<論 說>

國民學校에에서의 有理數指導에 關한 比較

——우리나라와 SMSG——

禹 正 皓

1. 序 言

J. Dewey 에서 비롯한 進步主義 敎育과 傳統的인 本質主義 敎育이라는 兩極사이에서 內容上으로는 基本槪念을 强調하여 本質主義에 가까우나 探究方法은 進步主義에 가까운 새로운 方向으로 나가고 있는 現代敎育思潮의 具體的 모습을 우리는 J.S. Bruner 의 著書를 通해 잘 들어왔다. 學問的인 接近에 依한 敎科課程의 改善運動은 새로운 敎育의 集約的表現이다.

새로운 敎科課程은 敎科의 構造强調, 知的早期敎育, 創造力의 培養을 課題로 하고 있다.

數學敎育도 이러한 敎育思潮에 따라 先進各國에서는 이미 20年 가까운 硏究와 實驗을 거쳐 各 project 에 依한 敎材가 실용단계에 이르고 있음은 주지의 事實이다.

우리나라의 敎科課程은 1963年 이러한 點을 감안하여 改訂하였다고 하나 깊은 硏究가 없는 가벼운 touch 에 그쳤다고 생각된다. 지금 우리는 새로 敎科課程의 改編作業을 서두르고 있다. 이제 우리에게 必要한 것은 一般論이 아니라 우리에게 適合한 具體的인 內容과 方法이다. 이에 우리의 敎科書와 先進外國의 硏究와 實驗을 거친 그것과를 比較考察하여 內容과 方法上의 差異를 찾아보는 것은 必要한 일의 하나라고 본다. 本稿에서는 이러한 생각아래 國民學校의 有理數 指導에 對해 美國의 가장 代表的인 硏究團體인 SMSG 의 敎材와 우리나라의 現敎科書를 比較해본 것이다. 서투른 判斷의 위험성을 염려하여 SMSG 의 敎育目標와 敎科書의 特徵을 들어 批判에 대신했다.

2. SMSG

1958年 NCTM(全美數學敎員協會), MAA(美國數學協會), AMS(美國數學會)가 數學敎育의 現代化를 目標로 組織한 硏究團體로 大學의 數學者, 敎育專門家, 各級學校 數學敎師 및 科學과 工學의 代表者들이 참가하고 있는 美國 全國的으로 가장 으뜸가는 團體로서 Texts 만도 60餘種을 내고있다.

敎育目標

i) Curriculum 을 現代的으로 改善하고 數學의 基本槪念과 構造를 明示하는데 重點을 둘것.

ii) 이를 基礎로 하여 基本的 技能을 練磨시킬 것.

iii) 새로운 數學을 가리키려는 敎師에게 最大限의 援助를 提供할 것.

敎科書의 特徵 *註

i) 많은 基本的 統合槪念을 導入하여 從來의 孤立的으로 서로 關聯性없이 다루어졌던 槪念을 統合的으로 取扱하여 數學의 構造를 明示하려고 努力함.

ii) 陳述 및 內容의 正確한 表現과 可能한 論理的 嚴密性을 기하려고 努力함.

iii) 從來의 數學을 現代的으로 取扱하며, 現代數學에의 接近을 위하여 現代數學의 基礎를 導入하고 있음.

3. 指導內容 및 系列의 比較

區分 / 學年	現行敎科書		SMSG	
	數	計 算	數	計 算
1	반, 반의 반		집합의 대등분할 영역, 집합의 부분과 유리수 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$	

