

N乘 非線形 裝置의 出力 SN比 및 高調波 發生

Output Signal to Noise Ratio and Harmonic Generation of
Nth Power Law Nonlinear Devices.

金 在 功* · 高 丙 俊**

(Kim, Jae Kong) (Koh, Byung Joon)

要 約

正弦 信號 및 zero 平均 定常 正規 雜音의 狹帶域波 信號를 갖는 n次 半波 zero 記憶型 非線形 裝置의 出力 SN比 및 m次 高調波 發生의 關係를 밝혔다.

最大 出力 SN比는 小 信號 入力에서 $m=n=2$ 이었으며 大 信號 入力에선 恒時 $n=2$ 이었다.

Abstract

The relation between output SNR and mth harmonic generation is determined for nonlinear system of zero memory type, half wave and the nth power law devices with narrow band form of the unmodulated sinusoidal wave plus zero mean and stationary gaussian noise input.

It is found that the optimum generation condition for harmonic component at a small input of SNR is m and n equal 2, while for large input SNR is always n equals 2.

I. 序 論

非線形 要素의 入力이 原來의 信號와 雜音의 混成일 때 이에 關聯된 여러 問題中, 其 하나는 非線形 裝置 出力에서의 信號對 雜音比의 問題이다. 그림 1과 같은 非線形 裝置의 入力 및 出力을 各各 $x(t)$ 및 $v(t)$ 라 하면 $x(t)$ 및 $v(t)$ 間에 成立하는 關係式

$$v(t) = f[x(t)] \quad (1)$$

은 同一 瞬間에 있어서 非線形 裝置의 入出力 傳達 特性(transfer characteristic)을 表示한다.^{1,2)} 重

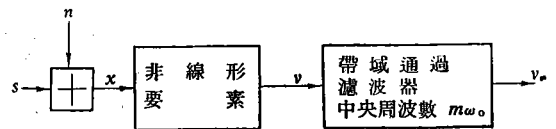


그림 1. 高調波 發生裝置

要한 非線形 裝置로는 出力의 傳達特性이 入力の 幕으로 表示되는 그림 2와 같은 幕乘(power law)型 zero 記憶 非線形 裝置이며 이 非線形 裝置는 任意의 正의 整數 n의 여러 값과 x의 값에 따라 그 名稱을 各各 달리 하는데 例컨데 그림 2에서 1~2像限 $n=2$ 일때는 偶函數 對稱 全波 自乘 裝置이고 1像限 $n=2$ 의 경우는 半波 自乘 裝置가 된다. 出力은 非線形性 때문에 여러 項의 高調波를 품게 될것이고 어떤 m次數 高調波의 크기는 n의 값과 不可分의 關係일 것인바 本 報告는

* 正會員 東國大學校 電子工學科(Dept. of Electronics Eng., Dong Guk Univ.)

** 正會員 原子力研究所 電子工學研究室 (Electronics Div., AERI)

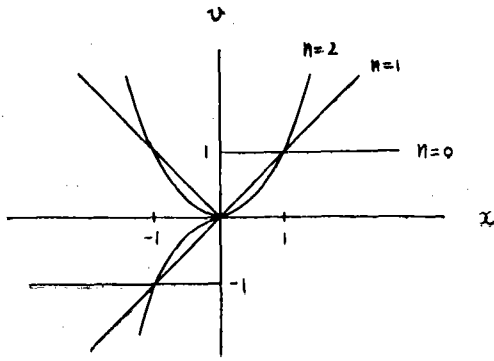


그림 2. n乘 傳達特性

非線形 裝置의 入力이 一定 振幅 正弦 信號와 zero 平均 定常 正規 雜音의 合인 狹帶域波 일때 半波 n乘 非線形 裝置의 m次 高調波 出力 SN比 計算에서 信號 振幅 A 및 標準偏差 σ 間의 關係가 各各이 $\sigma \gg A$ 및 $\sigma \ll A$ 일 때 m次 高調波 最大 發生과 m 및 n 과의 關係를 밝혔다.

