傾斜法에 의한 最適制御

Optimal Control by the Gradient Method

논 문
21～3～5

양 흥 석* · 황 희 융**
(Heung Suk Yang, Hee Young Hwang)

Abstract

The application of Pontryagin's Maximum Principle to the optimal control eventually leads to the problem of solving the two point boundary value problem. Most of problems have been related to their own special factors, therefore it is very hard to recommend the best method of deriving their optimal solution among various methods, such as iterative Runge Kutta, analog computer, gradient method, finite difference and successive approximation by piece-wise linearization. The gradient method has been applied to the optimal control of two point boundary value problem in the power systems. The most important thing is to set up some objective function of which the initial value is the function of terminal point. The next procedure is to find out any global minimum value from the objective function which is approaching the zero by means of gradient projection.

The algorithm required for this approach in the relevant differential equations by use of the Runge Kutta Method for the computation has been established. The usefulness of this approrch is also verified by solving some examples in the paper.

1. 緖 論

Pontryagin의 最大原理를 最適制御에 適用하게 되면 最終的으로 문제시되는 것은 二點境界値問題를 어떻게 푸느냐 하는 문제로 歸着된다. 이 解決方法으로 反復形 Runge Kutta 法[1], 아나로그計算機에 依한 求解法[2], 傾斜法, 差分法(Method of Finite Difference) 및 線形化 逐次近似法 (successive approximation by piece-wise linearization) 等이 있지만 어느 方法이 가장 適當한가 하는 것은 問題에 따라서 여러가지 因子가 關係하고 있으므로 일괄적으로 말하기는 어렵다. 本 論文은 電力系統 最適制御에 最大原理를 適用할때 나타나는 二點境界値問題의 特異性에 비추어 在來의 隨伴方程式을 導入하지 않고 디지탈 電子計算機의 利用과 Runge Kutta의 微方解法을 살려 最急傾斜法(Gradient Method)[3]를 導入하여 二點境界値問題 解法에 의한 算法을 導出하고 이 方法의 效用性을 實證하기 위하여 이 方法으로 例題를 풀었다.

* 정회원 : 서울대학교 공과대학 전기공학과교수(공학박사)
** 〃 〃 공업교육학과 전임강사

2. 本 論

2-1. 電力系統 最適化問題에 있어서 Hamiltonian 式으로 부터 誘導되는 二點境界値問題의 特異性.

最大原理를 應用할 때 Hamiltonian 式으로 부터 誘導되는 微分方程式系를 生覺하면 一般으로 다음과 같이 쓰인다.

$$\frac{dx}{dt}=G(x,\ z) \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dt}=F(x,\ z) \tag{2}$$

미리 주어진 境界條件은 식 (1)의 初期値와 式 (2)의 最終値로서 다음 式들로 表示되는 것이 一般이다.

$$x(t_o)=\alpha \tag{3}$$

$$z(T)=C \tag{4}$$

但 t_o는 初期時間. T는 終端時間이다. 그러나 電力系統의 最大化問題에서는 $x(t_o)$의 몇 개는 終端値와의 關係式으로 주어지거나 x 變數들 中 몇개가 初期値와 終端値가 同時에 주어지고 대신 補助變數 z 變數의 初期値 및 終端値가 주어지지 않는 것이 大部分이다. 即 이것을 式으로 表示하면 n 個의 x 値中

(가) i 개는,

$x_j(t_o)=\alpha_j$, $x_j(T)=\beta_j$, $j=1, 2,$, i 로 固定되는 대신 i 개의 補助變數는 $z(t_o)$: 未定, $z(T)$: 未定인 경우와

(나) j 개의 補助變數가,

$z_k(t_o)$: 未定, $z_k(T)=\gamma_k$, $k=i+1$, $i+2, \cdots$, $i+j$ 로 固定된 경우,

(다) m 개는

$x_p(T)=f_p[x_p(t_o)]$, $p=c+1$, $c+2, \cdots$, $c+m$ 인 $p \fallingdotseq j \fallingdotseq k$ 경우들의 組合으로 되어 있다.

