(연재 4)

初步者를 爲한 **Operations Research** 講議

Primely Course of Operations Reasearch

漢陽大學校 講師
KSQC經營指導部長 **田 萬 述**

4. Gamc의 理論

1. 게임理論의 出現

企業과 企業 사이에 벌어지는 競爭의 모양을 數學的으로 理論化하여 硏究하는 것이 게임의 理論이다. 게임理論은 1947年에 數學者 Von Neuman과 經濟學者 Morgenatern과의 共著 「Theory of Game and Economic Behavior」에 依하여 創始된 것이다.

現代의 企業은 自由資本主義市場의 原則아래서 自由競爭속에서 最小의 費用으로 最大利潤을 確保하기를 目標로 하고 있다. 이러한 目標를 達成하기 爲해 現代 發展된 經營學은 數많은 管理道具를 提供하고 있다.

現代의 經濟社會의 企業 혹은 個人의 行動은 대단히 復雜한 樣相을 나타내는 것이므로 한企業의 極大는 다른 企業의 極小를 招來하는 때가 많다. 이를테면 販賣側은 될수있는限 비싼 값으로 팔려고 하는 것은 購買測의 效用을 極小로 하는 것이 된다. 이것은 行動의 機構가 게임의 그것과 같다.

이와같이 보면 購買側은 相對편의 비싼 값으로 판다는 拘束아래서 自己가 얻는 總效用을 最大로 하려한다. 反面에 販賣側은 相對편의 싼값으로 산다는 拘束아래서 自己가 얻는 總效用을 最大로 하려는 것은 當然하다.

이와같이 兩者는 利害相反的인 經濟行動을 取하게 될때 自身에게 가장 有利하게 할수 있는 戰略(Strategy)을 樹立하는 것이 게임理論의 本質이라 할 수 있겠다.

競爭에 있을 수 있는 모든 境遇의 모양은 지나치게 復雜하여 그대로 全部는 取扱하지는 못하지만 그 모양을 어느 정도까지 單純하게 만들어서 게임의 理論으로 取扱할때 그 競爭의 本質을 규명할 수가 있는 것이다.

2. 決定的인 게임

지금 X, Y의 두 Player가 어떤 일에 관하여 競爭을 하고 있다고 하자. 이 競爭에서 X의 競爭方法은 X_1, X_2의 두가지이며 Y의 競爭方法은 Y_1, Y_2의 두가지이고 이 게임의 모든 規則은

Player Y

		Y_1	Y_2
Player X	X_1	0	-5
	X_2	5	0

……(1)

로 表示되어 있다고 하자. 이 規則의 內容은

「X가 X_1 Y가 Y_1의 方法을 쓰면 X는 Y로부터 0을 받는다」

「X가 X_1 Y가 Y_2의 方法을 쓰면 X는 Y로부

터 −5를 받는다」

「X가 X_2 Y가 Y_1의 方法을 쓰면 X는 Y로부터 5를 받는다」

「X가 X_2 Y가 Y_2의 方法을 쓰면 X는 Y로부터 0을 받는다」

로 約束해 두며, 이 約束은 各者가 미리부터 알고 있다고 한다. 이 때에 (1)를 이 게임의 淸算行列(Pay off matrix)이라고 하는데 일반으로 (1)과 같이 2行과 2列로 된 淸算行列로 代表되는 게임을 2×2 game이라 한다.

앞의 게임 (1)에서 X는 X_1을 쓰면 最大로 5의 損害나 0의 利得이 있을 수 있고, X_2를쓰면 0의 損害나 5의 利得이 있을 것이므로 X는 X_2를 쓸 것이다. 이에 대하여 Y는 Y_1를 쓰면 最大로 5의 損害나 0의 利得이 있을 수 있고 Y_2를 쓰면 0의 損害나 5의 利得이 있을 것이므로 Y는 Y_2를 쓸 것이다.

게임에서 「X_1을 쓰라」와 같이 競爭方法중에서 어느 것을 쓰는가를 定하는 일을 戰略(Strategy)이라고 하며, 戰略중에서 player에게 가장 有利한 것을 最適戰略(Optimal Strategy)이라고 한다.

앞의 게임 (1)의 各行의 最小元素와 各 列의 最大元素를 적으면

	Y_1	Y_2	min
X_1	0	−5	−5
X_2	5	(0)	0
max	5	0	

……(2)

와 같이 된다. 여기에서 X에게는 min列의 最大値 0이 있는 X_2를 쓰는 것이 最適이고 Y에게는 max行의 最小値 0이 있는 Y_2를 쓰는 것이 最適이라는 것을 알 수가 있다. 이리하여 게임 (1)은 (0)의 곳에서 實行되게 된다.

