Plasma 개설 (3)

성 영 권*

(Yung Kwon Sung)

기술해설

19~6~2

<회지 Vol. 19 No. 3에서 계속>

3. 전자유체방정식(Hydromagnetic equation)

3.1. 분포함수 f (r.v.t)

앞서 논한것은 Plasma를 구성하는 각개개의 입자운동에 대해서였으나 plasma전체의 거동에대해서는 plasma를 전자기체 및 (+)이온기체로서 이루어지는 유체로서 취급을 하면 잘 부합되며 설명되는 경우가 많기때문에 이 절에서는 plasma를 유체로서 취급하여 기술하기로하겠다.

우선 plasma는 열운동을 하고있는 하전입자의 집단이기때문에 그 거동은 기체운동론에서 사용되는 Baltzmann방정식을 기초로 두어서 논하게된다.

입자의 위치를 나타내는 세 좌표 x, y, z(이를 간단하게 **r** 로서 표시하기로 한다)와 세가지의 속도성분 V_x, V_y, V_z,(이것역시 간단하게 **V**로서 표시하기로 한다)를 변수로하는 6차원의 직교좌표공간을 생각하여 이를 위상공간이라고 부르기로한다. 어떤 순간에있는 한 입자의 상태는 이 공간내의 한점으로 표시되며 그 운동은 이 공간내의 궤적으로서 나타난다. 위상공간의 체적소편 $d_x d_y d_z \equiv d\mathbf{r}\,d\mathbf{V}$내에 있는 입자수를

$$f(r.v.t)drdV \cdots\cdots(1)$$

라고 나타내면 $f(r.v.t)$는 어느시각 t에 있어서 위상공간내에 있는 입자밀도이며 이것을 분포함수라고한다. 따라서 plasma입자는 이 위상공간에서 운동하고있는 유체를 구성하고 있다고 생각해도 좋다.

일반적으로 열평형상태에있고 Maxwell-Boltzmann 통계에 따르는 plasma의 분포함수는 통계역학에의하면

$$f(\mathbf{V}) = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right) \cdots\cdots(2)$$

로 된다. 그러나 전계가 존재할경우는 일반적으로 plasma는 열평형상태에 있지않고 $T_e > T_i > T_g$로 되여서 분포모양은 복잡하게된다. 가령 Druy vesteyn는 속도분포함수로서

$$\left.\begin{aligned} f(V) &= \frac{4N}{\Gamma(3/4)} \frac{V^2}{V_o^2} exp\left(-\frac{V^4}{V_o}\right)dV \\ V_o &= \sqrt{\frac{4M}{3m}} \frac{eLE}{m} \end{aligned}\right\} \cdots(3)$$

로서 나타내고있다. 여기서 M는 분자량이다.

*정회원 : 고려대학교 이공대학 교수

3.2. Boltzmann방정식

분포함수는 위상공간에 있어서의 대표점의 밀도이기 때문에 이공간에서 속도 **V** 가속도 **a**를 성분으로한 일반화된 속도벡터 **V**를 생각하면 입자의 흐름은 $\mathbf{V}f(\mathbf{r.v.}t)$로서 나타난다. 이 공간에서 입자의 보존법칙을 생각하면 어떤 체적소편의 표면부터 단위시간에 흘러들어가는수와 발생하는수의 차가 입자밀도의 시간변화와 같게된다.

체적소편의 표면 ds를 통해서 흘러들어오는 율은 $-\int ds\mathbf{V}f(\mathbf{r.v.}t)$이다. $d\mathbf{s}$는 바깥방향을 정으로 가정한다. Green의정리로서 이것을 체적적분으로 바꾸면

$$-\int d\mathbf{r}d\mathbf{V}[\nabla_r \mathbf{V}_f(\mathbf{r.V.t}) + \nabla_v af(\mathbf{r.v.}t)] \cdots\cdots(4)$$

단 ∇_r는 r좌표에 관한 발산, ∇_v는 **V**좌표에 관한 발산이다.

그런데 분포함수는 입자의 충돌에 의해서 불연속적으로 변화한다. 이것은 어떤 체적소편내에서 발생하는 입자수를 주게된다. 이것을 $(\partial f/\partial t)coll$라고 나타내면 입자의 보존법칙은 다음과같이 된다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla_r \cdot \mathbf{v}f - \nabla_v \mathbf{a}f + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \cdots\cdots\cdots(5)$$

이것이 Boltzmann방정식이다.