2	분수로 나키내기$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$		영역의 부분, 부분집합의 분수표시 수직선위의 점과 유리수	수직선 위에서의 덧셈 기초
3	양의 분수표시 분수 개념(분할, 부분) 단위분수, 동분모 분수의 크기 비교 및 1과의 관계 소수의 도입, 분수와의 관계 소수를 수직선위에 표시	동분모분수의 덧셈, 뺄셈의 기초	영역, 집합의 부분의 분수표시 유리수 개념(부분, 분할) 수직선을 사용한 유리수개념 확장 순서개념(>, =, <)	
4	수로서의 분수(분모, 분자) 수직선을 사용한 분수개념확장 분수의 크기 비교 몫으로서의 분수개념 확장 분수의 동치 관계 분수와 소수의 서로 고치기 소수의 확장 표시 읽기 소수의 크기 비교 소수의 수직선 표시	동분모 분수이 덧셈 뺄셈, 소수의 덧셈 뺄셈	영역의 합동분할과 표시 유리수의 기호로서의 분수(분자, 분모) 수직선, 도해를 통한 유리수 지도한 유리수의 여러가지 기호와 간단한 꼴 크기 비교 대분수 도입	
5	진분수, 가분수, 대분수 정수인 분수 나눗셈의 몫의 분수, 소수표시 비율의 소수표시 분수와 소수의 서로 고치기 크기가 같은 분수 약분(G.C.M.)	통분(L.C.M.) 분수의 덧셈, 뺄셈, 분수의 곱셈, 나눗셈$\left(\text{분수}\,{}^{\times}_{\div}\,\text{정수}\right)$ 소수의 곱셈 나눗셈 계속나누어가기 곱과 몫의 어림수	영역, 집합, 수직선의 유리수 표시한 유리수의 여러가지 분수표시 간단한 분수꼴 구하기(G.C.M.) 분배 법칙 덧셈의 성질(교환법칙, 결합법칙 0) 정수와 유리수의 관계 유리수의 소수표시	통분(L.C.M. — 소인수 분해) 분수, 소수를 사용한 덧셈, 뺄셈
6	소수의 대소비교 교환법칙, 결합법칙(+, ×) 분배 법칙	분수의 곱셈, 나눗셈	영역, 집합 수직선의 유리수 표시 유리수의 여러 가지 명칭(분수, 소수, 대분수) 유리수와 자연수 유리수의 곱셈의 성질(closed, 교환, 결합, 분배, 0, 1, 역수) 유리수 개념의 확장(정수의 상) 분수로 표시된 유리수의 소수 표시(순환소수)	유리수의 덧셈, 뺄셈 분수, 소수를 사용한 유리수의 곱셈, 나눗셈

4. 有理數의 槪念指導의 比較

㉠ 數學的 背景

有理數의 集合 R은 두번째 數가 0이 아닌 두 整數의 順序雙의 集合이다. 곧 R= $\{(a, b) \mid a, b;$ 整數, $b \neq 0\}$ 두 有理數 (a, b), (a', b')는 $ab' = a'b$ 일때 같다고 定義된다. 따라서 $(x, y) = (bx, \ by)$ 이므로 같은 有理數를 表示하는 順序雙은 얼마든지 있을 수 있는 것이다. 한편 $a \leftrightarrow (a, 1)$인 1對1 對應으로 整數全體의 集合과 有理數의 部分集合 $\{(a, 1) \mid a;$ 整數$\}$과는 同型이 되어 그 代數的 構造가 갈게된다. 따라서 $a = (a, 1)$라고 봐도 좋은 것이다. 곧 $a = (a, 1) = (ax, x)$. 그런데 有理數의 곱의 定義$(a, b)(a', b') = (aa', bb')$로부터 $r = (a, b)$

는 $(b, 1)r=(a, 1)$ 곧 $br=a$의 한 解가 된다. 결국 $(a, b)=a/b$가 되는 것이다. 事實은 $(a, b)\leftrightarrow a/b$인 1對 1 對應으로 有理數 全體의 集合은 整數의 商 全體의 集合과 同型이 되어 그 代數的 構造가 같으므로 有理數를 整數의 商(分數)과 同一視해도 좋은 것이다. 國民學校에서의 有理數 指導는 $\{(a, b) | a, b;$ 陰이 아닌 整數, $b \neq 0\}$인 有理數의 部分集合에 限定되어 있음은 물론이다.