一般으로 게임에서 어떤 行의 最小値가 그것을 包含하는 列의 最大値인 때에 즉

min{行의 元素}=max{列의 元素}

일 때에, 그 數가 놓인 곳을 이 게임의 鞍點(Saddle point) 혹은 minimax(最小最大)의 點이라고 하며 이 이點의 값을 게임의 값(Value of the game)이라고 한다. 특히 값이 0인 게임을 公平한 게임(fair game)이라고 한다. 그리고 鞍點이 있는 게임을 最適戰略이 唯一하게 決定된다는 뜻에서 決定的 게임 (Strictly determined game)이라고 한다. 따라서 앞의 게임 (1)은 決定的이며 그 값은 0이다. 그리고 게임에서 敗者의 損害와 勝者의 利益의 合이 0인 것을 특히 零合게임(Zero sum game)이라고 한다.

(例 1) 다음의 2×2 게임은 어떤 것인가?

	Y	
X	3	2
	2	2

(풀이)

	Y		min
X	3	2	2
	2	②	←2
max	3	↑ 2	

주어진 것은 決定的인 2×2게임이다.
그리고 X의 最適戰略은「第1列을 play하라」
Y의 最適戰略은「第2列을 play하라」
이다. 이 게임의 값은 2이므로 公平하지가 않으며, 零合게임이다.

(例 2) 다음의 게임은 어떤 것인가?

	Y		min
X	3	0	0
	0	1	0
max	3	1	

(풀이)

	Y		min
X	3	0	0
	0	1	0
max	3	1	

주어진 決定的이 아닌 게임이다.

3. 決定的이 아닌 게임

이번에는 다음과 같은 決定的이 아닌 게임에 대하여 생각하자. 즉

$$\begin{array}{c|c|c|} & Y_1 & Y_2 \\ \hline X_1 & 10 & 0 \\ \hline X_2 & 0 & 10 \\ \hline \end{array} \cdots\cdots (1)$$

게임이 決定的이 아닐 때에는 各 player는어떻게 play해야겠는가를 생각하자.

이 게임이 決定的일 때는 各 player는 제각가의 最適戰略을 써야겠지만, 게임이 決定的이 아닐 때에는 각 player는 어떻게 play하면 좋을까 하는 問題가 제기된다.

위 게임에서는 만약 이 play를 單一回만한다고 하면, 相對方이 무엇을 낼것인지 모르기 때문에 어떤 player에게는 어떤 戰略이 좋다고 말할 수가 없다. 그러나 위 게임을 몇 번이라도 되풀이해서 한다면 各 player는 어떻게 해야 하는가를 硏究할 餘地가 생긴다.

만약X가 늘 X_1만 내면, Y는 그것을 알아차리고 Y_2를 내서, X의 得點을 0으로 해버릴 것이다. 또 만약 X가 언제나 X_2만을 내면, 역시 Y는 그것을 알아차리고 Y_1을 내서, 또 X의 得點을 0으로 해버릴 것이다.

따라서 X는 그 規則을 相對方이 모르도록 적당히 X_1과 X_2를 섞어서 내지 않으면 안된다 그렇다면 X는 平行해서 X_1을 몇번, X_2를 몇번 내야 할까? 이것은 위의 行列이 對稱이므로 X_1과 X_2을 반씩 내야 할 것으로 생각된다.

그러나 X_1과 X_2를 半半 낸다고 하여도, 만약 X가 X_1과 X_2를 정확히 交代로 낸다고 하면, Y는 그것을 알아차리고 X의 得點이 0이 되도록, 즉 X가 X_1을 낼 때에는 Y_2를 X가 X_2를 낼 때에는 Y_1를 낼것이다.

따라서 결국 X는 X_1과 X_2를 半半씩 내야하지만 그 내는 方法은 相對方이 모르도록 해야 한다는 것을 알 수가 있다. 가령 X는 Y가 모르도록 동전이라도 던져서 만약 앞이 나오면 X_1을 뒤가 나오면 X_2를 낸다든가 해야 한다는 것을 알 수가 있다. 이것을 고쳐 말하면 X_1과 X_2를 各各 確率 $^1/_2$로 내야 한다는 것이 된다.

이번엔 위 게임의 規則을 또 고쳐서 다음과 같은 決定的이 아닌 게임을 만들어서 이 게임을 몇번이고 되풀이한다면 X는 어떻게 play해야 할까, 또

$$\begin{array}{c|c|c|} & Y_1 & Y_2 \\ \hline X_1 & 10 & 0 \\ \hline X_2 & 0 & 4 \\ \hline \end{array} \cdots\cdots (2)$$

Y는 어떻게 play해야 할까를 생각해 보기로 하자.

