

# 非線形 原子爐制禦系의 特性解析

(The Analysis of the Nonlinear Reactor Control System)

梁 興 錫\*  
(Heung Suk-Yang)

## Abstract

To analyze the stability criterion and the dynamic performance of the nonlinear reactor control system which involve the on-off element and gear backlash, the concept of describing function is developed for the system of two nonlinear elements are connected by linear element.

Using the derived describing function and frequency response method, the stability criterion and the dynamic performance of the nonlinear reactor control system are analyzed, and the results of the analysis are conformed by analog computer.

## I. 序 論

原子爐制禦에 있어서 가장 중요한 問題는 原子爐出力을 要求하는 값으로 保持함에 있어서 그系の 安定性(stability)과 過渡應答(transient response)이 滿足할 수 있는 것이라야 한다는 것이다. 過去の 原子爐制禦는 安全問題에 단 치우쳐 그의 過渡應答效能에 對하여는 細密한 關心을 기울이지 않았으나 近來에 와서는 制禦效率에 重點을 둔 最適制禦가 重要視되게 되었다. 이에 따라 原子爐制禦系의 動特性解析도 더욱 正確함을 必要로 하여 第1次的近似法으로서 線型視하던 것도 그의 實質的인 非線型性を 考慮하여야 하게끔 되었고 또한 制禦系統構成에 있어서도 線型制禦系보다는 機械部의 磨耗 및 綜合設計上의 經濟性으로 因하여 非線型要素가 介入되게 되어 實質的으로 原子爐制禦系는 非線型問題로 取扱하게 되었다.

非線型原子爐制禦系를 取扱함에 있어서의 가장 큰 難點은 그의 動特性解析이 線型制禦系에 關한 것과 같이 體系화된 方法으로 解析할 수 없다는 點이다. 現在로서 非線型系의 解析은 位相面解析法(Phase Plane Analysis Method)과 周波數應答法(Frequency Response Method)의 數學的方法和 Analog Computer에 依한 實測法으로서 解析되고 있으나 位相面解析法으로서는 原則的으로 二次式까지가 解析可能의 限界點이 되어 있고, 周波數應答法은 1個의 非線型要素와 其他線型要素로 이룩된 系에 있어서 Describing 函數概念의 適用을 받을 수 있는 範圍에서 解析可能하나 非線型要素와 線型要素가 混合된 系에 對한 解析에는 難點이 많으며 Analog computer

에 依한 Simulation 法은 普遍性을 가진 理論的根據가 없다.

本論文에 있어서는 斷續要素(on-off element)와 Gear backlash 要素의 2個의 非線型要素 사이에 電動機가 插入된 普遍的인 非線型原子爐制禦系에 對하여 周波數應答法의 Describing 函數概念을 擴充適用함으로써 그의 動特性解析을 이룩하고 “Analog”計算機에 依한 Simulator로서 그 解析의 妥當性을 立證하였다.

## II. 非線型原子爐制禦系

線型原子爐制禦系에 있어서는 原子爐雜音(Reactor noise)等에 依하여 制禦棒을 驅動하는 制禦電動機는 恒常驅動常態에 놓이게 되어 制禦棒과의 連結齒車部 및 制禦電動機自體의 機械的 磨耗가 甚하며 또한 制禦電動機도 零에서 最大速度까지 驅動할 수 있는 容量을 가져야하므로 綜合設計上 複雜性을 갖게 되는데 發電爐와 같이 이것들이 高溫高壓의 加壓容器內에 位置하게 되고 그爐의 繼續的運營이 要求될 때는 爐雜音等에 依한 不必要한 驅動에 依한 壽命의 短縮은 致命的인 缺陷으로 된다 따라서 發電爐를 비롯한 大型原子爐에 있어서는 一般的으로 一定誤差範圍內에서는 驅動하지 않는 斷續要素(on-off element; 繼電器)를 包含한 非型制禦系를 쓰게 된다. 普遍的인 非線型原子爐制禦系의 Block圖는 그림 1과 같다.

檢出된 原子爐出力과 要求되는 出力值와의 比較로서 檢出되는 誤差信號  $\epsilon(s)$ 는 一般的으로 線型要素인 進相補償回路를 거쳐 補償된 誤差信號  $\epsilon_c(s)$ 가 되어 非線型要素인 繼電器를 動作시키게 된다.