㉡ 現行敎科書에서는 分數를 有理數라고 보는 傳統的인 立場을 취하고 있어 有理數라는 말조차 나오고 있지 않다. 分數를 數로 보기 때문에 "다음 分數는 整數와 같다"든지 "分數를 小數로 고쳐라"와 같은 식이 되어있는 것이다. 全體量에 對한 合同分割된 部分의 表示 量의 分割表示로서의 分數槪念을 測定과 關聯시켜서 指導하고 있으며, 나눗셈의 뭇, 比率의 表示로서의 分數槪念도 取扱되고 있다. 한편 이와는 別度로 小數를 보다 큰 比重을 두어 指導하고 있다. 分數와 마찬가지로 連續量의 表示法으로서의 小數의 槪念을 計量의 拾進 單位 換算과 關聯시켜 指導하고 있다. 分數가 有限小數나 循環小數로 된다는 것까지 나오지만 有理數라는 統合槪念으로 묶지는 않고있다. $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}=1.5$임은 指導하지만 이들이 같은 數의 서로 다른 記號라는 事實은 看過하고 있는 것이다. 말하자면 分數, 小數에 對한 指導를 하고 있는 것이다.

SMSG에서는 分數를 整數의 雙(나중에는 有理數의 雙)으로 보고 有理數를 表示하는 記號로 취급하고 있다. 數와 數字의 엄격한 區別을 通해 不變量인 數(有理數)의 槪念을 여러가지 數字(分數, 小數, 帶分數)로 表現하여 指導하고 있는 것이다. 그리하여 "有理數의 分數이름", "小數이름으로 나타낸 有理數"라든가 "分數를 사용한 有理數의 곱計算"等의 用語를 쓰고, $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$에서 "="를 같은 數를 나타냄을 意味하는 것으로 解析하며, "約分한다"는 말 대신에 "가장 간단한 꼴을 求한다"는 表現을 쓰고 있는 것이다. 그러나 記號(分數, 小數, 帶分數)의 操作보다 그 槪念(有理數)을 重視하여, 單位를 確實히 하고, 全體(영역, 線分, 集合)를 合同 혹은 對等인 部分으로 나누고, 部分에 數를 關聯시킨다는 順序로 集合, 영역(region), 線分에 對해 反復指導를 한 다음 數直線을 通해 綜合하고 있으며, 이러한 指導를 全學年을 通해 철저히 反復하고 있는 것이다. 그런데 이러한 有理數의 表示는 分數만을 사용하다가 5學年에 와서 10의 거듭제곱을 分母로 한 分數로서의 小數가 나온다. 整數의 商으로서의 有理數의 槪念 指導를 6學年 末에 하고 있다

5. 有理數의 덧셈, 뺄셈 指導의 比較

現行敎科書에서는 同分母分數의 덧셈, 뺄셈은 具體的인 圖解(들이, 영역, 線分)을 利用하여 指導하고 있고, 異分母分數의 計算은 通分을 하여 圖解를 通해 指導하고 있는데, L.C.M.의 計算法을 原理없이 方法만 指導하고 있다. 異分母帶分數의 計算은 假分數로 고쳐서 하는 方法이 指導되고 있지만 $2\frac{4}{5}+1\frac{3}{4}=2\frac{16}{20}+1\frac{15}{20}=3\frac{31}{20}=4\frac{11}{20}$와 같은 것은 다분히 論理的 嚴密性을 缺如하고 있는 것이다. 小數의 計算法은 l와 dl, m와 cm의 換算을 利用하여 整數의 算法에서 곧바로 指導하고 있다.

SMSG에서는 同分母 眞分數, 假分數로 表示된 有理數의 計算은 數直線을 利用하여 간단히 처리하고 있으며 영역으로 圖解하여 確認시키고 있다. 여기에 뺄셈은 加數(addend)와 合(sum)의 關係를 利用하여 指導하고 있다. 異分母眞分數, 假分數로 表示된 有理數의 計算 역시 數直線을 利用하고 있는데 分數로 表示된 두 有理數를 同一한 數直線에 나타낼 수 있는 눈금의 必要性을 理解시켜 通分을 하고있다. L.C.M.은 素因數分解를 利用하여 매우 合理的인 方法으로 指導하고 있다. 例를 들어 84와 90의 L.C.M.을 다음과 같이 求하는 것이다.