비상대론근사가 사용할수있는경우는 가속도는 작용하는 힘 **F**를 사용해서

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m \cdots\cdots(6)$$

으로 나타낸다. 지금 전기력, 자기력, 중력만을 생각하면

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - m\nabla\phi \cdots\cdots(7)$$

단, **E**는 전계, **B**는 자기 유도 ϕ는 중력 potential, e는 전하이다. 따라서 Boltzmann방정식은

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \frac{F}{m}\nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}} \cdots\cdots(8)$$

로 나타낼수가있다. 여기서 충돌항을 무시한것은 Vlasov 방정식이라고 한다.

이상의 사고방식중에는 **F**라는 형으로 나타낸 long-range의힘과 충돌이라는 형으로 취입된 최근접 2체간에 작용하는 short range의 힘과를 구별할수있다는 가정이 암암리에 들어가있다. 이와같은 생각은 전리도가 높은 plasma에서는 성립되지 않고 충돌은 long-range의 coulomb력에 의해서 생기는 것이기 때문에 충돌항

과 $\mathbf{F}$와를 분리하는 것은 옳지않게된다. 이러한 경우에는 Fokker-Planck의 방정식이라는것이 사용된다.

3.3. 운동량 수송방정식

속도 $\mathbf{V}$의 임의함수 $Q(\mathbf{V})$의 입자속도분포에 관한 평균치 $\overline{Q}$는 입자밀도를 $n(\mathbf{r}.t)$라고하면

$$\overline{Q}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{n(\mathbf{r}.t)}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}Q(\mathbf{V})f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}\cdots(9)$$

로서 주어진다. (8)식에 $Q(v)dv$를 곱해서 적분하여 (9)식의 정리를 사용하면

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\overline{Q})+\frac{\partial}{\partial r}(n\nu Q)\frac{n}{m}\frac{\partial(\overline{FQ})}{\partial v}=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}}Qdv\cdots\cdots(10)$$

제3항은 (8)식의 제3항을 부분적분한 결과이다. $Q=1$라고 하면

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla(n\mathbf{V})=0\cdots\cdots(11)$$

전체의 입자수는 충돌에 의해서는 변치않기때문에 우변은 0으로된다. 이것은 결국 연속방정식에 지나지 않는다.

운동량 수송방정식은 $Q=m\mathbf{V}$로 둠으로서 얻어진다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(nm\overline{V})+\frac{\partial}{\partial r}(nm\mathbf{VV})=\frac{n}{m}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$(\overline{\mathbf{F}.m\mathbf{V}})=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}}m\mathbf{V}dV\quad\cdots\cdots(12)$$

속도 $\mathbf{V}$를 거시적인 평균속도 $\mathbf{V}$와 열운동 속도 $\mathbf{V}_r$와의 합성으로서

$$\mathbf{V}=\overline{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)+\mathbf{V}_r\cdots\cdots(13)$$

으로 나타낸다. 제 1항은

$$\frac{\partial(nm\mathbf{V})}{\partial t}=\mathbf{V}\frac{\partial(nm)}{\partial t}+nm\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}$$

이고 제3항은

$$\frac{n}{m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{V}}(\mathbf{F}.mV)=n\overline{\mathbf{F}}$$

제2항은 (13)식을 고려하여

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(nm\mathbf{VV})=\nabla.(nmV\overline{V})+\nabla.(nm\mathbf{V}_r\mathbf{V}_r)$$

$$=nm(\overline{\mathbf{V}}.\nabla)\overline{\mathbf{V}}+\overline{\mathbf{V}}\nabla.(nm\overline{\mathbf{V}})+\nabla\Psi$$

$\Psi=nm\mathbf{V}_r\mathbf{V}_r$는 kinetic stress tensor이고 입자가 maxwell분포를 하고있는경우는

$$\Psi=nm\overline{\mathbf{Vr}_r}^2=\frac{1}{3}nm\overline{V_r^2}\cdots\cdots(14)$$

즉, 입자의 분압을 나타낸다. (12)식의 우변은 입자의 집단간의 충돌에의한 운동량의 변화로서 이것을 $\mathbf{P}$라고 나타내면 (12)식은 (11)식을 고려하여

$$nm\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\mathbf{V}.\nabla\mathbf{V}\right)=n\mathbf{F}-\Delta.\Psi+\mathbf{P}\quad\cdots\cdots(15)$$

이 식의 좌변은 $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\Sigma\frac{dx_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial t}+\overline{\mathbf{V}}.\nabla$를 고려하면 아는바와같이 단위 체적중의 전입자의 질량에 그 가속도를 곱한 것이다. 우변은 단위체적중의 전입자에 작용하는 모든 힘이다. 따라서 이 방정식은 Newton의 제 2법칙을 나타내는 셈이 된다.

