高校數學에서의 論理指導

成 炫 慶

0. 머리에

일반사람들의 大部分은 生活하고 行動하며 人格形成을 위해서 數學을 공부한다는 것을 의외로 생각한다. 그럼에도 불구하고 實情은 高等學校까지 數學을 義務的으로 배우게 되어 있다. 왜? 무엇 때문인가? 이것은 무척 어리석은 질문이라고 數學敎育에 종사하는 우리들은 생각한다. 누구나 여기에 대한 답을 할 수 있을 것이다. 그 중의 일부분을 1963년 2월 15일에 개정 공포된 고등학교 수학교육 과정에서 찾아 보자. 목표 3항에 "논리적인 사고 방식의 필요성을 깨닫고 조리 있게 추리하여, 논리에 흥미를 잃거나 편견에 치우치지 않고 적합한 판단을 내릴 수 있는 능력을 길러, 이것으로 자주적으로 생각하고 행동하게 한다"고 제시하고 있다. 이것은 數學敎育에서 論理指導가 차지하는 비중이 적지 않음을 나타낸 것이다. 따라서 여러 가지 數學의 槪念指導를 통해 막연히 지도되기를 바라던 종래의 論理指導에 대한 소극적인 태도를 지양하고, 개정 교육과정으로 도입된 集合의 개념과 더불어 적극적이고 과감한 意圖的指導가 시도될때라 본다. 아래에 高校數學의 指導過程에서 導入 可能한 記號論理의 槪念에 關해서 考察해 보자.

1. 集合과 命題

眞僞가 分明한 主張을 命題[(1)](statement). 서로 區別될 수 있는 對象의 모임을 集合[(2)](set)이라고 한다면 한 命題에는 그를 眞으로 하는 對象들의 모임인 한 集合이 對應하여 存在한다.

(例 1) p : 나이가 20세 이상이다.

P＝{x|x 는 나이가 20세 이상인 男女}

q : 男子이다. Q＝{x|x 는 男子}

r : 未婚女性이다. R＝{x|x 는 未婚女性}

s : 키가 3m 이상이다.

S＝{x|x 는 키가 3m 이상}

u : 大韓民國國民이다.

U＝{x|x 는 大韓民國國民}

위에서 본 바와 같이 各命題에는 그들을 眞으로 하는 集合들이 對應되어 있다. 이러한 것은 條件命題에서는 마찬가지로 찾아볼 수 있다.

(例 2) a : $x^2-x-12=0$ A＝{$-3, 4$}

b : $x^2-x-2>0$ B＝{x|$-1>x$ 또는 $x>2$ 인 實數}

c : $|x-1|\leqq 2$ C＝{x|$-1\leqq x\leqq 3$인 實數}

이와 같이 各命題에 對應하는 集合을 그 命題의 眞理集合(truth set, solution set)이라고 부른다

命題의 眞僞는 話題의 中心이 確定될 때 비로소 分明해진다. (例 1)에서는 大韓民國 國民(例 2)에서는 實數라고 하자.

(例 3) 두 개의 주머니가 있다. 제 1의 주머니에는 2개의 黑球, 1개의 白球, 제 2의 주머니에는 1개의 黑球, 2개의 白球가 들어 있다(공의 크기는 같다고 함)

(表 1)

경우	주머니	공의순서	
1	1	白	黑
2	1	黑	白
3	1	黑	黑
4	2	白	黑
5	2	白	白
6	2	黑	白

지금 어느한 주머니에서 계속 2개의 공을 꺼낼 때 가능한 모든 경우는 (表1)에서 보는 바와 같이 여섯 경우이다. 各경우를 番號로 나타내기로 하면,

e : 같은 색깔이다. E＝{3, 5}

f : 두개 모두 흰색이다. F＝{5}

g : 黑球가 적어도 하나는 있다.