$84=2\times2\times3\times7$, $\quad 90=2\times3\times3\times5$

$$\overbrace{2\times2\times3\times7}^{84} \qquad \underbrace{\overbrace{2\times2\times3\times7}^{84}\times3\times5}_{90}=1260$$

帶分數를 사용한 有理數의 덧셈, 뺄셈은 앞에서 다룬 덧셈의 交換法則, 結合法則을 利用하여 理解시키고 있다. 例를 들어

$$4\frac{1}{2}+7\frac{3}{4}=\left(4+\frac{1}{2}\right)+\left(7+\frac{3}{4}\right)$$

$$=4+\left(\frac{1}{2}+7\right)+\frac{3}{4}\text{(associative law)}$$

$$=4+\left(7+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\text{(commutative law)}$$

$$=(4+7)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\text{(associative law)}$$

$$=11+\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)\text{(renaming)}$$

$$=11+\frac{5}{4}\qquad(\quad〃\quad)$$

$$=11+\left(\frac{4}{4}+\frac{1}{4}\right)(\quad〃\quad)$$

$$=11+\left(1+\frac{1}{4}\right)\ (\quad〃\quad)$$

$$=(11+1)+\frac{1}{4}\text{(associative law)}$$

$$=12+\frac{1}{4}$$

$$=12\frac{1}{4}$$

와 같이 철저한 論理的 展開를 하고 있다. 한편 小數를 使用한 有理數의 計算은 자리값을 利用 交換, 結合法則을 適用하여 指導하고 있다.

6. 有理數의 곱셈, 나눗셈 指導의 比較

現行教科書에서는 分數$\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\div}$整數, 整數$\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\div}$分數, 分數$\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\div}$分數의 3가지 경우로 나누어 다루기 圖解를 通해 計算法의 原理를 비교적 상세히 指導하고 있으나 $\frac{3}{5}\div 3=\frac{3\div 3}{5}=\frac{1}{5}$에서 곧바로 $\frac{3}{5}\div 3=\frac{3}{5\times 3}=\frac{1}{5}$로 들어가는等 論理的 엄밀성이 缺如되어 있다. 小數의 경우는 分數에 앞서 整數의 計算法에서 소숫점을 찍는 법의 理解에 주력하고 있다.

SMSG에서는 곱셈의 指導에서 分數를 使用한 경우는 直四角形 영역의 邊의 measure와 영역의 measure와의 關係로부터 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$를 歸納的으로 유도하여 모든 경우를 統合的으로 指導하고, model로 數直線과 集合을 使用하여 確認시키고 있다. 그리고 分配法則을 사용하여 $6\times 5\frac{1}{2}=6\times\left(5+\frac{1}{2}\right)=(6\times 5)+\left(6\times\frac{1}{2}\right)$로 쉽게 計算할 수 있음을 圖解를 곁들여 別度로 指導하고 있으며 곱의 크기를 推定하는 問題를 다루어 誤算을 미연에 막도록 指導하고 있다. 小數를 사용한 경우는 整數의 곱셈절차와 곱셈의 指數法則을 利用하는 方法으로 理解시키고 있다. 나눗셈은 곱셈의 逆算으로 보아 앞에서 배운 有理數의 性質(곱셈, 法則, 逆數, 結合律, 唯一性, 1의 性質)을 사용하여 다음과 같이 하여 一般的 方法을 찾아내도록 指導하고 있다.

$$\frac{7}{8}\div\frac{3}{4}=n$$

$$n\times\frac{3}{4}=\frac{7}{8}\text{(rewritten)}$$

$$\left(n\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{4}{3}=\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\text{(uniqueness)}$$

$$n\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\right)=\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\text{(associative law)}$$

$$n\times 1=\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\text{(property of reciprocal)}$$

$$n=\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\text{(property of one)}$$

그리고 數直線과 영역을 model로 部分的인 圖解를 해보이고 있다. 小數를 使用한 경우는 나눗셈을 分數로 고쳐 分數의 性質을 利用하여 分子分母를 整數로 바꾼다음 division process를 通해 帶分數나 小數로 答을 내도록 指導하고 있다.