繼電器의 Pullin 電壓과 drop-out 電壓은 各各 解析의

\* 서울工大電氣科教授 大韓電氣學會理事

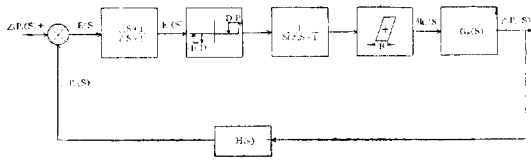


그림 1 非線型原子爐制禦系

便宜上 誤差出力信號의 單位로서 換算表示하며 繼電器의 時定數는 無視할 수 있다. 繼電器로서 動作되는 電動機는 一定速度를 가진 同期電動機로서 繼電器가 接點되면 電動機는 一定速度로 始動하게 되는데 이때에 時間遲延을  $\tau_3$ 라고 한다.

이 電動機의 回轉方向은 誤差信號의 正負에 따라 決定되며 誤差信號를 없애게 하는 方向으로 回轉한다. 이 電動機는 齒車들로서 制禦棒과 連結되어 制禦棒을 爐心部에 出入시킴으로써 爐反應度를 變化케 한다. 이때에 있어서 制禦棒 位置에 따르는 爐反應度의 變化는 작은 位置變化에 對해서는 線型의 比例로 認定되므로 電動器의 速度는 바로 反應度의 變化率 即 Shim Rate로 볼 수 있으므로 그 比例係數를  $K$ 라고 한다. 그리고 電動機와 制禦棒은 齒車로서 連結되므로 이 齒車의 Backlash는 非線型 要素로서 介入되며 이는 齒車의 Backlash 角度에 對等하는 反應度變化  $B$ 로서 表示한다.

### Ⅲ. 非線型原子爐 制禦系의 解析理論

線型制禦系의 安定性判別 및 特性解析은 그들의 傳達函數의 複素獨立變數  $s$ 를  $j\omega$ 로 代置한 周波數應答概念에 立脚한 Nyquist 圖 Bode 圖等의 作成으로서 比較的 容易하게 解析되며 그 技巧은 充分히 發達되어 體系化하였으며 널리 應用되고 있다. 非線型制禦系에 이 周波數應答概念을 擴充適用한 Discribing function을 使用함으로써 線型制禦系의 解析法을 그대로 非線型制禦系解析에 適用할 수 있다. 이 Discribing function에 對한 基本的인 研究는 Kochenburger의 繼電器-모機構의 解析 및 綜合에 關한 論文에 發表되었다.

正弦波入力에 對한 非線型系의 非線型의 應答出力은 數學的으로 Fourier 解析法에 依하여 基本波 및 多數의 高調波들의 合計로서 表示될 수 있다. 이때 이 Fourier 展開의 基本項에 對한 振幅 및 位相에 正弦波入力에 對한 非線型應答의 近似值로서 使用하는 것이다. 나머지 高調波들의 系의 綜合的 增幅率(Gain)이 周波數의 增加에 따라 繼續的으로 減少하는 系에 있어서는 無視할 수 있다. 이와같은 Discribing Function의 適用限界에 對해서는 Truxal의 著書에 詳述되어 있다.

前述한 非線型制禦에 對한 Discribing 函數를 쓴 線型

化取扱은 1個의 非線型要素와 線型要素들로서 構成된 制禦系에 對해서만 考察되어 왔다. 그런데 本論文中에서 取扱하려는 原子爐制禦系는 電動機란 線型要素를 사이에 둔 繼電器와 齒車 Backlash의 2個의 非線型要素와 其他 線型要素로 構成된 副雜한 制禦系이다.

이와같은 非線型原子爐 制禦系의 解析을 爲하여 原子爐의 傳達函數를  $G_r(S)$ 라 하고 이것은 原子爐自體의 反應度 Feedback 까지를 包含한 것이며 基準出力  $P_0$ 에서 少量의 出力變化 範圍內를 생각하여 線型視한다. 그리고 制禦系는 통털어 非線型要素  $N_{1+2}$ 와 線型傳達函數  $G(S)$ 로서 表示하며 原子爐出力에서 誤差檢出까지의 Feed back 傳達函數를  $H(S)$ 라 하여 그림 (2)와 같이 構成한다.