3.4. Plasma에 대한 전자유체방정식

앞 절에서 기술한 (15)식은 한 종류의 입자의 집단에 대해서 성립하는 관계지이만 전자와 이온으로 부터 구성되는 두성분의 집단인 plasma에대해서는 전자기체, 이온기체에 대한 각 각 성립하는것이다. 전자 및 이온의 질량을 각각 m_e, m_i 전하를 e, e_i 입자밀도를 n_e, n_i 평균속도 v_e v_i라고하면 mass밀도 ρ_m는

$$\rho_m=n_em_e+n_im_i\cdots\cdots(16)$$

mass current $\mathbf{J}$는

$$\mathbf{J}=n_em_e\mathbf{v}_e+n_im_i\mathbf{v}_i\cdots\cdots(17)$$

plasma의 평균속도 $\mathbf{V}$는

$$\mathbf{V}=\mathbf{J}/\rho_m\cdots\cdots(18)$$

한편 charge density ρ는

$$\rho=n_ee+n_ie_i\cdots\cdots(19)$$

전류밀도는

$$j=n_ee\mathbf{v}_e+n_ie_i\mathbf{v}_i\cdots\cdots(20)$$

지금 (15)식을 전자에 대해서 벡터의 α성분만을 추려내면

$$m_en_e\frac{\partial v_\alpha}{\partial_\alpha}+m_en_e\sum_{\beta=1}^{3}v\beta\frac{v_\alpha}{\partial x\beta}$$

$$=n_ee\left[E\alpha+(v\times\beta)_e-n_em_e\frac{\partial\phi}{\partial x_L}-\sum_{\beta=1}^{3}\right.$$

$$\left.\frac{\partial\phi\beta\alpha}{\partial x\beta}+\right]dvm_ev_\alpha\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll.}}\ i\to e$$

여기서 기호 $i\to e$라는것은 이온부터 전자에 주어진 운동량을 나타낸것이다. 전자끼이의 운동량의 수여는 역시 전체로서 0으로 되기때문에 나타나지 않는다. Newton의 제 3법칙에 의해

$$\int d\mathbf{v}m_i\mathbf{v}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}}\ e\to i=\int d\mathbf{v}m_e\mathbf{v}$$

$$\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}}\ i\to e$$

가 성립하기때문에 이온에 대한 식과 전자에 대한 식을 합하면 전 운동량 보존식이 얻어진다, plasma를 등방적이라고 가정하면 kinetic stress tensor는 (14)식에 나타난것처럼 압력 p로 되기때문에

$$\rho_m\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}=\rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B}-\mathbf{v}_rp-\rho_m\mathbf{v}_r\phi\quad\cdots\cdots(21)$$

를 얻게된다, 이것은 바로 Newton의 제2법칙의 전자유체적인 표현이다.

다음에 전자에 대한 (15)식에 e/m_e를 곱하여 이온에 대한 (15)식에 e_i/m_i를 곱한것과 합한다. 그때에 간단히 하기위하여 다음과같은 가정을 세운다. 즉 (i) plasma는 거의 등방적이다. 따라서 kinetic stress tensor의 분압을 나타낸다. (ii) plasma는 중성이다. (iii) $m_e/m_i \ll 1$, (iv) 전자와 이온사이의 운동량의 교환은 전류에 비례한다. 따라서 $\int d\mathbf{v} m_e \left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{coll}$ $= -nen\mathbf{j}$ 라고 가정한다.