2-2. 最急傾斜法(Gradient Method)에 依한 二點境界値問題解法

2-1. 에서 (4)式 $z(t_o)$의 값을 알기만 하면 Runge Kutta 法을 쓰면 풀릴 것이나 (가) (나) (다)와 같은경우로 되어 그대로는 Runge Kutta 法으로 풀 수 없다. 未定의 初期値를 假定했을 때 最終値와 誤差自乘의 和를 目的函數로 놓고 이를 零에 接近시키는 初期値를 求하면 될 것이다. 이때 이 初期値를 求하는 方法으로서 傾斜法을 利用하였다.

(1) 目的函數의 設定

2-1 (가)의 경우는 i 개의 x 에 對應하는 i 개의 補助變數의 初期値를 z_{jo} 로, 2-1(나)의 경우는 j 개의 $z_k(t)$ 의 初期値를 z_{ko} 로, 2-1(다)의 경우는 m 개의 $x_m(t)$의 初期値를 x_{mo} 로 모두 假定하여 Runge Kutta 法으로 微方問題를 푼다. 計算結果 (가)의 경우는 最終値 $x_{jc}(T)$, (나)의 경우는 $z_{kc}(T)$, (다)의 경우는 $x_{pc}(T)$의 값들 $[i+j+m)$개]이 算出될 것이다. 그러면 目的函數 f 는

$$f=\sum_{j=1}^{i}(x_{jc}(T)-\beta_j)^2+\sum_{k=i+1}^{i+j}(z_{kc}(T)-\gamma_k)^2$$

$$+\sum_{p=c+1}^{c+m}(x_{pc}(T)-f_p[x_p(t_o)])^2$$

가 된다.

(2) 傾斜 計算

앞서 論한 (1)의 初期値 設定이나 또는 誤差 自乘의 式을 보면, 形式이 같기 때문에 本 論文의 說明簡略化를 爲해 假定初期値를 x_{01}, x_{02}, $\cdots$, x_{0l}, $l(=i+j+m)$ 개, 區間 T 초 後에 x 의 計算된 最終値를 x_{F1}, x_{F2}, $\cdots$ x_{Fl}, 이것들 各各의 實際 終端値를 x_{T1}, x_{T2}, $\cdots$ x_{Tl}, 또 x 의 微小變位를 Δx 라 할때,

$$f=\sum_{i=1}^{l}(x_{Fi}-x_{Ti})^2 \tag{7}$$

이고 初期値中 어떤 한 값 x_{0i} 만 $x_{0i}+\Delta x$ 를 代入하고 나머지 그대로 代入하여 Runge Kutta 法으로 式 (1), (2)의 微分方程式들을 풀때 x_{Fi}' 의 값들이 x_{Fi}'로 된다고 가정하면 이때 f 는 f_i 卽

$$f_i=\sum_{i=1}^{l}(x_{Fi}'-x_{Ti})^2 \tag{8}$$

가 되고 이 初期値點에서의 偏微方 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 는

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{f_i-f}{\Delta x} \tag{9}$$

가 될것이다. 같은 方法으로 모두 求하면, 이 初期點에서의 傾斜는

$$\nabla f=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial f}{\partial x_i}i_i \tag{10}$$

가 된다.

(3) 퍼래미터 較正의 調整

最小値를 速히 求하기 爲해서는 傾斜의 負方向으로 初期값이 移動해야 되기 때문에 變數 x_o의 初期値 較正 조정량으로 Δx_o, 퍼래미터를 k 라 하면, 【(그림 1 참조) 일반으로 n次元에서도 성립된다.】 $\Delta x_o=-k\cdot\nabla f$ 가 되고 Δx_o 의 變化로 인하여 目的函數 f 의 實變化量을 Δf_A, 예상變化量을 Δf_P, 初期値 $x_o+\Delta x_o$ 를 代入時 f 의 값을 T, 初期値 x_o 를 代入時 $f(x_o)=f_o$ 라면, $\Delta f_A=f_o-T$, $\Delta f_P=-k\|\nabla f\|^2$ 가 各各 된다. 퍼래미터 k 를 조정하기 위하여 $E=\left|\frac{\Delta f_P-\Delta f_A}{\Delta f_P}\right|$ 라 할때 E 의 값이 $0.2<E<0.5$ 일 때 k 의 값을 그대로 쓰고 $E\geq 0.5$ 일 때 k 를 $0.8k$ 로, $E\leq 0.2$ 일때 $2\cdot k$ 로 k 를 自動的으로 조정하여 Δx 를 定하도록 k 를 조정한다.