G＝{1, 2, 3, 4, 6}

h : 빨간공이다. H＝{ }＝ϕ

여기서 話題의 中心은 여섯(6) 경우인데 우리는 이것을 論理的 可能性이라 부르자. 即(例 1)에서는 大韓民國 國民 全體요, (例 2)의 論理的 可能性은 實數 全體이다. 여기에 對應하는 集合은 全體集合(universal set)에 해당하며, 空集合(empty set, null set)의 槪念도 쉽게 導入된다.

(例 1)의 S는 統計的으로 보아 要素가 없음이 分明하고 (例 3)의 H도 空集合이다.

2. 基本的인 合成命題

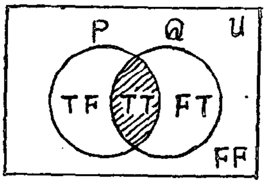
命題에는 "20세 이상인 男子이다" 即 "20세 이상이다" 그리고 "男子이다"와 같이 두개 이상의 命題를 連結詞로 맺어서 새로운 命題를 생각할 수 있는데, 이것은 合成命題(compound statement)라 부르고, "20세 이상이다" "男子이다" 等과 같이 더 이상 分解할 수 없는 命題를 單一命題(simple statement) 또는 單一成分이라고 한다. 이하 우리들의 言語生活에서 흔히 쓰이는 合成命題에 關하여 그 單一命題의 眞僞가 定해졌을때(眞理値가 주어졌을때) 合成命題의 眞理値(truth value) 및 眞理集合을 살펴 보자.

2—1. 合接

"20세 이상인 男子이다" "20세 이상이다" 그리고 "男子이다" "p 그리고 q" 이것을 記號化하여 $p \wedge q$로 나타내고 이 合成命題를 「命題 p와 q의 合接(conjunction)」이라고 한다.

(表 2)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F



(그림 1)

$p \wedge q$가 眞[3](true)임은 p, q가 同時에 眞임을 要求하고 그 外의 경우 $p \wedge q$는 僞[4](false)이다. 따라서 (表 2)(眞理表 truth table)를 얻는다. $p \wedge q$의 眞理集合은 分明히 $\{x \mid (x \in P) \wedge (x \in Q)\} = P \cap Q$ 임을 알 수 있다(그림 1 참조)

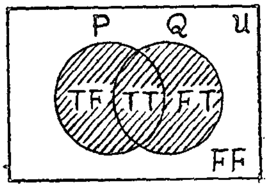
2—2. 離接

우리들이 흔히 쓰는 連結詞에는 "또는"(or) "이거나"라는 것이 있다. 即 "그는 나이가 20세 이상이거나 男子이다" "그는 나이가 20세 이상이다" 또는 "男子이다" "p 또는 q"인 合成命題를 만들 수 있는데, 이것을 記號化하여 $p \vee q$로 나타내며 「命題 p와 q의 離接(disjunction)」이라 부른다. 眞理表는 (表 3)과 같으며, 眞理集合은 $\{x \mid (x \in P) \vee (x \in Q)\} = P \cup Q$ 임이 分明하다. (그림 2 참조)

(表 3)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

그런데 連結詞 "또는" "이거나"는 言語習慣上 두 가지로 쓰이는 수가 있다. 그 하나는 위의 경우로 "어느 한쪽 또는 양쪽 모두"를 主張하며 "우리 나라의 首都는 서울 또는 釜山이다" 等과 같이 "어느 한쪽만"[5]을 主張하는 경우가 있다. 後者의 경우는 두개가 論理的으로 兩立할 수 없을 때, 即 論理的 可能性에서 (TT)가 除外되는 ($P \cap Q = \phi$) 경우에 屬하므로 前者만을 생각해도 論理的으로 矛盾은 없다.