그러면

$$\frac{m_e}{n_e e^2}\frac{\partial j}{\partial t} = \mathbf{E} + \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{j}}{n_e e}\right)\times\mathbf{B} - \frac{1}{n_e e}v - n\mathbf{j} \quad \cdots\cdots(22)$$

가 얻어진다. 이것은 plasma내의 기전력에 대해서 기술한 것으로 우변 제 2항은 plasma의 거시적인 운동과 자계와의 상호작용으로 의해 생기는 동전력과 plasma내에 전류를 만드는 전자의 병진운동과 자계와의 상호작용에 의해 생기는 Hall기전력과의 합이된다. 제 3항은 kinetic stress tensor의 항으로서 Ψ는 (14)식에서 보는바와같이 열운동에 기인하는것이기때문에 이 항은 열기전력에 해당한다. 제4항은 전자집단과 이온집단의 충돌에 의한 운동량의 변화 P로부터 가정(iv)에 의해 나타난것이다. 정상상태로서 $\mathbf{B}=0$, Δp가 무시되는 경우에는 $\mathbf{E}=\eta\mathbf{j}$라고하는 보통의 오옴의 법칙이 얻어진다. 여기서 보는 바와같이 η는 고유저항으로 된다. (22)식을 일반화된 오옴의법칙이라고 부르는 경우가 있다. (22)식이 plasma를 유체로서 취급을 하는 경우의 기본식이 된다. 예를들면 MHD발전은 (22)식의 우변 제2항의 $\mathbf{V}\times\mathbf{B}$라고하는 기전력을 가지고 발전하는 것이다.

4. Plasma속의 파동과 불안정성

Plasma속에는 여러가지 종류의 파동이 전파하거나 발생한다. 또 이것은 plasma의 불안정성(Instability)에 밀접하게 관련하고있다. 안정성과 불안정성의 구별은 Plasma속의 에너지의 여러가지 형태, 전자 및 이온의 열에너지, ordered motion의 기계적 에너지, 전기에너지, 자기에너지 등 그들중에 어느것이나 두 에너지 사이에서 그 기계적 및 전자적 결합을 통해서 행해지는 에너지 변환이 일방적으로 행해지거나 또는 왕복하고 반복해서 행해지는가에 따라 구별된다. 이와같은 불안정성 내지 파동은 핵융합에 있어서 해를 끼치지만 반대로 파동의 발생이나 plasma내부의 진단등에 이용된다.

일반적으로 Maxwell의 전자방정식과 전하 연속식

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\partial} \\ &\nabla\times\mathbf{H} = \sigma_o\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ &\varepsilon\nabla.\mathbf{E} = \varphi \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla.(\sigma.E) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(23)$$

으로부터 파동방정식이 얻어진다. 즉,

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\nabla\mathbf{E} = -\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \\ &\text{또는 } \nabla^2\mathbf{E} - \nabla\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) = -\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

이다. Plasma속에서는 $\mu\simeq\mu_o$(진공의 도자율), ε는 5월호의 (46)식으로 주어지는 tensor이다. 그런데 (24)식은 일반적으로 다음과같은 세 종류의 형태를 가진 파동을 주게된다. 즉,

(i) Electrostatic wave

E와 $j=\sigma\mathbf{E}$가 다같이 전파방향(K)에 평행인 경우의 공간전하를 restoring force로 하는 종파(縱波)로서 후술하는바와 같이 plasma진동에 관련하고있다. 전자 plasma 진동과 이온 plasma진동으로 나눈다.

(ii) Electromagnetic wave

E와 파의 전파방향 K가 직각인 파로서 보통 일반적으로 우리가 부르는 전파이다.

(iii) Hydromagnetic wave (MHD파)

전자유체방정식(21)에서 나타나는 $\mathbf{j}\times B$를 restoring force로 하는 경 이온이 둘러싼 자력선의 진동이다.

일반적으로 자계속에서의 plasma는 이들 세가지 파가 혼합한 파동이 생긴다. 이와같은 파동방정식의 해는

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o exp\ j(\omega t - \mathbf{K}.\mathbf{r}) = \mathbf{E}_o exp j\left(\omega t - \frac{2\pi\mathbf{r}}{\lambda}\right) \quad \cdots\cdots(25)$$

와 같이 시간 t 및 위치 $\mathbf{r}$의 함수로서 나타난다.

$\omega.\mathbf{K}\left(=\frac{2\pi}{\lambda}\right)$는 각각 각 주파수 및 파수 벡터(전파정수벡터)이다. 이 파의의 위상속도와 군속도는 각각 다음식으로 나타낸다.

$$Vp = \frac{\omega}{|\mathbf{K}|} \quad \cdots\cdots(26)$$

$$Vg = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{K}} \quad \cdots\cdots(27)$$

또 일반적으로 K는 ω의함수로서 $\mathbf{K}=f(\omega)$를 분산식(dispersion relation)이라고한다. 일반적으로 K는 복소수로서 $\mathbf{K}=\beta+j\alpha$로 두면 실수부 β는 위상상수, 허수부 α는 감쇠 또는 증폭정수를 나타낸다.