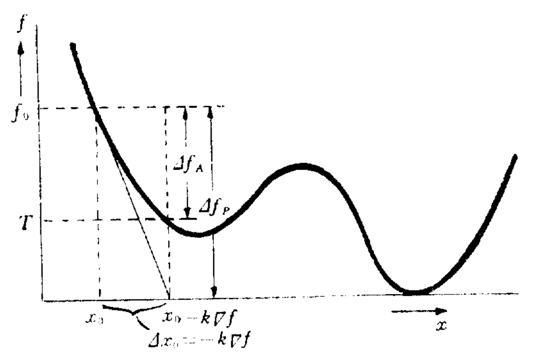

그림 1. 초기치 교정
Fig. 1. Correction of the initial value

(4) 最初의 k 값 設定

最初 k 값 設定如何에 따라 計算機 되풀이 回數에 영향이 많다. 그러므로 本 論文에서는 最初의 k 設定을

$$k|\nabla f|_{f=f_o}=\frac{f_o}{|\nabla f|_{f=f_o}}$$

되도록 卽

$$k=\frac{f_o}{\|\nabla f\|^2_{f=f_o}}$$

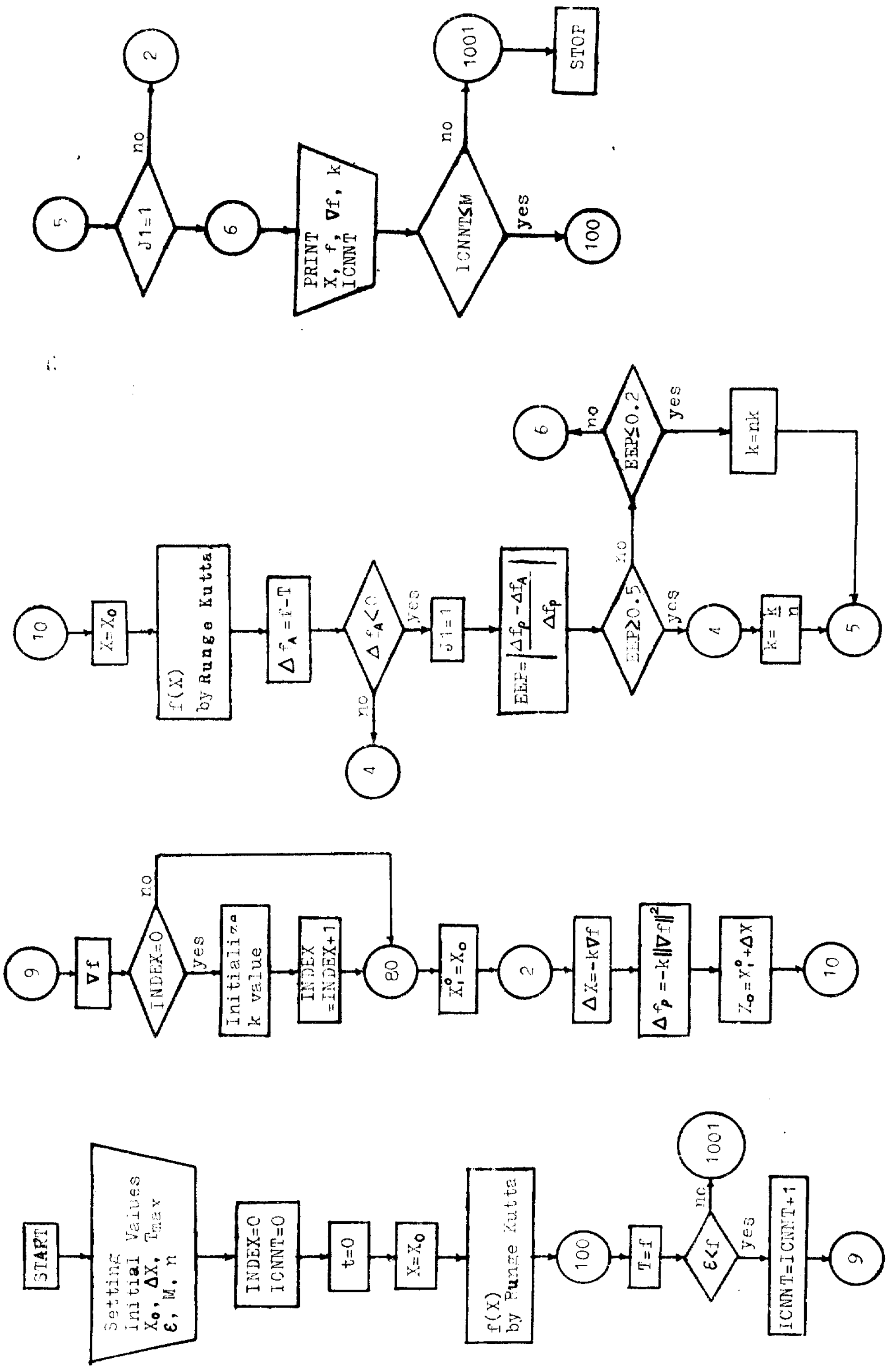

그림 2. 프로우 도표
Fig. 2. Flow chart

되게 값을 取했다.

(5) **最小**(Global Minimum)

Δf_A가 負値가 될때만 初期값을 移動시키고 零値나 正値로 되면, k값을 (3)과 같이 감소시키도록 하여 $|\nabla f|^2$이 任意의 어떤 微小正數 ε 보다 적을 때 計算을 정지시키면 極小(Local minimum)를 求할 수 있다. 傾斜値는 零에 가까워 졌을 때라도 이때 目的函數 f를 點檢하여 이것 亦是 零에 接近하지 않으면, x의 領域의 象限을 移動하여 f의 값이 零에 接近하는 値 ε_f 보다 적을 때의 初期値가 求하는 二點境界値問題의 必要充分値가 된다.

(6) **電子計算機 프로우 圖表**

電子計算을 하기 위한 算法의 프로우 圖表는 그림 2와 같다.

【例　　題】

系統의 狀態方程式이

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt}=u$$

$$\frac{dx_3}{dt}=1$$

로 表示되고 初期條件이 $x_1(0)=2,\ x_2(0)=0,\ x_3(0)=0$ 目的函數 $S=\int_0^T[u^2+3]dt$를 最小로 하는 $u(t)$를 求하려면, Pontryagin's Maximum Principle을 써서 이 問題는 簡單해서 解析的으로 값이 求해진다. $u(t)$와 軌道 $x_1(t),\ x_2(t)$는 各各

$$u(t)=\frac{4}{\sqrt{6}}t-1$$

