數學的 構造와 數體系

金　相　萬

〔要旨〕 數學的構造의 뜻과 그 한 種類인 代數的構造와 順序構造 그리고 同値關係를 自然數 整數, 有理數 들을 通하여 알아본다. 그리고 이들 각각의 體系를 同型을 가지고 關係 맺어 나가는 過程을 밝히고, 自然數에서 有理數까지의 具體的인 展開 內容을 構造的 立場에서 提示하다.

§1. 關係와 構造

集合 X에 있어서 元素 사이에 關係(Relation)의 集合이 R이고, 이들 關係를 滿足하는 條件의 集合이 C이면 {R, C}에 의하여 X에 數學的構造 즉 構造가 주어진다고 한다.

같은 集合일지라도 關係를 주는 방법에 따라서 여러가지 構造를 생각할 수 있다.

여기 關係를 생각하기 前에 몇가지 用語들을 생각하자. 먼저 寫像이란 무엇인가? 寫像이란 函數의 別名이다. 函數는 옛부터 使用된 用語이나 寫像은 比較的 새로 普及된 用語이다. 즉 두 集合 A, B가 있어서 集合 A의 任意의 元素에 對應하여 集合 B의 元素를 꼭 한개 決定하는 規準이 주어졌을 때 그 對應의 規準을 A에서 B에의 寫像이라 한다. 寫像을 나타내는 데에 "α" 또는 "θ" 또는 "f"와 같은 希랍文字 또는 알파베트의 小文字들을 使用한다. 寫像 α에 依하여 a가 $a\alpha$에 對應될 때 $a\alpha$를 a의 α에 依한 像이라고

$$\alpha : a \longrightarrow a\alpha$$

로 表示한다.

單項命題

$f(x)$: x는 P이다. ($x \in$A)

는 集合 A에서 集合 {眞, 僞}에의 寫像이다. 이 寫像에서 x를 眞 또는 僞에 對應시키는 規準을 주는 것은 P이다. 그래서 이 命題는 P(x)로 표시하는 것이 보통이다.

또 2項命題

x, y는 R이다.

에서 對應

$(x, y) \longrightarrow$眞 또는 $(x, y) \longrightarrow$僞

의 規準을 주는 것은 R이다. 그래서 이 命題를 R(x, y)로 표시한다. 이 命題가 眞으로 될 때는 x와 y에 R로 表示된 어느 關係(Relation)가 주어진다.

이 關係를 表示하는 方法으로 對應을 使用한다

이 關係는 또 두 項間의 關係일 때 2項關係라고 하고 세 項間의 關係일 때 3項關係라고 한다. 이와같은 意味에서 두 元素사이의 演算(operation)은 3項關係이나 演算 自身은 두 元素 사이에서 行하여 지는 것이므로 2項演算(binary operation)이라고 한다. 그리하여 演算은 寫像의 特殊한 것으로 規定하고 있다.

지금 集合 S에 있어서 關係 R이

(i) 各各의 $a \in$S에 對하여 aRa

(ii) $a, b \in$S의 對하여 aRb면 bRa

(iii) $a, b, c \in$S에 對하여 aRb이고 bRc면 aRc

일 때 S는 R에 關한 同値集合이라 하며 R를 S에서의 同値關係라고 한다. 즉 集合 S는 {R, (i), (ii), (iii)}에 의하여 構造 同値關係가 주어진다고 한다.

또 集合 A의 두 元素의 關係가

(i) $a, b \in$S에 대하여 aRb면 bRa가 아님.

(ii) $a, b, c \in$A에 對하여 aRb, bRc면 aRc

일 때 R을 集合 A의 半順序라고 하고 集合 A는 {R, (i), (ii)}에 의하여 半順序構造가 주어진다.

또 集合 A의 두 元素 사이의 關係가

(i) $a, b \in$A에 對하여 aRb, $a=b$, bRa의 어느 하나가 成立함.

(ii) $a, b, c \in$A에 對하여 aRb, bRc면 aRc

일 때 R을 集合 A의 全順序(線形順序)라고 하고, 集合 A는 {R, (i), (ii)}에 의하여 全順序構造가 주어진다고 한다.