X는 得點이 많은 X_1을 내고 싶다고 생각할 것이다. 그러나 X가 X_1만을 낸다면 Y는 그것을 알아차리고 Y_2만을 내서 X의 得點을 0으로 해버릴 것이다. 그렇다고 해서 X가 X_2만을 낸다면 Y는 그것을 알아차리고 Y_1을내서 또 X의 得點을 0으로 해버릴 것이다.

따라서 이때에도 X는 X_1과 X_2를 섞어서 내야 하겠는데, 問題는 X_1을 어떤 率로 내고 X_2는 어떤 率로 내는 것이 X에게 가장 有利할 것인가 하는 것이다.

게임에서 X에 대한

「第1行을 確率 x_1으로 play하라」

「이2行을 確率 x_2으로 play하라」

따위의 指示를 X를 위한 爲한 混合戰略 (mixed strategy)라고 한다.

마찬가지로 Y에 대한

「第1列을 確率 y_1로 play하라」

「第2列을 確率 y_2로 play하라」

하는 따위의 指示를 Y를 爲한 混合戰略이라

고 한다.

일반으로 鞍點이 없는 2×2 零合 게임

	Y_1	Y_2
X_1	a_{11}	a_{12}
X_2	a_{21}	a_{22}

…… (3)

의 값 v는

$$v=\frac{a_{11}\ a_{22}-a_{12}\ a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}\cdots\cdots(4)$$

이며 X의 最適混合戰略이

「X_1을 確率 x_1으로, X_2를 確率 x_2로 써라」

라고 하면

Y의 最適戰略

「Y_1을 確率 y_1으로 Y_2를 y_2로 쓰라」이면

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (5)$$

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{a_{23}-a_{12}}{a_{11}-a_{21}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (6)$$

가 된다.

(例 1) 다음의 決定的이 아닌 게임의 값과 最適戰略을 求하라.

	Y_1	Y_2
X_1	10	0
X_2	0	10

(풀이) 앞의 公式 (4)로 부터

$$v=\frac{100-0\times0}{(10+10)-(0+0)}=5$$

를 얻으며 (5), (6)으로 부터

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{10-0}{10-0}=1\quad \therefore x_1=x_2=\frac{1}{2}$$

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{10-0}{10-0}=1\quad \therefore y_1=y_2=\frac{1}{2}$$

이다. 따라서

X의 最適戰略은 「x_1과 x_2를 各各 確率 $\frac{1}{2}$로 써라」

Y의 最適戰略은 「y_1과 y_2를 各各 確率 $\frac{1}{2}$로 써라」이다.

(例 2) A와 B가 내기를 한다. 두사람은 동시에 손가락을 하나 나 둘을 제각기 낸다고 하자. 이 내기의 法則이 다음과 같을 때에 A는 B에게 얼마를 내고 이 내기를 하면 되겠는가?

B

		하나	둘
A	하나	50원	0
	둘	0	100원

(풀이) 이 게임에는 鞍點이 없다. 따라서 公式 (4), (5), (6)으로 부터

$$v=\frac{50\times100-0\times0}{(50+100)-(0+0)}=\frac{5000}{150}=\frac{100}{3}$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{100-0}{50-0}=2$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{1}{3}$$

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{100-0}{50-0}=2$$

$$\therefore\quad y_1=\frac{2}{3},\quad y_2=\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 A는 B에게 $33\frac{1}{3}$원을 내면 되고 各者의 最適戰略은

「A는 하나를 確率 $\frac{2}{3}$로, 둘을 確率 $\frac{1}{3}$로 내라」

「B는 하나를 確率 $\frac{2}{3}$로, 둘을 確率 $\frac{1}{3}$로 내라」이다.

4. 2×2게임 이상인 m×n게임

두 player 사이에 行해지는 게임에서 第1의 player때X의 術策은 m가지가 있다고 하고, Y의 術策은 n가지가 있다고 할 때 各各의 最適戰略은 다음과 같이 求한다.

$$x_1+x_2+\cdots+x_M=1\quad x_i\geq0\quad(1)$$

$y_1+y_2+\cdots+y_n=1 \quad y_j \geqq 0 \quad (2)$

$x_1a_{1j}+x_2a_{2j}+\cdots+x_Ma_{mj}, \geqq v$

$j=1, 2\cdots n \quad (3)$

$y_ia_{i1}+ya_{i2}+\cdots+y_na_n \leqq v$

$i=1, 2\cdots n \quad (4)$

(1), (2), (3), (4)에서 m+n+2의 未知數를가진 m+n+1個의 方程式을 풀어보면 된다. 이 方程式을 푸는 데는 3가지 方法이 있는데(첫째) 代數學的方法(둘째), 매트릭스方法(셋째) 反復的 方法이다. 이 중에서 첫번째 方法만을 간단히 설명하여 보겠다.

(次號 繼續)