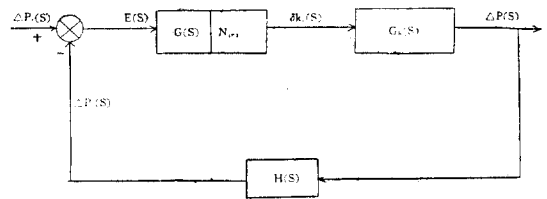


그림 2 Discribing 函數로 代置된 線型화된 系統

이에 對한 動特性式은

$$\frac{\Delta P_c(S)}{\epsilon(S)} G(S)N_{1+2}G_r(S) \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\Delta P_c(S)}{\Delta P_r(S)} = H(S) \dots\dots\dots(2)$$

$$\Delta P_r(S) - \Delta P_c(S) = \epsilon(S) \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore \frac{\Delta P_c(S)}{\Delta P_r(S)} = \frac{G(S)N_{1+2}G_r(S)H(S)}{1 + G(S)N_{1+2}G_r(S)H(S)} \dots\dots\dots(4)$$

(4)式에 있어서 安定條件은

$$1 + G(S)N_{1+2}G_r(S)H(S) > 0 \dots\dots\dots(5)$$

上記 式이 零이 될 때는 不安定하며 發振을 하게 된다.

$$-1 = G(S)N_{1+2}G_r(S)H(S) \dots\dots\dots(6)$$

即  $\frac{1 < -\pi}{N_{1+2}} = G(S)G_r(S)H(S) \dots\dots\dots(7)$

上記 (7)式이 이 非線型原子爐制禦系의 安定限界를 나타내는 것이며 非線型要素와 線型要素와의 關係를 나타내어져 있다.

여기에 있어서 問題點은 非線型要素인 繼電器와 齒車 Backlash를 한 묶음으로한 Discribing function  $N_{1+2}$ 를 導出하는 것이다.

### Ⅳ. Discribing 函數의 導出

問題하고 있는 非線型原子爐制禦系의 非線型要素인 繼電器와 齒車 Backlash는 그 사이에 線型要素로 取扱되는 電動機를 두고 있다는 點을 現今까지 解析되어 온

一般的인 非線型系와 다른 點이다. 그리고 非線型要素들의 Discribing 函數를 導出함에 있어서 그 非線型要素들 사이에 介在하는 線型要素의 作用에 對해서 考慮하지 않으면 안된다.

그림 1의 制禦系에 對한 解析의 便宜上 非線型要素 사이에 介在하는 電動機의 時間遲延은 實質的으로 無視되므로 그 傳達函數를  $K_r/S$ 라고 簡略化한다. 이때에 正弦波의  $e_c(\theta) = E_c \sin \theta$ 의 入力에 對한  $\delta_k(\theta)$ 는 그림 3과 같이 된다.

여기에 있어서

$$\theta_1 = \sin^{-1} \frac{P}{E_c}$$

$$\theta_2 = \sin^{-1} \frac{D}{E_c}$$

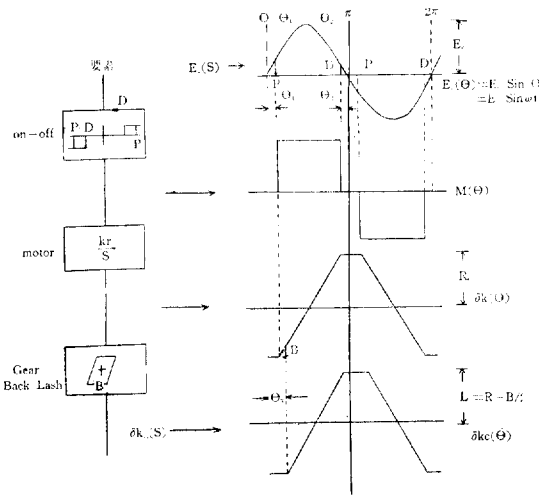


그림 3. Discribing 函數 導出

로 하여  $\delta k(\theta)$ 波型式을 Fourier 展開한 基本項은

$$\delta k_1(\theta) = \frac{2\sqrt{2}K_r}{\pi w} \left[ 1 + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \frac{wB}{K_r}) \right]^{1/2} \times \sin \left[ \theta - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} - \frac{wB}{2K_r} \right] \dots (8)$$

과같이 된다.