5. Plasma속의 전자파

앞절의 (24)식에서 $\mathbf{E}\perp\mathbf{K}$, $\varphi=0$ 광속 $C=1/\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}$ 라고 하고 등가유전율도를 대입하면 파동방정식은

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu_o\left(\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_o\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\right) = \mu_o\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{C^2}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - K^2\mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{C^2}\left(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_o}\right)\mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{C^2}\varepsilon\mathbf{E}$$

즉

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{K}^2 = \frac{\omega^2}{C^2}\left(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_o}\right) = \frac{\omega^2}{C^2}\varepsilon \\ &Vp^2 = \left(\frac{\omega}{K}\right)^2 = \frac{C^2}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(28)$$

윗식의 앞절에서 얻은 등가유전율 ε의 값을 대입하면 분산식이 얻어진다.

(i) $B=0$인경 또는 $\mathbf{B}\perp\mathbf{K}$, $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$의 경우,

충돌이 무시되는경우($\omega\gg\nu$)

$$\mathbf{K}=\frac{\omega}{C}\sqrt{1-\frac{\omega_\rho^2}{\omega^2}} \quad\cdots\cdots(29)$$

$$\left(\frac{Vp}{C}\right)^2=\frac{1}{1-\frac{\omega_\rho^2}{\omega^2}} \quad\cdots\cdots(30)$$

로되여 $\omega>\omega_\rho$ 에서는 K는 실수로서 $\varepsilon>0$로되여 전자파는 전파하나 $\omega<\omega_\rho$에서는 K는 허수로되어서 전파는 plasma표면에서 반사하여 내부에 들어가지 못한다. 즉 plasma주파수 ω_ρ는 전자파의 cut off 주파수로 되어서 plasma는 일종의 high pass filter의 역할을 하는 셈이다. (그림 1참조) $\omega<\omega_\rho$의 경우의 penetration

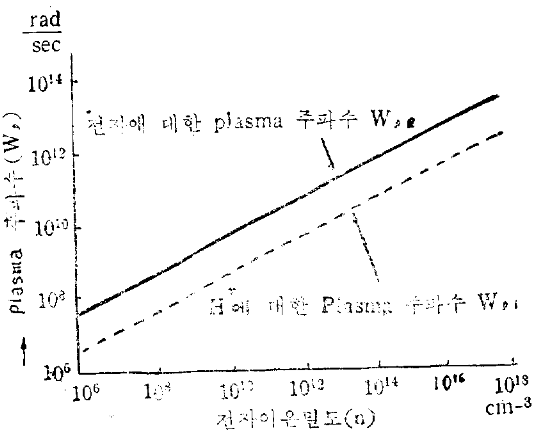


그림 1 전자이온밀도와 plasma 주파수와의 관계

d, 즉 전파가 1/e로되는 거리는

$$d=\frac{C}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_\rho}{\omega}\right)^2-1}} \quad\cdots\cdots(31)$$

로서 주어진다. ν가 ω에 대해서 무시하지못하는 경우는 5월호의 (47)식부터

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{K}&=\frac{\omega}{C}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2\frac{1}{1+j\frac{\nu}{\omega}}}\\&=\beta(\omega_\rho,\nu,\omega)+j\alpha(\omega_\rho,\nu,\omega)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(32)$$

로된다. 따라서 그림·2와같은 micro파 간섭계로서 plasma를 지날때의 전파의 phase shift β 및 attenuation α를 측정하면 ω_ρ 또는 전자밀도와 ν가 결정된다. 이것이 plasma진단이다. (31)식부터 plasma속의 전파의 penetration depthd와 주파수와의 관계를 구하면 그림 3과같이 된다. 또 plasma표면에서의 전파의 반사의 측정으로부터라도 plasma진단은 가능하다. 이와같은