또 2項演算이 集合 A의 두 元素 사이에 定義될 때 생기는 構造를 그 演算에 關한 代數的

構造라고 한다.

두 集合 X, Y가 같은 構造 {R, C}에 依하여 定해질 때 X와 Y는 같은 種類의 系라고 한다.

X와 Y가 같은 種類의 系일 때

$$f : X \longrightarrow Y$$

인 寫像 f로 X의 元素사이의 關係가 對應하는 Y의 元素사이에도 成立할 때 f를 {R, C}에 關한 準同型寫像이라고 하고, f^{-1}도 準同型寫像일 때 f를 同型寫像이라고 하며, X와 Y는 同型이라고 한다.

§2. 自然數

自然數의 集合은 人類文明의 所産이다. 人間의 知覺作用에 依하여 그 存在가 認定된 것이며 獨立的인 存在라고는 볼 수 없다. 그러므로 그 集合自體도 人類가 構成하여 놓은 것으로 보아야 한다. 그러나 그 構成方法에 여러가지가 있을 수 있음을 認定하여야 한다. 그 中에서 代表的인 것으로 伊太利의 數學者 페아노(G. Peano)가 1889年에 發表한 페아노의 公理가 그것이다.

이 公理는 事實上 自然數의 完全한 體系를 提示한다. 즉 關係로서 加法, 乘法, 順序를 주고 그들의 關係를 滿足하는 公理를 모두 包含하는 構造를 提示하고 있다. 지금 이 페아노의 公理를 紹介하고 이에 依한 構造를 調査하기로 하자

(公理 1) 自然數의 集合 N은 元素 1과 적어도 한 개의 다른 元素로써 이루어진다.

지금 "M"으로 1 以外의 N의 모든 元素의 集合을 나타내면 위 公理에 의하여 M은 적어도 하나의 元素를 갖는다.

(公理 2) N의 M 위에의 一對一 寫像 $※ : n \longrightarrow n※$이 存在한다.

이 때 N의 M 위에의 一對一 寫像 $※ : n \longrightarrow n※$는 各 自然數 n이 그의 后者 $n※$에 對應하는 寫像으로 생각한다. 즉, 이는 任意의 自然數 n에 그 다음 自然數가 하나 더욱이 꼭 하나 있음을 意味한다. 그리고 $n※$가 1로되는 自然數 n은 存在하지 않고, $m※$와 $n※$가 同一自然數이면 m와 n도 同一自然數이며, 이 寫像 ※이 N의 M 위에서 一對一 寫像이기 때문에 1 以外의 모든 自然數는 어떤 自然數의 后者이다.

(公理 3) 다음 두 性質을 갖는 N의 任意의 部分集合 S는 必然的으로 N에 같아진다.

(i) $1 \in S$

(ii) 各 $n \in S$에 對하여 亦是 $n※ \in S$

이 公理는 모든 自然數에는 1부터 始作해서 繼續的으로 數를 세는 것으로써 도달할 수 있다는 것을 말하고 있다.

위의 세 公理는 完全한 自然數의 構造를 준다. 따라서 다음에 各 關係에 따르는 條件들을 整理하면 다음과 같다.

關係 +

$\forall m, n \in N$에 對하여 $n+1=n※$, $m+n※=(m+n)※$

1) $\forall k, m, n \in N$에 對하여 $k+(m+n)=(k+m)+n$

2) $\forall m, n \in N$에 對하여 $m+n=n+m$

3) $\forall m, n, k \in N$에 對하여 $m+k=n+k$면 $m=n$

關係 ·

$\forall m, n \in N$에 對하여 $n \cdot 1=n$, $m \cdot n※=m \cdot n+m$

4) $\forall k, m, n \in N$에 對하여 $k \cdot (m \cdot n)=(k \cdot m) \cdot n$

5) $\forall m, n \in N$에 對하여 $m \cdot n=n \cdot m$

6) $\forall k, m, n \in N$에 對하여 $(k+m)n=k \cdot n+m \cdot n$

7) $\forall k, m, n \in N$에 對하여 $m \cdot k=n \cdot k$면 $m=n$

關係 $<$

$\forall m, n \in N$에 對하여, $\exists k \in N$, $m+k=n$면 $m<n$

8) $\forall m, n \in N$에 對하여 다음 셋 중 꼭 하나만이 眞이다.

