(연재 5)

初步者를 爲한 Operations Research 講義

漢陽大學校 講師
KSQC經營指導部長 **田 萬 述**

5. 2×m Game의 圖解法

다음의 2×3 Game에 대하여 생각하여 보자

	Y_1	Y_2	Y_3	min	
X_1	1	3	11	1	(1)
X_2	8	5	2	2	
max	8	5	11		

이 Game에는 鞍點이 없다. 그래서 X에 대한 最適混合 戰略「X_1을 確率x_1으로 X_2를 確率x^2로 써라」이라하고 이때의 Game의 값을 v라고 하면 行列 (1)로 부터

$$x_1+8x_2=x_1+8(1-x_1)\geqq v$$
$$\therefore v\leqq -7x_1+8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$3x_1+5x_2=3x_1+5(1-x_1)\geqq v$$
$$\therefore v\leqq 2x_1+5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$
$$11x_1+2x_2=11x_1+2(1-x_1)\geqq v$$
$$\therefore v\leqq 9x_1+2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

를 얻는다.

지금 (2), (3), (4)를 그래프로 그리면 그림 1과 같다.

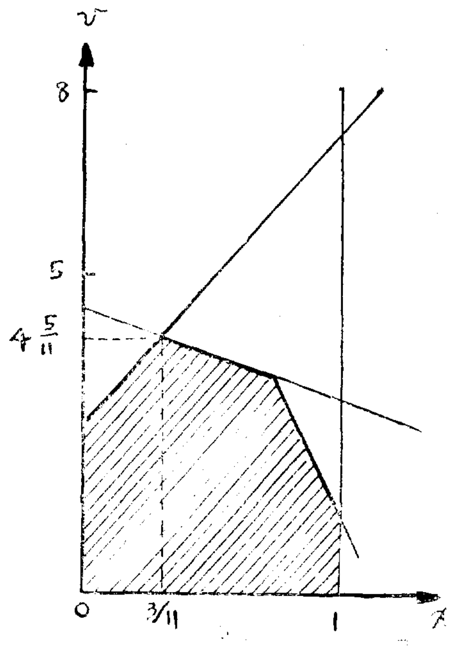


그림 1

그래프에서 (2), (3), (4)를 만족하는 最大의 v는 M點에 있고, M點의 x_1座標는

$$x_1=\frac{11}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$ 이므로

$x_2=1-x_1=\frac{11}{8}$이고, M點의 v座標는 (5)를 (3)에 대입하여 $v=-2(\frac{3}{11})+5=4\frac{5}{11} \cdots\cdots (6)$

이다.

6. 3×3Game의 優位性

鞍點이 있는 경우의 Game은 간단히 처리되므로 여기에서는 鞍點이 없는 경우의 3×3Game에 대하여 생각하기로 한다. 첫째로 앞과 같은 경우에 대하여 생각하자.

	Y_1	Y_2	Y_3	min	
X_1	−1	2	1	−1	
X^2	1	−2	2	−2	……(1)
X_3	3	4	3	−3	
Max	3	4	2		

이 경우의 Game의 값을 v라고 하고 각각의 最適戰略을

「X는 $(X_1X_2X_3)$을 確率 x_1 x_2 x_3으로 써라」

「Y는 $(Y_1Y_2Y_3)$을 確率 $y_1y_2y_3$으로 써라」

고 하자, 그러면 基本定理에 의하여

$$x_1+x_2+x_3=1 \quad (x_1x_2x_3\geqq 0) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$y_1+y_2+y_3=1 \quad (y_1y_2y_3\geqq 0) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$
$$\left.\begin{array}{l} -x_1+x_2+3x_3=v \\ 2x_1-2x_2+4x_3=v \\ x_1+2x_2-3x_3=v \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$
$$\left.\begin{array}{l} -y_1+2y_2+y_3=v \\ y_1-2y_2+2y_3=v \\ 3y_1+4y_2-3y_3=v \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

가 성립한다.