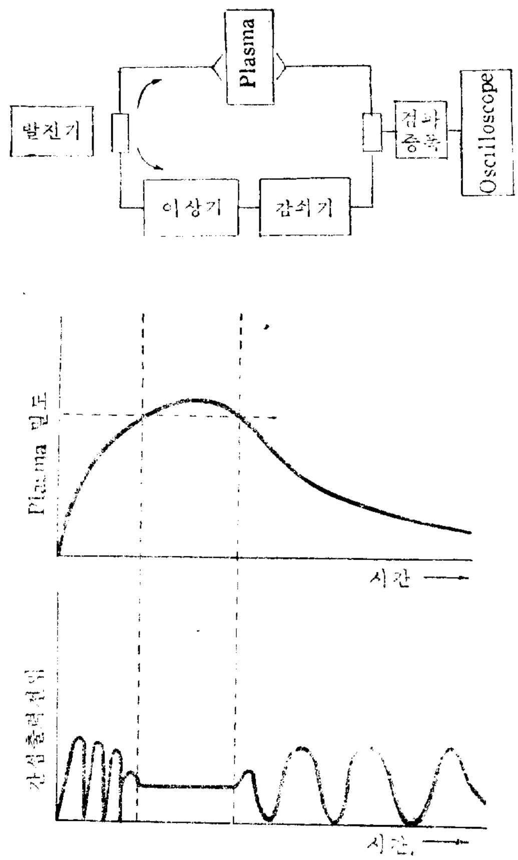


그림 2. Micro파 간섭계

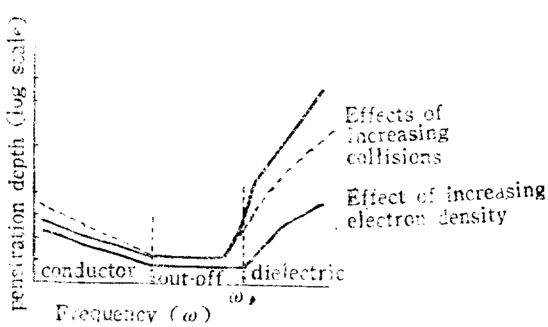


그림 3. 주파수 penetration depth와의 관계

측정은 밀도가 비교적 희박한 기체의 경우(10^{13}/cc) micro파의 영역에서 행하고 비교적 밀도가 높은 고체 plasma에서는 적외선의 영역에서 행해진다.

(ii) $\mathbf{K}//\mathbf{B}$, $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$의 경우. 자계방향에 나가는 원편

파에대해서 충돌이 무시되는경우($\omega \gg \nu$)

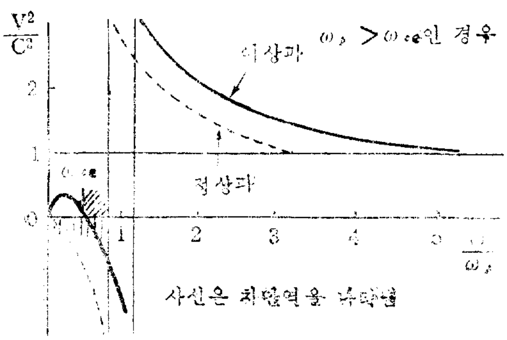
5월호의 (50)식부터

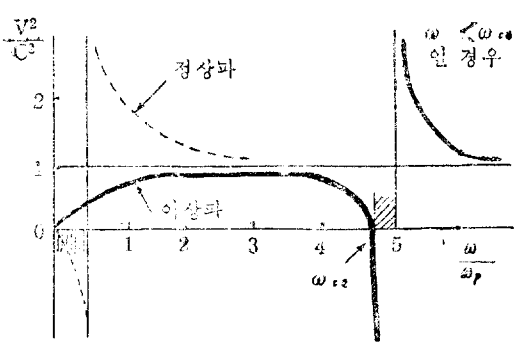
$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_c}{\omega}} \tag{33}$$

단 부호(+)인경우 정상파 (−)인경우 이상파를 나타낸다. 따라서 (28)식은

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{\omega}{C}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{1}{1 \pm \frac{\omega c}{\omega}}} \\ \left(\frac{V}{C}\right)^2 &= \frac{1}{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{1}{1 \pm \frac{\omega c}{\omega}}} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

로된다. $(V/C)^2$ 과 ω/ω_p의 관계를 정상파 및 이상파에 대해서 그리면 그림 4와같이 된다. 그림 4에서 $(V/C)^2<0$의 영역은 K가 허수로 되고 전파가 전파하지않는 차단역이다. 정상파 및 이상파에 대해서 차단역을 나타내면 그림 5와같이 자계의 세기가 강하짐에 따라 차단역이 다같이 좁아져서 $\omega < \omega_p$의 주파수의 파라도 전파하게된다. 이를 Whistier mode라고 한다.