(i) $m=n$, (ii) $m<n$, (iii) $m>n$

9) $\forall m, n, k \in N$에 對하여 $k>m$, $m>n$면 $k>n$

10) $\forall k \in N$에 對하여

$m+k>n+k$면 $m>n$

$m+k=n+k$면 $m=n$

$m+k<n+k$면 $m<n$

11) N의 空集合이 아닌 任意의 部分集合 S는 最小元을 갖는다.

以上으로 自然數의 構造가 밝혀졌다.

§3. 整數

整數에 對해서도 經驗的으로 알고 있다. 그러나 이것도 亦是 公理的으로 構成할 수 있으나 自然數를 利用한 特別한 集合에서 構成하고, 그 構造를 構成의 手段을 使用하여 나타내기로 하자.

N을 自然數의 集合으로 하고, D를 다음과 같이

$$D=N\times N$$

즉 自然數의 모든 順序雙(m, a)를 나타낸다고 하자. D의 元素를 "(m, a)"로 표시하는 代身 "$m-a$"로 表示하기로 한다.

"$m-a$"는 단지 "(m, a)"를 쓰는 方法에 지나지 않는다.

이와 아울러 D에 關係 ~를 다음과 같이 준다

(定義) $\forall m-a, n-b\in D$에 對하여

$m+b=n+a$일 때만 $m-a\sim n-b$

지금 定義한 關係 ~는 同値關係임을 證明할 수 있다. D를 ~로 同値集合으로 類別하는 記號 "$[m-a]$"가 $m-a$를 가지고 關係 ~에 關한 同値集合이라는 것을 나타낸다고 하자.

즉 $[m-a]=\{n-b\mid n-b\in D,\ n-b\sim m-a\}$이다 그리고 이것을 다음과 같이 읽는다.

즉 $[m-a]$는 $n-b\sim m-a$가 되는 D에 있는 모든 元素 $n-b$의 集合이다. 라고 읽는다.

이 方法을 使用하여 整數의 定義를 하면 다음과 같다.

(定義) ~에 關한 D의 同値集合을 整數라고 부른다. ~으로서 생겨난 D의 類는 모든 整數의 集合이고 "I"로서 表示한다. 그리고 $[m-a]=x$면 $[a-m]=-x$로 한다.

이 I에 대한 構造를 整數의 定義에 따라서 關係를 주어 表示하면

關係 $+, \cdot$

$\forall[m-b]\in I$에 關하여 $[m-a]+[n-b]=[(m+n)-(a+b)]$

$[m-a]\cdot[n-b]=[(m\cdot n+a\cdot b)-(m\cdot b+a\cdot n)]$

1) $\forall x, y, z\in I$에 對하여

$x+(y+z)=(x+y)+z,\ \ x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

2) $\forall x, y\in I$에 對하여 $x+y=y+x,\ \ x\cdot y=y\cdot x$

3) $\forall x, y, z\in I$에 對하여 $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$

4) 0과 1는 +와 ·의 各各에 關한 恒等元素이다.

$0+x=x+0=x,\ \ 1\cdot x=x\cdot 1=x$

5) $-x$는 x의 加法逆元, $x+(-x)=(-x)+x=0$

6) $x+z=y+z$면 $x=y$

$x\cdot z=y\cdot z,\ z\neq 0$면 $x=y$

위의 演算의 定義에 의하여 整數 $[m-a]$는 n에서 a를 뺀 값임이 분명하다.

關係 <

$\forall[m-a], [n-b]\in I$에 對하여 $m+b<n+a$이기만 하면 $[m-a]<[m-b]$

1) $x, y\in I$에 對하여 다음 중 꼭하나만이 성립한다.

$x=y,\ \ x<y,\ \ x>y$

2) $x+z<y+z$는 $x<y$일 때만 成立.