$$x_1(t)=\frac{2}{3\sqrt{6}}(t)^3-\frac{1}{2}(t)^2+2$$

$$x_2(t)=\frac{2}{\sqrt{6}}(t)^2-t$$

로 求해진다.

本 論文의 妥當性을 보이기 爲해 解析的으로 풀린 結果를 써서 點檢해 보기로 한다. 이 例中 Pontryagin의 最大原理를 適用한 後에 풀어야 할 微分方程式을 t의 最終値를 1秒로 할때 初期値와 終端値를 Runge Kutta 法으로 풀면 微分方程式들中 一部는 다음과 같다.

$$\dot{x}_1=x_2,\qquad x_1(0)=2,\qquad x_1(1)=1.77216$$

$$\dot{x}_2=-\frac{x_5}{2},\qquad x_2(0)=0,\qquad x_2(1)=-0.18350$$

$$\dot{x}_3=1,\qquad x_3(0),=0,\qquad x_3(1)=1$$

$$\dot{x}_4=\left(-\frac{x_5}{2}\right)^2+3,\qquad x_4(0)=0,\qquad x_4(1)=3.25588$$

$$\dot{x}_5=-\frac{8}{\sqrt{6}},\qquad x_5(0)=2,\qquad x_5(1)=-1.26598$$

이다. 이때 $x_4,\ x_5$의 初期値는 未定이고 終端値를 旣知, 다른 $x_1,\ x_2,\ x_3$들은 初期値가 旣知이고 終端値未知의 문제로 놓고 푼다. 即

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\qquad x_1(0)=2$$

$$\dot{x}_2(t)=-\frac{x_5(t)}{2},\qquad x_2(0)=0$$

$$\dot{x}_3(t)=1,\qquad x_3(0)=0$$

$$\dot{x}_4(t)=\left(\frac{-x_5(t)}{2}\right)^2+3,\quad x_4(1)=3.25588$$

$$\dot{x}_5(t)=\frac{-8}{\sqrt{6}},\qquad x_5(1)=-1.2658$$

의 문제에서 本 論文의 方法을 適用하여 初期値를 찾았다.