자계 차단역은

이상파에 대해서는 $\frac{\omega c_e + \sqrt{\omega c_e + 4\omega_p^2}}{2} > \omega > \omega_{ce}$

정상파에 대해서는 $\frac{-\omega c_e + \sqrt{\omega c_e^2 + 4\omega_p^2}}{2}\omega > 0$

그림 4. $(V/C)^2$과 ω/ω_p와의 관계

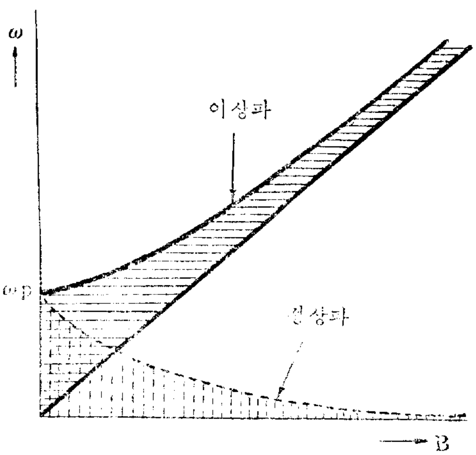


그림 5. 정상파와 이상파의 차단역

가 더욱 더 강한경우 이상파에 대해 $0<\left(\frac{V_p}{C}\right)<1$ 의 영역이 있어서 전파의 속도가 광속 보다 느리게 되니까 V_p보다 빠른 전자비임을 작용시킴으로서 Cerenkov 복사가 얻어진다. 또 $\omega_c > \omega_p$인 경우는 $\omega = \omega_c$로서 이상파의 흡수전력이 최대로 되고 소위 cyclotron공명을 나타나게된다. 고체에서는 cyclotron 공명조건부터 ($\omega = \omega_c$) 전자의 유효질량이 구해지며 그외에 왼쪽돌림의 파와 오른쪽돌림의 파의 K 또는 위상상수가 상위한것을 이용하여 직선편파를 plasma에 통과시켰을 때의 편파면의 회전 즉 Faraday효과를 측정하고 그것부터 기체 및 고체 plasma의 기초량(전자밀도, 전자 유효질량, 충돌주파수등)이 구해진다. 가령 충돌을 무시할수있는경우에 ω_p/ω 및 $\omega_c \ll 1$일때는 plasma의

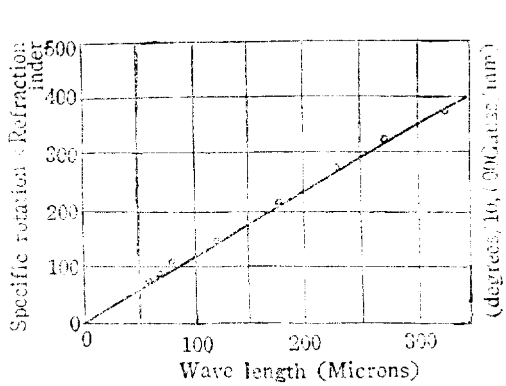


그림 6. 정상파와 이상파의 차단역

단위길이에 대해서 그 편파면의 회전각 θ는 (34)식의 $\mathbf{K}_+ - \mathbf{K}_-$부터 구해져서

$$\theta = \frac{\omega_c}{2_c}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = \frac{eB}{2cm}\left(\frac{ne^2}{m\varepsilon_o}\right)\frac{1}{\omega^2} \quad \cdots\cdots(35)$$

로된다. 그림 6은 n형 I_nS_b에 (θ_x굴절율)과 적외선의 파장 $\lambda^2 = \left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^2$와의 관계를 구한 것으로 이 slope 와 (35)식부터 I_nS_b속의 유효질량으로서 $m = 0.028$m 가 얻어진다.

(iii) K⊥B, E⊥B의경우

이경우는 전파의 양상이 복잡하여 전자파와 electrostatic wave가 교차한 hybrid wave로 되고 phase velocity는

$$\left(\frac{V_p}{C}\right)^2 = \frac{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right\}^2-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)} \quad \cdots(36)$$

로서 주어지고 $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$가 공진조건으로된다.

이상으로서 무한히 균일한 plasma에 대해서 기술해 왔으나 유한의 plasma에서는 그 계면에 표면파가 존재하고있어서 그 취급이 복잡하게된다.