3) $z>0$이면 $x\cdot z<y\cdot z$는 $x<y$일 때만 成立

4) $z<0$이면 $x\cdot z<y\cdot z$는 $x>y$일 때만 成立

陽整數는 $x>0$인 모든 x의 集合으로 주어지고, 이를 "P"로 표시하면 $[m-a]\in P$때 $[m-a]>[n-n]$ 즉 $m+n>n+a$ 그리하여 $m>a$이다. 따라서 어떤 $k\in N$에 대하여 $m=a+k$일 때에 $[m-a]\in P$이다. 이때 k는 一意的이다. $[m-a]\in P$일 때는 $k\in N$에 對하여 $m=a+k$이므로 $m+1=(a+k)+1=k※+a$

따라서 $m-a\sim k※-1$ 즉 P의 元素는$[k※-1]$의 形式의 元素이다.

$$P=\{[k※-1]\mid k\in N\}$$

그리고 x가 陰의 整數이면 $-x=[a-m]$이고 $a>m$이므로 $-x>0$이다. 뚝같이 x가 陽의 整數이면 $-x$는 陰의 整數이다. 따라서 $x\neq 0$인 整數에 對하여 $x\in P$이거나 $-x\in P$이다.

여기서 $\theta: [k※-1]\theta=k,\ k\in N$에 의하여 定義되는 N위에의 P의 一對一 寫像 θ를 생각하자. 이 θ에 의하여

$([m※-1]+[n※-1])\theta=[(m+n)※-1]\theta$
$=m+n$

와$([m※-1]\cdot[n※-1])\theta=[(m\cdot n)※-1]\theta=m\cdot n$이며, 이때 $[m※-1]\theta=m,\ [n※-1]\theta=n,$

$[m※-1]=x,\ [n※-1]=y$로 두면 $x, y\in P$이면

$$(x+y)\theta=x\theta+y\theta,\ \ (x\cdot y)\theta=x\theta\cdot y\theta$$

이다.

또 $[m※-1]<[n※-1]$인 것은 $m<n$일 때이기 때문에 $x, y\in P$에 대하여

$x<y$일 때만 $x\theta<y\theta$이다.

이로써 θ는 P의 N위에서 一對一寫像의 特한 境遇이다. 즉 P에 있는 두 元素 x와 y의 合은 N의 對應하는 두 元素의 合과 같고 그

고 P에 있는 두 元素 x와 y의 곱에는 N의 對應하는 元素의 곱과 같다. 또 P와 N에 있어서의 順序關係 $<$은 N위에의 P의 寫像 θ에 依하여 그대로 成立하게 된다. 즉 θ는 $\{P; +, \cdot, <\}$의 $\{N; +, \cdot, <\}$ 위에의 同型寫像이다.

陽數와 自然數의 體系가 同型이라는 事實은 이것들이 代數學的으로 同値라는 것을 말한다. 즉 이 두 體系의 關係에 關한 性質들은 같다. 그러나 이 두 體系는 恆等하지 않다. 즉 이들 元素는 恆等하지 않기 때문에 體系도 恆等하지 않다 한 쪽은 自然數이고 한 쪽은 自然數의 順序雙의 集合이다.

그러므로 이제부터는 自然數의 體系 $\{N; +, \cdot, <\}$ 代身 陽整數의 體系 $\{P; +, \cdot, <\}$를 使用한다. 그래서 "1", "2", "3"등 등을 整數$[1※-1]$, $[2※-1]$, $[3※-1]$ 등등을 表示하는데 使用한다. 따라서 集合 I는 陽整數와 0과 陰整數로 이루어진다.

§4. 有理數

길이나 무게를 잴 때 一定한 單位를 基準으로 하여 잰다. 길이를 그 單位의 整數倍로 잴 수 없을 때는 다시 單位를 잘게 잡아서 使用한다. 이와같은 境遇들에 適合한 數를 만들어야 한다.