上式에 있어서

$$\frac{2\sqrt{2}K_r}{\pi w} \left[ 1 + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \frac{wB}{K_r}) \right]^{1/2} \dots (8-1)$$

은 基本項의 Amplitude(振幅)를 意味하며  $K_r/w$ 는 電動機에 依한 積分效果를 表示하고 있다.

그리고 sin 函數內의

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} - \frac{wB}{2K_r} \dots (8-2)$$

는 正弦波入力  $E_c$ 에 對한 位相遲延角을 나타낸 것이며 그中  $\frac{\pi}{2}$ 는 電動機의 積分效果에 依한 位相遲延角을 나타낸다. 그리고  $1/2(\theta_1 - \theta_2)$ 는 繼電器特性에 依한 位相

角이며  $\frac{wB}{2K_r}$ 는 齒車 Backlash 에 起因한 位相遲延角이다.

8式에 있어서의 線型的인 積分項  $\frac{1}{S} = \frac{1}{jw} = \frac{1}{w} \left| -\frac{\pi}{2} \right.$ 를 빼면 非線型出力

$$\delta k_1'(\theta) = \frac{2\sqrt{2}K_r}{\pi} \left[ 1 + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \frac{wB}{K_r}) \right]^{1/2} \times \sin \left[ \theta - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} - \frac{wB}{2K_r} \right]$$

의 入力  $E(\theta) \sin \theta$ 에 對한 比가 Discribing function 이 되므로

$$N_{1+2} = \frac{2\sqrt{2}K_r}{E_c \pi} \left[ 1 + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \frac{wB}{K_r}) \right]^{1/2} \left[ -\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) - \frac{wB}{2K_r} \right] \dots (9)$$

가 되며 除外한  $1/S$ 은 他線型傳達函數  $G(S)$ 에 包含시킨다.

實在의 非線型原子爐制禦系에 있어서 制禦棒을 齒車로 連結하였을 때 이 齒車 Backlash 는 極微少하여 無視되므로 이때는 繼電器 하나만의 非線型要素가 介入되는 境遇로서 上記(9)式에 있어서 Amplitude項의  $\frac{wB}{K_r}$

및 位相項의  $-\frac{wB}{2K_r}$ 가 各各  $B=0$ 이므로 消去되어 簡單한 Discribing function 이 된다.

$$N_1 = \frac{2\sqrt{2}K_r}{E_c \pi} \left[ 1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^{1/2} \left[ -\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \right] \dots (10)$$

이것은 (9)式에 比하여 周波數函數가 아니므로 解析上 大端히 簡略하다 Gear Backlash 를 無視할 수 없는 境遇의 Discribing function 은 周波數函數로 되어 解析上에 複雜性을 招來하게 된다.

### V. 動特性 解析

前章에서 導出된 非線型要素의 Discribing function  $N_1$  또는  $N_{1+2}$ 를 (7)式에 代入함으로써 此系의 安定性을 비롯한 動特性을 解析할 수 있다. 于先 簡略化를 爲하여 Gear Backlash 를 無視할 수 있는 境遇에 對하여 解析해 보면

$$N_1 = \frac{2\sqrt{2}K_r}{E_c \pi} \left[ 1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^{1/2} \left[ -\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right]$$

을 (7)式에 代入하면

$$\frac{1 \left( -\pi + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right)}{\frac{2\sqrt{2}K_r}{E_c \pi} \left[ 1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^{1/2}} = G_R(S)G(S)H(S) \dots (11)$$

于先 (11)式의 左側項에 對하여 考察해 보면

$$K_r = 0.025 \text{ Dollars/sec}$$

$$P = P_0 \text{의 } 1\%$$

$D = P_0$ 의 0.75%

$E_c \geq P$

라고 하였을 때 各種 값의  $E_c$ 에 對한 Amplitude 와 Phase 의 關係를 나타내 보면, 그림 (4)와 같다.