지금 앞의 8개의 聯立方程式이 모순이 內包하지 않는다면, 이것은 반드시 解를 가질 것이다. (2), (4)로 부터

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_2+3x_3-v=0 \\ 2x_1-2x_2+4x_3-v=0 \\ x_1+2x_2-3x_3-v=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

을 얻으므로

$$X_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{-\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & -6 \end{vmatrix}}=\frac{17}{46}$$

마찬가지로 하여서

$$x_1=\frac{17}{46},\quad x_2=\frac{20}{46},\quad x_3=\frac{9}{46}\cdots\cdots(7)$$

$$y_1=\frac{41}{46},\quad y_2=\frac{12}{46},\quad y_3=\frac{20}{46}\cdots\cdots(8)$$

$$v=\frac{30}{46}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

얻는다, 즉 最適混合戰略은

「X가 $(x_1x_2x_3)$ 을 $\left(\frac{17}{46},\ \frac{20}{46},\ \frac{9}{46}\right)$ 로 쓰라」와 「Y가 $(y_1y_2y_3)$을 $\left(\frac{14}{46},\ \frac{12}{46},\ \frac{20}{46}\right)$ 로 쓰라」이며, 이때에 X는 Y로 부터 $\frac{30}{46}$ 을 받는다.

위의 경우에서는 聯立方程式이 잘풀렸지만 3×3 Game에서 만들어낸 聯立方程式이 언제나 풀린다는 보장은 없다. 가령 (10)에 대하여 생각하면 이 Game으로 부터 다음의 聯立方程式을 만들어 낼수가 있다.

	Y_1	Y_2	Y_3	min
X_1	3	−2	4	−2
X_2	−1	4	2	−1⋯(10)
X_3	2	2	6	2
max	3	4	6	

$$x_1+x_2+x_3=1 \quad (x_1x_2x_3\geqq 0)$$

$$y_1+y_2+y_3=1 \quad (y_1y_2y_3\geqq 0)\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1-x_2+2x_3-v=0 \\ -2x_1+4x_2+2x_3-v=0 \\ 4x_1+2x_2+6x_3-v=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3y_1-2y_2+4y_3-v=0 \\ -2y_1+4y_2+2y_3-v=0 \\ 2y_1+2y_2+6y_3-v=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

위의 식에서 (11) (12) (13)의 8개의 式中중에서 위로부터의 차례로 도합6개의 式만을 가지고 풀면 이를 만족하는 解는 없으므로 그냥 풀어 가지고는 풀리지 않는다. 그러나(11) (12)의 처음 두式 (13)의 처음 두式의 도합6개의 式은 모순 없이 풀리면 그 解는

$$\left.\begin{array}{l} x_1=x_2=0 \qquad x_3=1 \\ y_1=\frac{2}{5}\ \ y_2=\frac{3}{5}\ \ y_3=0 \\ v=2 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

이다. 그리고 이(14)는 나머지 方程式도 만족한다.

7. 決定的이 아닌 3×3Game

	Y_1	Y_2	Y_3	
X_1	3	−2	4	
X_2	−1	4	2	⋯⋯⋯(15)
X_3	1	2	6	

에서 보면 Y_3列의 각 元素는 Y_1列의 각 元素보다 크므로 X가 어떤 戰略을 쓰던간에Y는 Y_1이나 Y_2의 戰略은 쓰더라도 Y_3의 戰略만은 절대로 안 쓸 것이다. 즉 Y에게는 Y_1列이 Y_3列 보다 좋은 戰略인 것이다. 그래서 이Game은 Y_3列을 없애버려서 3×2Game으로 만들어도 된다.

일반적으로 한 Game에서 어떤 x_i항 (yj列)의 각 元素가 다른 Xj行 (Yj列)의 對應하는 元素보다 항상 클(작을) 때에는 Xi行(Yi列)은 Xj行 (Yj列)보다 優位性 (dominance)을 가지고 있다고 한다. 이 Game에서는 Xj 行(Yj列)을 없애버려도 Game의 값과 最適戰略에는 아무 變化가 없다.

X_i	a'	b'	c'
	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
	a	b	c

Y_i		Y_j
a	<	a′
b	<	b′
c	<	c′

앞의 5Game(15)는 優位性을 利用하여 다음의 3×2Game으로 바꿀수가 있다.

	Y_1	Y_2
X_1	3	−2
X_2	−1	4
X_3	2	2

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

지금 이 Game의 값을 v라 하고, Y의 最適混合戰略을

「(Y_1Y_2)를 (Y_1Y_2)로 Play하라」라고 하면

$$3y_1-2y_2=3y_1-2(1-y_1)\leqq v$$

$$\therefore\ v\geqq 5y_1-2 \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$-y_1+4y_2=-y_1+4(1-y_1)\leqq v$$

$$\therefore\ v\geqq -5y_1+4 \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