7. 有理數의 性質의 指導 比較

現行教科書에서는 有理數의 性質指導를 綜合的으로 하고 있지는 않지만 덧셈, 곱셈의 交換法則, 結合法則 및 分配法則 그리고 逆數의 指導를 하고 있다. 逆數를 分母와 分子를 바꾼 數라고 指導하고 있음은 分數概念과 함께 傳統的인 생각인 것이다. 그 밖의 다른 性質들은 取扱하고 있지는 않지만 整數의 경우로 미루어 當然한 것으로 看做하고 있다.

SMSG에서는 有理數의 性質을 別度로 指導하고 있는데 順序性, 주밀성, 곱셈과 덧셈아래에서의 closure, uniqueness, 交換法則, 結合法則 및 分配法則 0과 1의 性質, 逆數等 모든 性質이 다루어지고 있다. 逆數를 곱이 1이 되는 數로 定義하고 있음은 分數를 有理數의 한 記號로 보기 때문이다. 이러한 性質은 性質의 指導에 그치지 않고 덧셈, 나눗셈等의 指導에 철저히 利用하고 있는 것이다. 特히 整數와 달리 나눗셈 아래에서 closed되어 있음(0除外)을 다루어 數의 代數的 擴張을 暗示하고 있다.

8. 結　言

以上으로 有理數의 指導에 對해 數槪念, 四則演算, 性質等의 順으로 比較 考察해 보았다. 그 結果 內容上으로는 大同小異하지만 觀點은 크게 다르다는 事實을 알았다. 우리나라의 現敎育課程이 實生活에서의 有用性을 强調하고 있는데 연유하는 것이겠지만 한마디로 우리 敎科書에서는 有理數의 數槪念이나 性質, 計算의 原理보다(이것도 强調하고 있기는 하지만) 量의 表現能力, 計算機能의 習得에 주안점을 두고 있다고 할 수 있겠다. 생활經驗을 重視하여 대부분의 素材가 生活과 關聯지워져 있음도 두드러진 特色이다. 이에 比해 SMSG에서는 그 敎育目標대로 生活의 有用性보다 學問的 立場에서 統合的 方法으로 基本槪念과 構造의 理解에 致重하고, 지나친 程度의 論理的 嚴密性과 用語의 正確性, 螺旋的 配列과 發見的 方法等이 두드러지게 나타나 있다. 그러나 SMSG의 內容이 그 敎科書의 序文에서 지적하고 있듯이 學生들에게 훌륭한 數學을 가르치는 確實한 手段이라고 여길 수는 없으나 (더구나 우리 學生들에게라) 方向만은 具體的으로 提示하고 있다고 볼 수 있다면 앞으로 이에 對한 많은 硏究가 必要하다고 생각한다.

參考文獻

1. 산수교과서(1~6); 文敎部 1966.
2. 학습지도서; 교학도서 1966.
3. 敎育課程解說; 文敎部 1963.
4. 數學敎育現代化에 對한 各國의 動向; 金致榮 數學敎育 Vol. V, No. 4.
5. SMSG; Mathematics For The Elementary School Student Texts, Teacher's Commentarys Grade K ~6, 1965.
6. A Survey of Modern Algebra; G. Birkhoff, S. Maclane, The Macmillan Co. 1957.
7. The Process of Education; J.S. Bruner(鄭植永 兪泰榮 譯 載東文化社 1965.)

(仁川敎育大學)