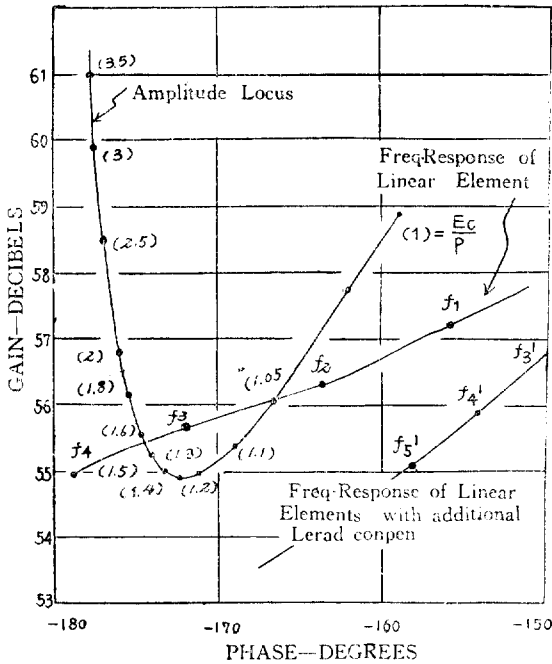


그림 4. 繼電器만 가진 非線型原子爐制禦系統의 解析

이것을 Amplitude 軌跡이라고 한다.

右側項의 線型要素의 傳達函數는

$$G_R(S) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta P_0(S)}{\delta k(S)} = \frac{10^4}{S} \frac{(S+3.01)(S+1.14)}{(S+64.4)(S+2.9)} \frac{(S+0.301)(S+0.111)(S+0.0305)(S+0.124)}{(S+1.2)(S+0.195)(S+0.0681)(S+0.143)}$$

但 速發中性子平均壽命  $l^* = 10^{-4}$  sec

$U^{235}$ 의 遲發中性子群의 Data 使用

$G_1(S) = \frac{1}{S} \cdot \frac{(\tau_1 S + 1)}{(\tau_2 S + 1)}$  : 位相補償을 했을 때

또는  $-\frac{1}{S}$  : 補償하지 않았을 때

이 線型要素의 周波數應答도 그림 (4)에 나타냈다. 補償이 없는 線型要素의 周波數應答은 非線型要素의 Discribing function 의 Amplitude 軌跡과 交叉한다. 이는 (7)式을 滿足함을 意味하므로 그 交叉點의 周波數 및 振幅에 該當하는 制限振動(Limit cycling)이 일어난다. 이와같은 不安定狀態를 벗어나는 手段으로서는 補償回路의 插入으로서 線型要素의 周波數應答이 그림 4와 같이 되게 하면 된다.

Gear Backlash 를 考慮하면 Discribing function  $N_1$  代身에  $N_{1+2}$ 를 쓰면 된다.

$$\frac{1 / -\pi + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) + \frac{wB}{2K_r}}{\frac{2\sqrt{2}K_r}{\pi E_c} \left[ 1 + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \frac{wB}{K_r}) \right]^{1/2}} = G_R(jw)G(jw) \dots (12)$$

左側項에 對하여 考察함에 있어서 實質的인 條件으로 서 電動機는 Gear Backlash 를 充分히 넘어 驅動된다고 하면

$$\frac{K_r(\pi - \theta_2 - \theta_1)}{w} > \frac{K_r \Delta \theta_3}{w} \dots (13)$$

그리고

$K_r = 0.025$  Dollars/sec

$P = 1\%$

$D = 0.75\%$

$E_c \geq 1\%$

$B = 0.01$  Dollars

라고 하였을 때의 各種  $E_c$ 의 값과 各種周波數에 對한 Amplitude 軌跡은 그림 5와 같다.

$G_R(jw)$ 는 前述한 것과 같고 補償回路로서 그 傳達函數가

$$\frac{1.6S + 1}{0.16S + 1}$$

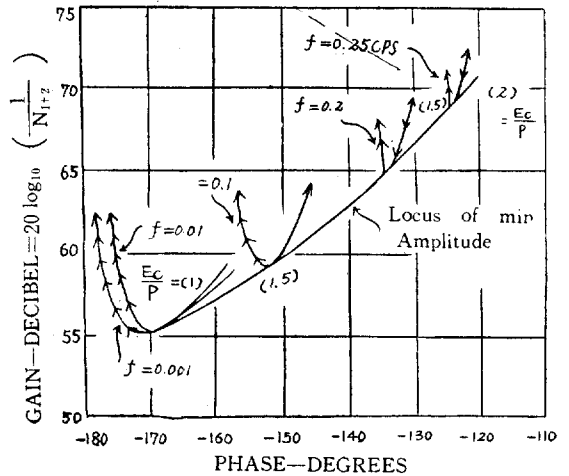


그림 5. Amplitude Locus of  $N_{1+2}$  Discribing function.