(iv) 전자유체파(Alfven wave)

이때까지 취급한것은 이온의 운동을 무시했으나 주파수 ω가 낮아지면 이온과 전자로부터 구성되는 plasma 전체의 속도 $\mathbf{V}$ 따라서 $\mathbf{V}\times\mathbf{B}$의 기전력을 무시못하게 된다. 지금 Z방향의 자장 B_z의 방향에 $\mathbf{K}$를 가지고 전장이 $\mathbf{X}$방향에 진동하는 파를 생각하면 전자유체 방정식 (21)식 및 (22식)은 압력과 중력을 무시해서

$$\varphi m \frac{\partial V_y}{\partial t} = -j_x B_z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$\frac{m_e}{n_e e^2}\frac{\partial j_x}{\partial t} = E_x + V_y B_z - \frac{1}{en_e} j_y B_z \quad \cdots\cdots\cdots(38)$$

로되며 (37)식을 시간미분해서 (38)식에 대입하면

$$\frac{m_e}{n e_e^2}\frac{\partial^2 j_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{B_z^2}{\varphi_m} j_x - \frac{B_z}{en_e}\frac{\partial j_y}{\partial t} \quad (39)$$

로 되고

$\omega_p \gg \omega$ $\omega_c \gg \omega$인 경우는 윗식은

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{B_z^2}{\varphi_m} j_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

로된다. 이것을 전파의 이동방정식에 대입해서

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E}{C\partial t^2} + \mu_o \frac{\partial j_x}{\partial t} = \left(1+\frac{\rho_m}{\varepsilon_o B_z^2}\right)$$
$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

로된다. 이것부터 이 종파(縱波)의 진행속도는

$$\left(\frac{V_p}{C}\right)^2 \frac{1}{\left(1+\frac{\varphi_m}{\varepsilon_o B_z^2}\right)} - \frac{B_z^2 \varepsilon_o}{\varphi_m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

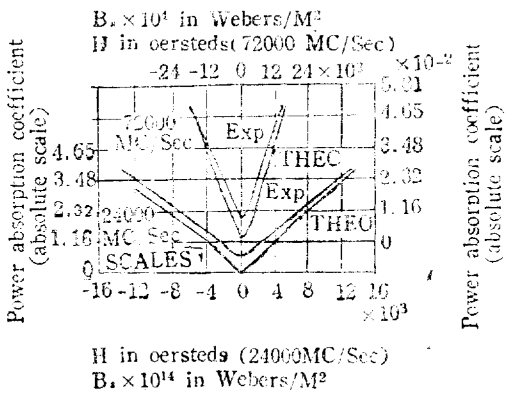
로된다. 횡파(橫波)(E⊥B)에대해서 꼭 같은 관계가 얻어지며 이들을 Alfven wave라고한다. 이 횡파는 cyclotron운동을 하는 이온이 둘러쌓기때문에 밀도 φ_m와 자력선이 Maxwell의 의력(歪力) B_z^2/μ_o로서 끄어당겼을때의 현진동(弦振動←변위ξ)이라고 생각할수가 있다. 이는 아랫 (43)식과 (41)식을 비교하면 알수가 있다.

$$\varphi_m \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{B_z^2}{\mu_o}\xi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

진행방향이 자계방향과 평행이 아닌 경우 단성적인 밀도의파동(음파)와 Alfven wave의 hybrid wave가 일어난다. 기체속에서 Alfven wave전파의 실험도 행해지나 이러한 경우, 보통의 자장에서는 이온의 cyclotron주파수가 낮고 사용되는 전파의 파장이 길기때문에 강자장이나 plasma의크기 및 충돌주파수등의 관련에서 여러가지 곤란이 생긴다. 고체에서는 전자—이- plasma에 대신하여 전자—정공(正孔) plasma계 이기 때문에 cyclotron주파수가 크고 기체에 비하여 훨씬 짧은 파장으로서 실험을 할수있는 ($B_z = 5 \sim 10KG$에서 ω는 micro파역)이점이 있다. 이를 Helican진동이라고 부르는경우도다. Buchsbaum등은 micro파 공동속에 B_z를 주었을때 그 반사율 R 및 흡수계수 A가 Alfven wave의 속도를 V_a라고했을때

$$A = 1 - R = 1 - \left(\frac{C-V_a}{C+V_a}\right)^2 \simeq 4\frac{V_a}{C} \quad \cdots\cdots\cdots(44)$$

로되는것을 이용하여 그림 7처럼 B_z와 A와의 관계를 측정해서 (44)식을 이용한 계산치와 잘 일치하는것을 확인했다.



H in Oersteds(24, 000 MC/S)

$B_z \times 10^4$ in Webers/M²

그림 7 B_z와 A와의 관계