$$2y_1+2y_2=2y_1+2(-y_1+2y_2)\leqq v$$

$$\therefore\ v\geqq 2 \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

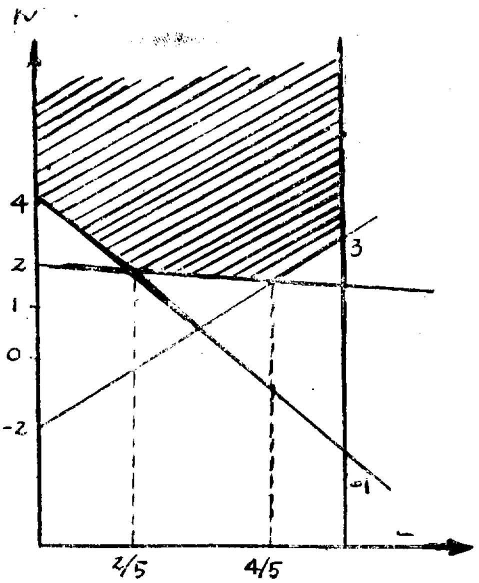
이다. 이것을 그래프에 그리면 위의 (17), (18), (19)를 만족하는 最小의 v는

$$\frac{2}{5}\leqq y_1\leqq\frac{4}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

에서 얻어진다. 그리고

$$y_2=1-y_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

이므로 (20)이 Y의 最適戰略을 決定한다.



5 輸送技法 (Transportion Technique)

지난 68年度 7月10日字 本 學會誌 (제2권 제3호)의 本欄에서 線型計劃技法을 다루어 보았다. 當時에 다룬 技法으로서는 Simplex表를 利用한 Simplex technique(씸프렉스 技法)이였다. 그런데 線型計劃 問題를 풀이하는데는 Simplex 技法外에 輸送技法과 配當技法(Assignment technique)이란 것이 있다. 이러한 技法은 모두 線型計劃問題를 풀이하는 한가지의 特殊한 生格을 가진 것이다. 이번에 우선 輸送技法에 關하여 살려보기로 하자,

1. 輸送技法

이 技法은 本來의 輸送問題뿐만 아니라, 作業計劃問題, 生産在庫計劃問題等 여러가지 分野에 應用된다. 이 輸送問題를 數式으로 定立하면 制約式에 있어서 未知數의 係數가 1로 나타나고 Simplex表를 作成하면 Po이 表示하는 制約量의 値와 各列의 $Zj-Cj$ 欄을 除外하고는 各欄의 數値가 0, 1또는 −1로 나타나므로 Simplex技法에 依한 計算이 容易하다.

그러나 未知數와 方程式이 많으면 結果的으로 計算이 복잡하므로 이러한 性質을 利用해서 쉬사리 푸는 方法이 講究되였다. 이러한 方法은 Simplex技法과 區別하여서 輸送技法이라 불리온다. 이 解法에도 여러가지 方法이 있다. 代表的인 것에 依해서 設明해보기로 하겠다.

輸送計劃의 典型的인 問題는 다음과 같다. 具體的인 列를 들어보자,

어떤 製品을 생산하는 製造會社가 3個地方에 가지고 있는 工場의 生産量은 16t. 13t, 21t이고 이 工場에서 供給하는 4個市場의 需要量은 11t, 13t, 16t, 10t 다. 各 工場에서 市場까지의 輸送費와 輸送量은 다음 表와 같다.

各欄의 右上의 數字는 輸送費고 左下의 變數는 輸送量을 表示한다. 한 例를 들면 B工場에서 F市場까지의 費用은 2이고, 輸送量은 X_{23}이다.

表5—1

	D	E	F	G	生產量
A	x_{11} 3	x_{12} 4	x_{13} 5	x_{14} 5	16
B	x_{21} 7	x_{22} 9	x_{23} 2	x_{24} 8	13
C	x_{31} 7	x_{32} 5	x_{33} 9	x_{34} 10	21
需要量	11	13	16	10	

이러한 輸送條件下에서 各工場에서 各 市場까지의 輸送量을 어떻게 決定하면 會社에서는 最小의 費用으로 各 需要量을 充足시킬 수 있느냐의 問題가 典型的인 輸送計劃問題다. 다음에 이것을 數式化하여 보자.

(1) 各 xij는 非負이어야만 한다.

$xij \geqq 0$

(2) 各 工場에서 産出되어 輸送되는 量은 그 工場의 能力보다는 커서는 않된다.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leqq 16$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\leqq 13 \cdots\cdots\cdots\cdots (5—1)$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\leqq 21$$

(3) 各市場에 到着하는 量은 需要量을 滿足시키려면 그 需要量보다 적어서는 안된다.