또 整數의 範圍內에서 加減乘은 自由로히 되지만 除法은 特別한 境遇를 除外하고는 不可能하다. 이를 爲하여 分數라는 記號를 使用하여 導入한 것이 有理數이나. 自然數 때와 같이 公理系에 의하여 定義할 수도 있지만 이미 定義된 槪念을 利用하여 有理數를 求하자. 이 때 整數를 有理數로 擴張한 有理數가 위에서 말한 境遇들에 有用하고, 또 有理數의 集合이 整數의 集合을 包含하여야 하며, 有理數 사이에 加法과 乘法이 定義될 수 있고 그리고 이들 演算에 關하여 整數가 滿足하고 있는 性質 즉 整域이어야 한다. 또 有理數 사이에 順序를 定義할 수 있어서 이 順序가 全順序이고 위의 演算에 適合하고 앞에 定義한 整數의 順序와 一致하여야 한다.

먼저 "F"는 모두 順序雙(m, a), $m, a\in I$ $a\neq 0$의 集合을 表示하다고 하자. 便利하게 하기 爲하여 F의 元素는 "(m, a)" 代身에 "m/a"로 表示한다.

그리하여 關係 $\backsim$를 F에서 各 m/a, $n/b\in F$에 對하여 $m\cdot b=n\cdot a$이기만 하면 $m/a\backsim n/b$

여기 關係 $\backsim$도 F에서 同値關係이며 따라서 $\backsim$에 依하여 F를 類別化하여 "$[m/a]$"을 m/a을 가지는 同値集合을 表示하도록 한다. 즉 $[m/a]=\{n/b \mid n/b\in F,\ n/b\backsim m/a\}$

이 關係와 F에 依하여 有理數를 定義한 것이 便利하다.

(定義) $\backsim$에 關한 F의 同値集合을 有理數라고 부른다. 그리고 모든 有理數의 集合을 "R"로 써 表示한다.

여기 이 定義에 依하여 構成된 이 새로운 數에 構造를 부치기로 하는데 먼저 必要한 것이 關係를 導入하는 것이다. 그리하여 그 關係를 滿足하는 條件을 提示하면 다음과 같다.

關係 $+$, $\cdot$

$\forall[m/a]$, $[n/b]\in R$의 對하여 $[m/a]+[n/b]=[(m\cdot b+n\cdot a)/a\cdot b]$, $[m/a]\cdot[n/b]=[m\cdot n/a\cdot b]$

1) $\forall r, s, t\in R$에 對하여 $r+(s+t)=(r+s)+t$, $r\cdot(s\cdot t)=(r\cdot s)\cdot t$

2) $\forall r, s\in R$에 對하여 $r+s=s+r$, $r\cdot s=s\cdot r$

3) $\forall r, s, t\in R$에 對하여 $(r+s)\cdot t=r\cdot t+s\cdot t$

4) 0과 1은 各各 $+$와 $\cdot$의 演算에 關하여 恆等元이다. $0+r=r+0=r$, $1\cdot r=r\cdot 1=r$

5) $-r$와 r^{-1}은 $+$와 $\cdot$의 演算에 關하여 各各 r의 逆元이다.
$r+(-r)=(-r)+r=0$, $r\cdot r^{-1}=r^{-1}\cdot r=1$, $(r\neq 0)$

단, $[0/a]=0$, $[m/m]=1$

$r\in R$에 對하여 $[m/a]=r$면 $[(-m)/a]=-r$
또 $m\neq 0$때 $[m/a]=r$면 $[a/m]=r^{-1}$

關係 $<$

$[m/a]\in R$은 $m\cdot a>0$일 때만 陽數라 하고 R의 모든 陽數의 集合을 "R_P"로 表示함.

$\forall r, s, t\in R$에 對하여

1) $s-r\in R_P$일 때에만 $r<s$

2) $r<s$, $s<t$면 $t-r\in R_P$

이다. 또

1) $\forall r\in R$에 對하여 다음 중 꼭 하나만이 성립한다.
$r=0$; $r\in R_P$; $-r\in R_P$

2) R_P는 加法과 乘法에 依하여 닫힘.