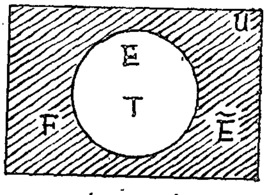
(그림 2)

2—3. 否 定

(例 3)에서 命題 "두 공은 같은 색이 아니다"를 생각하자. 이것은 e(같은 색깔이다)의 否定(negation)이다. e를 單一命題로 보았을 때 "e 아니다"도 一種의 合成命題로 보아 $\sim e$로 表示하면 眞理表와 眞理集合은 다음과 같다.

(表 4)

e	$\sim e$
T	F
F	T



(그림 3)

$\{x \mid (x \notin E) \wedge (x \in U)\} = \bar{E}$

(U; 全體集合)

우리말에서 이 否定의 表現에는 注意를 要한다. 흔히 "두 사람 모두 키가 크다"의 否定을 "두 사람 모두 키가 작다"로 생각하는 수가 있는데 이는 잘못이다. 即 $\sim(p \wedge q)$는 $\sim p \vee \sim q$[6]로서 어떤 命題의 否定은 論理的 可能性에서 그 경우를 除外한 나머지를 일컫는다. 따라서 命題의 否定의 眞理集合은 原命題의 眞理集合의 餘集合(complement)임을 알 수 있다. (그림 3)

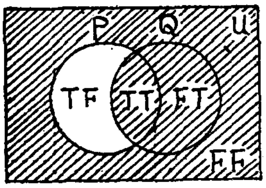
2—4. 條件文. 雙條件文

合成命題 "p이면 q이나" "if p then q"를 條件文(conditional statement)이라 부르고, 記號로 $p \to q$로 나타낸다. 이의 眞僞는 多小指導하기 困難하나 적절한 例를 通해 p가 眞이면 q도 眞인

을 主張하고, p가 僞일때는 q의 眞僞에 상관없음을, 即 $\sim p \vee q$와 內容的으로 同一하다는 것을 理解시킬 수 있으리라 본다. 따라서 眞理表는 (表 5)와 같고 眞理集合은 $P \cup Q$ 임을 알 수 있다. (그림 4)

(表 5)

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T



(그림.4)

數學的 命題는 大部分 條件文에 屬하는데 그 中에는 逆도 成立함을 主張하는 경우가 있다. 即 "p이면 q이고, q이면 p" 또는 "p 즉 q" "p if and only if q" "p이면 오직 그때에 限해서 q" 等으로 表示할 수 있겠는데 記號로 $p \leftrightarrow q$와 같이 나타내고 雙條件文(biconditional)이라 부르기로 한다. 그것은 p q가 同時에 眞 또는 僞임을 主張하므로 眞理表는 (表 6) 임을 알 수 있다.

(表 6)

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

끝으로 恒眞命題와 矛盾命 題의 概念도 論理의 展開上 매우 重要하므로 첨가해 둔다. 即 論理的으로 可能한 모든 경우에 항상 眞인 命題를 恒眞命題[7](tautology), 僞인 命題를 矛盾命題[8](self-contradiction)라고 하는데, 이들의 眞理集合은 全體集合과 空集合임을 明白하다. $p \vee \sim p$는 恒眞命題이며 $p \wedge \sim p$는 矛盾命題의 簡單한 例이다.

3. 命題間의 關係

3—1. 含意

同一한 論理的 可能性下[9]에 있는 두 命題 p, q가 있어서 p가 眞이면 q도 眞일 때, p가 q를 含意[10](imply)한다고 한다. 이는 $x \in P$이면 $x \in Q$를 뜻하므로 $P \subseteq Q$의 關係가 있다. $p \wedge q$는 $p \vee q$를 含意하여, 特히 條件文 $a \to b$가 眞일 때 限해서[11] a는 b를 含意한다. 必要條件, 充分條件도 이 關係에 해당되는 것으로, a가 b를 含意할 때, 即 $a \to b$가 tautology일 때 우리는 a를 "b이기 위한 充分條件(sufficient condition)", b를 "a이기 위한 必要條件(necessary condition)"이라 부르는데 지나지 않는다. 따라서 a가 b이기 위한 充分條件이란 a가 b를 含意함을 뜻하고, b가 a이기 위한 必要條件이란 말은 b가 a에 依해서 含意됨을 뜻한다. 그리고 $\phi \subseteq A$, $A \subseteq U$(A는 任意의 集合)에서 矛盾命題는 任意의 命題를 含意하며, 任意의 命題는 언제나 tautology를 含意함을 알 수 있다.