그리고

$$\frac{8S + 1}{0.575S + 1}$$

과 無補償 때의 線型要素의 周波數應答을 求히 보면 그림 6과 같다.

이것을 그림 5의 位相-Gain 平面에 그려 넣으면 그림 7과 같이 된다.

無補償 때는 서로 交叉하므로 不安定하고  $\frac{1.6S + 1}{0.16S + 1}$

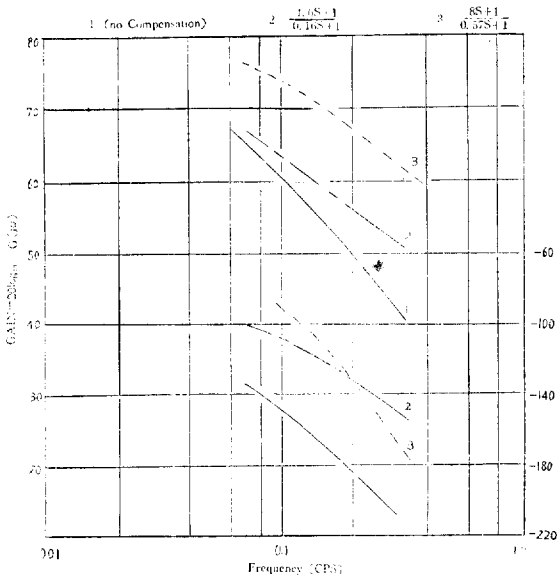


그림 6. 선형 요소의 주파수응답

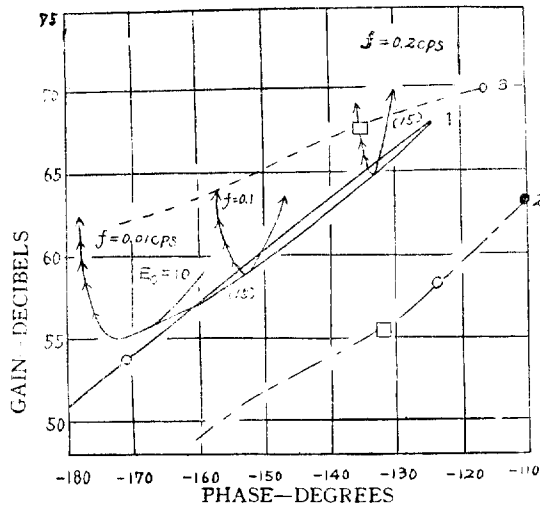


그림 7. 非線型原子爐制禦系의 解析

의 補償時는 交叉하지 않으므로 安定하며  $\frac{8S+1}{0.57S+1}$ 의 補償에 있어서는 0.2cycle에서 交叉하므로 0.2 cycle의 Limited cycling이 일어남을 알 수 있다.

結 論

Gear Backlash와 on-off 要素를 가진 非線型原子爐制禦系는 Gear Backlash와 on-off의 非線型要素 및 그 사이에 든 線型要素를 總括한 Describing function을 求하므로서 比較的 容易하게 解析할 수 있었으며 이 解析結果는 Analog Computer로서 Simulation한 同等한 系에 對한 實驗結果와 잘 符合됨을 確認하였다. 非線型原子爐制禦系의 理論的 解析方法의 또하나로는 phase plane法을 써서 解析을 試圖해 볼 수 있으나 이는 原則的으로 二次式範圍內에서만 適用되므로 本 非線型原子爐制禦系의 解析에는 相當한 無理가 있을 것으로 보아 本 周波數應答法에 基礎를 둔 Describing function에 依한 解析이 가장 適合하리라 믿어진다.

參 考 文 獻

1. R.J. Kochenburger, "Frequency Response Method of Analyzing and Synthesizing Contactor Servomechanism". Trans. A.I.E.E., Vol. 69, Part 1, pp. 270~284, 1950.
2. J.G. Truxal, "Control system synthesis", McGraw-Hill. New York, pp. 566~568, 1955.