3) $r\in R_P$ 이면 $r^{-1}\in R_P$

그러므로 寫像 θ를 다음과 같이 定義하면 $[m/1]$인 形態의 모든 有理數의 集合 J는 本質的으로 整數의 集合 I과 같음을 알 수 있다.

$$\theta : [m/1]\theta=m,\ m\in I$$

즉 이 寫像은 J의 I 위에의 同型寫像임을 證明할 수 있다. 그러므로 m을 $[m/1]$의 表示로 쓸 때 J와 I는 區別하며, $[m/a]=[m/1]\cdot[a/1]^{-1}$이므로 $[m/a]=m\cdot a^{-1}=m\div a,\ m, a\in J$인 形態로 쓸 수 있다. 즉 有理數는 두 整數의 몫이다

§5. 自然數·整數·有理數의 指導過程

實數體系의 性質을 究明하는 一環으로 그 部分體系인 自然數 整數 有理數의 共通槪念을 一般化하여 代數的體系에서 特徵을 밝히고 構造에 立脚하여 그 指導過程을 提示한다.

1. 集合과 命數法

1) 集合과 數知覺　2) 基數詞
3) 數比較와 數直線　4) 集合數와 順序數
5) 묶기와 자리값　6) 記數法
7) 命數體系의 擴張　8) 數詞
9) 指數

2. 零과 自然數

1) 計數　2) 集合數와 順序數
3) 交換的性質　4) 結合的性質
5) 配分的性質　6) 사이性, 數直線
7) 順序　8) 數1, 數0

3. 寫像으로서의 演算

1) 集合의 演算　2) 寫像과 演算
3) 一項·二項演算　4) 集合과 닫힘
5) 덧셈·곱셈　6) 演算·逆演算
7) 뺄셈·나눗셈　8) 四則의 熟達
9) 有理數의 四則

4. 陰數

1) 陽數·整數　2) 整數와 數直線
3) 整數와 그의 反數　4) 整數의 四則
5) 因數·約數·倍數　6) 素數와 合成數
7) 最大公約數　8) 最小公倍數
9) 整數의 構造

5. 有理數

1) 順序雙과 分數　2) 有理數와 數直線
3) 部分領域·部分集合　4) 有理數의 順序
5) 1보다 큰 有理數　6) 旣約分數
7) 逆數　8) 整數의 몫
9) 小數　10) 有利數의 構造
11) 比와 有理數

6. 數學的文章과 論理

1) 數學的文章과 命題
2) 不等式과 順序 및 性質
3) 方程式과 解(文字使用, =)
4) 演算과 逆演算　5) 條件文(⇒)
6) 그리고, 또는, 아님

7. 新數學體系

1) 時計算數　2) 合同式

以上의 部分數體系의 展開는 앞에서 論說한 構造的 立場에서 論理를 强調한 展開이다. 이것은 큰 領域으로 묶는 方法의 例示일 것이다. 實際指導에서는 다시 이를 細分하여 具體案이 따른다

가령 例를 들면 自然數의 順序構造에서 半順序, 全順序(線形順序), 三者擇一律, 推移律, 單調律 等을 取扱할 수 있으면 減法의 分析에서는 減法의 定義에 依한 여러가지 性質들 즉 自然數範圍內에서는 陰數가 나오지 않는 限度에서

$S_1,\ (b-a)+a=b$　　$S_2,\ (b+a)-a=b$

$S_3,\ (a+b)-c=a+(b-c)$

$S_4,\ (b-a)+c=a-(b-c)$

$S_5,\ (a-b)-c=a-(b+c)$

$S_6,\ a(b-c)=ab-ac$

等을 取扱하여 減加法, 減減法을 알릴 수도 있다.

또 여기에 提示한 展開例는 減法을 먼저 可能하게 하기 爲한 것이며 이는

自然數⟶整數⟶有理數

의 順序를 取한 것이다. 從前과 같이 整數를 後로 미루어 展開하여도 할 수 있다. 그러나 構造를 分明히 들어낼려면 上級學校에 繼續하여야 하는 페단이 있다.

参 考 文 獻

An introduction to Abstract Algebra
by C.C. Mac Duffee.

Introduction to Topology by Solomon Lefschetz.

Modern Algebra and Trigonometry.
by E.P. Vance.

位相群論 ……………………………決中忠郞 著

數의 數養 ……………………………東京學藝大學編

(P. 25 로 계속)