Case 1. 초기치 가정 $x_4(0)=10,\ x_5(0)=-8$
교정회수 14번

Case 2. 초기치 가정 $x_4(0)=2,\ x_5(0)=0$
교정회수 9번

Case 3. 초기치 가정 $x_4(0)=-10,\ x_5(0)=-11.7$
교정회수 26번

Case 4. 초기치 가정 $x_4(0)=-20,\ x_5(0)=15$
교정회수 24번

Case 5. 초기치 가정 $x_4(0)=-20,\ x_5(0)=-18$
교정회수 40번

위의 교정후에 $x_4(0)=0,\ x_5(0)=2$의 原値에 1% 以内의 誤差로 接近하였음.

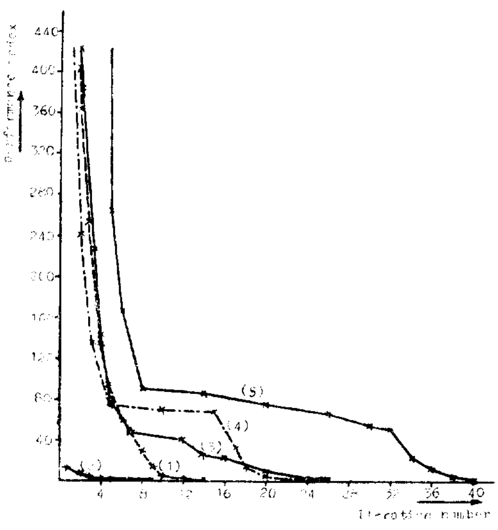

그림 3. 최소치 수렴의 추이*
Fig. 3. Convergence tendency to the global minimum

3. 檢　　討

(1) 目的函數 f를 定할때 各 因子間에 Weighting factor를 넣으므로써 더욱 빠른 時間内에 初期値를 求

* 그림 3은 目的函數와 較正回數 와의 관계를 나타낸 그림이다.

할 수 있을 것이다.

(2) 파래미터 k의 조정을 0.8 및 2倍로 하여 문제를 풀었으나, 傾斜의 크기에 따라 조정하여 이보다도 적은 회수 내에 오게 할수도 있을 것이다.

(3) f를 定義할때 自乘을 取했으나 4乘, 또 一般的으로 $2n$ 乘해주는 경우도 研究해볼 問題이다.

(4) 本 論文에서는 最初 k의 값을 任意로 定하였으나 이 값의 決定을 위한 方法도 더 研究해볼 문제이다.

(5) 二次微分值까지 考慮해서 더 正確한 變位 Δx를 取하는 問題도 研究할 問題이다.

4. 結　　論

最大原理 適用에 언제나 問題로되는 二點境界值 문제의 解決方法으로 本論에서와 같이 目的函數 f를 設定하여 이를 零으로 Gradient Method로 接近시켜 빨리 正確한 初期值를 求할수 있고, 이 값이 極小值가 아니고 最小值를 電子計算機를 써서 求할 수 있다. 特히 電力系統問題의 特異性에 비추어 初期值가 終端點의 函數로 될 때 및 微方式中의 하나가 初期值와 終端值가 定해지고 나른 한 式은 그것들 모두 未定일때도 本 論文의 方式이 그대로 適用된다.

參 考 文 獻

(1) Fan L. T., The Continuous Maximum Principle, John Wiley and Sons, Apl. 1966.

(2) Lee, E. S., Optimization by Pontryagin's Maximum Principle on the Analog Computer, A. I. ch. E. J., 10, 3. 309/315, 1964.

(3) Favreau, R. R., and R. Franks, Random Optimization by Analog Techniques, Second International Conference for Analog Computation, Strasbourg, Sept., 1968.

(4) Virgil W. Eveleigh, Adaptive Control and Optimization Techniques, Chapter 5, McGraw-Hill, 1967.