로는 time scaling 을 行하여도 實際系統에 대한 simulation 은 特別한 意味가 없으므로 여기서는 w_0/w_1 의 比만을 위와 같이 定하고 演算을 行하면 變調信號의 한 周期인 25 秒間의 演算結果가 解로 된다.

記錄器의 記錄速度를 5 mm/sec 로 하였으므로 解는 記錄紙 12.5 cm 을 觀察하여야 한다.

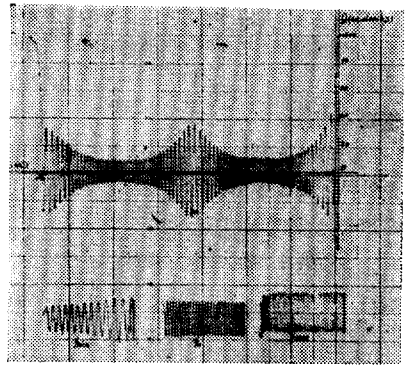
變調度의 變化에 對한 解의 周波數 및 振幅의 變化가 그림 7의 (a)로부터 (e)까지에 記錄되어 있다. 그림 7의 (f)는 變調度를 增加시켜 不安定狀態에 到達하였을때의 解를 나타낸다.

그림 7-a $r=0.0625$ (變調度 12.5%)의 경우

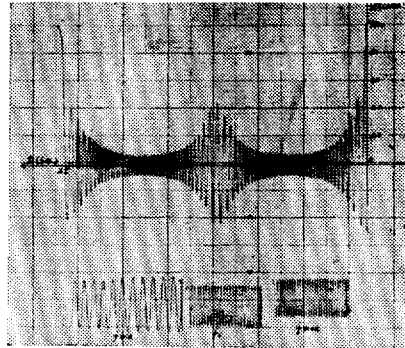
그림 7-b $r=0.125$ (變調度 25%)의 경우



(d)



(e)



(f)

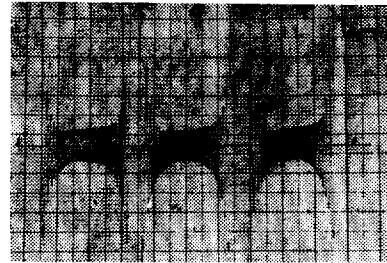


그림 7. 解曲線

그림 7-c $r=0.25$ (變調度 50%의 경우)

그림 7-d $r=0.375$ (變調度 75%의 경우)

그림 7-e $r=0.438$ (變調度 87.5%의 경우)

그림 7-f $r=0.495$ (變調度 99%의 경우)

5. 結果考察

A. 周波數 및 變調度의 變化

表 1 은 그림 7-a 에서 그림 7-e 까지 的 解曲線에서 實際의 周波數와 變調度를 求하여 理論値와 比較한 것이다.

表 1 周波數 및 變調度의 變化

그림	理論 值		計 算 機 值		誤 差 (%)		
	f_0 (CPS)	變調度	$A_{f_{max}}$ (CPS)	$A_{f_{mn}}$ (CPS)	A_{f_0} (CPS)	變調度	變調度
7-a		0.125	15.2	13.3		0.127	+1.6
7-b		0.25	15.75	12.1		0.244	-2.4
7-c	3.48	0.50	17.1	9.9	15	0.487	-2.6
7-d		0.75	17.4	1.4		0.734	-2.3
7-e		0.875	17.8	4.5		0.887	+1.35

여기서 方程式에 의한 理論的인 變調度는 計算機에 의한 解에서도 確認할수 있었으며 變調度의 誤差는 最大 2.6%였다.

B. 振幅의 變化

(18)式에 依하면 理論的으로 變調度에 對한 振幅의 變化를 알수있다. 表 2는 變調度에 對한 振幅變化의 理論值와 實測值를 比較한것이다.

表 2 極大極小 振幅比

구	립	理論值	計算機值	較正值
7-a		1.065	1.3	1.01
7-b		1.137	1.62	1.03
7-c		1.316	2.89	1.15
7-d		1.626	4.37	較正不能
7-e		2.24	6.3	"

記錄器의 周波數特性의 1CPS 以下에서는 良好하나 그 以上에서는 不良하여 實測한 振幅比는 理論值와는 큰 差異가 있었다. 이것을 較正하기 위한 較正曲線이 그림 8 인데 特性의 變化가 1CPS 以下와 2CPS 以上에서는 약 15% 정도의 誤差로 概略的인 較正이 可能하였으나 變化가 심한 1CPS 부터 2CPS 사이에서는 較正이 전혀 不能하였다.

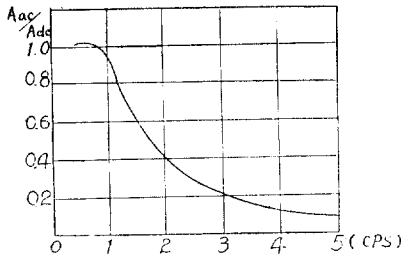


그림 8. 記錄器特性較正曲線

C. 系統의 安定性

理論的 考察에 依하면 周波數變調系統은 $\gamma < 0.5$ 에서 安定하다. 이것을 檢討하기 위하여 變調信號의 最大振幅을 增加시켜 39.6V에 이르자 解가 不安定하게 되었다.

이 結果를 記錄한것이 그림 7-f이다. 이것은 變調度가 9.99%, $\gamma = 0.495$ 인 경우에 該當되며 理論上의 臨界值인 $\gamma = 0.5$ 와 比較하면 誤差가 1%이었다.

6. 結 論

周波數變調系統에 대한 微分方程式을 誘導하고 延世 101 相似型電子計算機로 解를 求하여 變調度에 따른 周波數 및 振幅의 變化를 理論值와 比較하였는데 이것을 整理하면 다음과 같은 結論을 얻을수 있다.

1. 理論上의 變調度의 變化는 計算機에 의한 解에서도 理論值와 같은 周波數偏差를 招來한다.

2. 周波數變調에서도 약간의 振幅變化가 일어난을 確認할 수 있다. 記錄器의 特性上 正確한 振幅比의 測定은 困難하였으나 ω_0/ω_1 이 매우 크고 變調度가 작은 無線周波帶에서는 振幅의 變化가 無視할수 있을 정도이다.

3. 臨界安定點이 $\gamma = 0.5$ 에서 發生하므로 100%變調는 系統의 不安定을 招來한다.

本 實驗은 無線周波帶에 對하여 行하는 것이 더욱 意義가 있으나 高速度의 演算 및 記錄裝置가 要求되며 ω_0/ω_1 의 큰값에 對한 計算은 實質的으로 困難하였음을 附言해 둔다.

參 考 文 獻

1. 韓萬春外 2人
延世 101 아나로그 컴퓨터의 設計와 試作(I), (II)
原子力院, 1964年, 1966年
2. 韓萬春
延世 101 Analog Computer
延世大學校八十週年紀念論文集, 自然科學編 1965年
3. Schwartz, Mischa;
Information Transmission, Modulation and Noise,
Mc-Graw-Hill Book Co. Inc., New York,
Chapter, II, 1959.
4. McLachlan N.W.;;
Theory and Application of Mathieu Function,
Oxford Univesity Press, Amen House, London,
Chapter IV, 1951.
5. Huskey, Harry D, and Korn, G.A.;;
Computer Handbook.
McGraw-Hill Book Co. Inc., New York.

1967年 5月 15日 接受