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}\geqq 11$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}\geqq 13$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}\geqq 16 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5—2)$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}\geqq 10$$

(4) 最小로 하는 經費의 總額은

$$y=3x_{11}+4x_{12}+5x_{13}+5x_{14}$$
$$+7x_{21}+9x_{22}+2x_{23}+8x_{24} \cdots\cdots\cdots (5—3)$$
$$+7x_{31}+5x_{32}+9x_{33}+10x_{34}$$

이것이 表(5-1)에 綜合되어 있는 輸送計劃問題의 數式이다. 이 問題에 있어서의 特色은 各地의 輸送量과 到着量이 같다는 것이다. 그러므로 다음과 같이하면(5-2)의最經式은 必要치 않는 式이 된다. (5-1)의 各式을 邊끼리 合치면

$$(x_{11}+x_{21}+x_{31})+(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$
$$+(x_{13}+x_{23}+x_{33})+(x_{14}+x_{24}+x_{34})$$
$$=16+13+21$$

이 式에다가 5-2式을 代入하면

$$11+13+16+(x_{14}+x_{24}+x_{34})=50$$
$$\therefore\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=10$$

따라서 결국 一次獨立인 式은 6個가 된다. Simples表 計算에 있어서는 基 Vector는 6個(工場數를 m, 市場數를 n이라 하면 m+n−1개)로 構成되고 總Vector數는 補助 Vector까지 하면 22個가 된다. 이것을 Simplex技法에 依해서 計算하는 것과 比較하면 어느 편이 容易한가를 알수 있다.

2. 輸送解法

<1-2> 輸送解法은 3段階로 나누어 생각할 수 있다. 첫째는 初期計劃을 發見하는 것이고 둘째는 計劃改善의 判定計算이고, 셋째는 計劃의 改善이다. 最適解에 到達하려면 둘째 段階와 셋째 段階를 몇번이고 거듭하면 된다. 이 解法이 Simplex法에 의한 解法보다 容易하다는것은 發見되는 初期計劃이 Simplex의 初期計劃보다는 어느 程度 最適解에 가까운 것이로는 것과 計劃의 改善判斷이 容易하다는 點이다. 그러나 이 解法의 基本原理는 Simplex法의 그것과 같은 것이다. 나중에 Simpelx法에 의한 풀이와 이 解法에 의한 풀이를 相互對照하여 보기로 한다.

(1) 初期計劃의 發見

初期計劃을 發見하는데 있어서는 두가지 方法이 있다 하나는 西北法 (Northwest Rule)이고 또 하나는 Houthakker法이다. 우선 첫째 方法을 使用해보자. 表 5-1에서 x_i를 뺀 表를 利用한다. 다음 表를 이러한 表로하자. 西北法은 이 表의 左上에서 부터 右下로 向해서 輸送量을 決定해 가는 方法이다. 左上의 Corner는 A-D輸送路로 부르고 이 輸送路의 輸送量은 A工場의 生産量16을 超過하지 못하고 D市場의 需要量 11을 超過할 必要는 없다.

이러한 條件을 考慮할때 A-D Route의 輸送量은 生産量과 需要量中에서 그 적은 値11이 된다. 이것으로 D市場의 需要는 充足된다. 그러나 A工場의 生産量이 16이므로 16−11=5가 남아있다. 이것을 어느 市場엔가에 수송하여야 한다. 이것을 어떻게 決定하여야하는

表5-2

工場＼市場	D	E	F	G	生產
A	3	4	5	5	16
B	7	9	2	8	13
C	7	5	9	10	21
需要	11	13	16	10	—

問題는 다음과 같이 생각하면 된다. 해당되는 수송로에서 수요가 完全히 充足되어 生產量에 餘裕가 있으면 右側 Route를 使用하여 生產量을 全部 수송하고 수요가 아직 不足하면 下側 Route를 使用한다. A−D Route에서 生產量이 餘裕가 있으므로 右側 Route를 使用해서 A-E에 5의 値를 준다. 13라 5를 比較해서 적은 値5를 取한다. 이러한 方法으로 計算된 것이 第 表5-2小圓속에 들어 있는 數値들이다. 이렇게 해서 初期計劃이 發見되었다. 이 때 수송者y는

$$y=11\times3+5\times4+8\times9+5\times2+11\times9+10\times10=334$$

이다. 이것을 Sinplex技法과 比較하면 하나의 實現可能한 解에 해당하는 것이다.

<次號繼續>