3—2. 同値

두 命題의 眞理値가 一致할 때, 두 命題는 서로 同値(eguivalent)라 한다. 即 서로 含意하는 경우이며, p, q가 同値이며 $P \subseteq Q$, $Q \subseteq P$를 뜻하므로 $P = Q$임이 分明하다. 雙條件文 $p \leftrightarrow q$가 眞이면 p와 q는 同値이고, 이때 p, q는 서로 상대방이기 위한 必要充分 條件이라고 하는 것이다

3—3. 條件文의 變形

$p \wedge q$, $p \vee q$, $p \leftrightarrow q$는 對稱性을 가지나 $p \to q$는 그렇지 못하나. 이의 變形에는 여러 가지가 있겠으나 다음 네 가지가 重要한 對象이 된다. 即

① $p \to q$ ② $q \to p$ ③ $\sim p \to \sim q$ ④ $\sim q \to \sim p$

인데 ①과②, ③과④는 서로 逆(converse), ①과③, ②와 ④는 서로 裏(converse of contrapositive), ①과④, ②와③은 서로 對偶(contrapositive)關係이다. 이들의 眞理表(表 7)를 보면 條件文이 眞이라도 그 逆과 裏는 반드시 眞일 수 없으나 서로 對偶關係에 있는 條件文은 서로 同値인데, 이는 幾何에서의 命題 指導나 推論, 證明의 方法에서 效果的으로 利用될 수 있다.

(表 7)

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

4. 推論과 證明

우리가 論理 指導를 시도하는 데에는 論理 그 自體도 重하려니와 數學을 공부하는 方法에 공헌되길 바라는데 더 큰 目的이 있다. 數學은 거의 推論의 연속이다. 따라서 여기에 關해 살펴보는 일은 매우 重要하다. 여기서 推論이라 함

은 "하나의 命題(結論)가 다른 命題(前提)로부터 이끌어짐을 主張하는 것"을 뜻하기로 한다.

더우기 우리의 關心事는 正當한 推論에 있다. 正當한 推論이란 前提로부터 必然的으로 結論이 誘導됨을 卽 前提(여러個의 命題일 수도 있음)가 모두 眞[12]이면 結論도 반드시 眞이 되는 推論을 일컫는다. 아래에 正當한 推論의 基本的인 몇 가지를 들어 둔다. 이들의 確認은 眞理表를 만들면 간단히 할 수 있다[13].

$$\text{①}\ \begin{array}{l} p\to q \\ \underline{\quad\ p} \\ \therefore\ q \end{array} \qquad \text{②}\ \begin{array}{l} p\to q \\ \underline{\quad \sim q} \\ \therefore\ \sim p \end{array} \qquad \text{③}\ \begin{array}{l} p\vee q \\ \underline{\quad \sim p} \\ \therefore\ q \end{array} \qquad \text{④}\ \begin{array}{l} p\to q \\ \underline{\quad q\to r} \\ \therefore\ p\to r \end{array}$$

위에서 다음의 tautology를 얻을 수 있는데 이것들은 命題의 證明에 적절히 活用될 수 있을 것이다.

①′ $[(p\to q)\wedge p]\to q$ ②′ $[(p\to q)\wedge\sim q]\to\sim p$

③′ $[(p\vee q)\wedge\sim p]\to q$

④′ $[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$

高校 數學指導의 難點中에 證明 方法의 指導가 그 하나일 것이다. 直接 證明法은 그런 대로 形式을 찾지 않아도 直觀에 依해서 쉽게 理解되나 間接 證明法의 경우 說明에 困難을 겪게 된다. 그러나 以上에서 導入한 概念을 利用하면 쉽게 解決된다. 그 代表的인 歸謬法에 關하여 간단히 考察한다. 歸謬法은 根本은 한 가지나 表面的으로는 다음 類型으로 說明된다.

① $p\to q$ 代身 $\sim q\to\sim p$를 證明한다.

$p\to q$와 $\sim q\to\sim p$가 同値이므로 $\sim q\to\sim p$가 眞임이 밝혀지면 $p\to q$가 眞인 것이 밝혀진다. 따라서 結論을 否定했을 때(僞라 했을때) 前提中에서 하나라도 僞인 것이 밝혀지면 證明은 끝나는 것이나.

② 命題 p와 $\sim p\to 0$(0는 矛盾命題)가 同値임을 利用한다.

p가 眞임을 主張하는 代身 p가 僞($\sim p$가 眞)이면 矛盾이라는 것을 主張하면 되는 것이다.

③ $p\to q$와 $(p\wedge\sim q)\to 0$가 同値임을 利用한다

卽 前提가 모두眞이면서 結論이 僞이면 矛盾이 일어난다는 것을 主張하면 되는 것이다.

끝으로 간혹 歸謬法의 說明에서 $p\to q$를 證明하는 대신 $(p\to\sim q)\to 0$를 證明하는 경우가 있는데 이것은 잘못이다. ②의 경우, p를 主張하는 대신 $\sim p\to 0$를 主張하는, 卽 $p\to q$가 眞임을 主張하는 대신 $p\to q$가 僞(否定이 眞)이면 矛盾이라는 主張을 하는 것으로, $p\to q$의 否定은 $p\to\sim q$가 아니라 $p\wedge\sim q$이기 때문에 $p\to q$와 同値인 것은 $(p\wedge\sim q)\to 0$이다. 따라서 (3)의 類型에 屬한다.

5. 맺는말

위에서 말한 內容들을 高校 數學에 導入하는 것은 現實情으로 보아 여러 가지 難點이 있을 줄 짐작된다. 그러나 數의 體系, 確率, 幾何等에 集合論的 思考에 依한 指導方法이 再構成되는 현추세에 비추어, 集合概念을 導入할 때에 留意하면 어느程度의 導入은 比較的 쉬우리라 본다. 先進諸國의 急進하는 數學 敎育에 關한 現代 思潮를 外面만 할 수 없는 우리의 處地라 보아 외람되게 提案한다.

끝으로 論理學的 體系로 볼 때 集合概念과 연관을 짓다보니, 命題論理와 述語論理가 뒤범벅이 되었는데 이點 넒은 理解를 바란다.

(1) 알파베트의 小文字 $p, q, r, \cdots$으로 表示한다

(2) 알파베트의 大文字로 表示한다.

(3) 眞理値가 眞일 때는 「T」로 나타냄.

(4) 眞理値가 僞일 때는 「F」로 나타냄.

(5) 기호「∨」를 써서 區別하기도 하며 眞理表는 (表 3)에서 TT인 경우가 F로 된다. 이것을 非包含的 離接이라고 함.

(6) De Morgan's theorem 참조

(7) 論理的으로 眞인 命題(logically true statement)

(8) 論理的으로 僞인 命題(logically false statement)

(9) 以後 두 개 이상의 命題를 同時에 생각할 때는 同一한 論理的 可能性下를 前提함.

(10) p가 q를 誘導한다. 또는 p는 p에 依해서 誘導된다.

(11) $a\to b$가 恒眞命題일 때. 卽 論理的 可能性에서 (TF)가 除外될 때.

(12) 前提의 合接이 眞.

(13) 橫線위가 前提, 아래가 結論. ③을 選言的 三段法(disjunctive syllogism) ④를 假言的 三段論法(hypothetical syllogism)이라고 함.

(仁川敎大)