II. m次 高調波

非線形 裝置의 入力 $x(t)$ 가 正弦 信號 $s(t)$ 와 確率 函數로 記述되는 雜音 $n(t)$ 와의 合이라면

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) + n(t) \\ &= A(t)\cos[\omega_0 t + \theta_1(t)] + \text{狹帶域 正規 雜音} \\ &= r(t)\cos[\omega_0 t + \lambda(t)] \end{aligned} \quad (2)$$

으로 되고 $v(x)$ 는 偶函數로써 $\theta = \omega_0 t + \lambda$ 의 週期 函數로 될 것이다. 이를 Fourier 級數로 表示하면

$$\begin{aligned} v(r\cos\theta) &= \frac{1}{2}v_0 + \sum_{m=1}^{\infty} v_m \cos m\theta \\ v_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(r\cos\theta) \cdot \cos m\theta d\theta \end{aligned} \quad (3)$$

인데 $\frac{1}{2}v_0$ 는 非線形 出力의 可聽 可視의 低周波 成分이고 $x_1 \cos\theta$ 는 入力 周波數 成分을 表示하며 其外 項은 非線形性에 依해 發生된 高調波가 된다^{3,4}. 出力이 x^n ($x > 0$)으로 表示될 n乘 非線形 裝置를 考慮한다면 (2)式에서

$$v = r^n \cos^n \theta, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (4)$$

로 된다. 그런데 半波 n乘 非線形 裝置에는 中央 周波數 $m\omega_0$ 인 帶域 通過 濾波器가 連結될 것이므로 濾波器의 出力으로는 $v_m(r)\cos(m\omega_0 t + m\lambda)$ 項만이 나타나게 될 것이며 따라서 m次 項만을 考慮한다면 m次 項 高調波 出力의 크기 $v_m(r)$ 는

$$\begin{aligned} v_m(r) &= r^n C_m(n) \\ C_m(n) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^n \theta \cdot \cos m\theta d\theta \end{aligned} \quad (5)$$

로 되고 m次 高調波 出力은

$$\begin{aligned} &v_m(r)\cos[m\omega_0 t + m\lambda] \\ &= r^n C_m(n) \cos[(m\omega_0 t + m\theta_1) + m(\lambda - \theta_1)] \\ &= C_m(n) r^n \cos m(\lambda - \theta_1) \cos(m\omega_0 t + m\theta_1) \\ &\quad - C_m(n) r^n \sin m(\lambda - \theta_1) \sin(m\omega_0 t + m\theta_1) \end{aligned} \quad (6)$$

로 된다³.

III. 出力 SN比

m次 出力 SN比 R_m 는

$$R_m = \left(\frac{\text{出力 信號 電力}}{\text{出力 雜音 電力}} \right)_m \quad (7)$$

으로 定義되는 바^{7,8} 入力 信號의 振幅 A와 位相 θ_1 에 대한 m次 出力 $v_m(x)$ 의 條件付 期待值

$$E\{v_m|A, \theta_1\} \quad (8)$$

를 求하면

關係式

$$\begin{aligned} E\{r^n \cos m\lambda\} &= \left(\frac{m+n}{2}\right)! A^m \left(\frac{1}{m!}\right) (\sqrt{2}\sigma)^{n-m} \\ &{}_1F_1\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{[附錄]} \\ (9-1) \end{matrix}$$

$$E\{r^n \sin m\lambda\} = 0 \quad \text{[附錄]} \quad (9-2)$$

에 依해 (6)式의 條件付 期待值는

$$\begin{aligned} &E\{v_m(r)\cos m\theta|A, \theta_1\} \\ &= C_m(n) E\{r^n \cos m(\lambda - \theta_1)\} \cos(m\omega_0 t + m\theta_1) \\ &\quad - C_m(n) E\{r^n \sin m(\lambda - \theta_1)\} \cdot \sin(m\omega_0 t + m\theta_1) \\ &= C_m(n) \left(\frac{m+n}{2}\right)! \left(\frac{1}{m!}\right) (\sqrt{2}\sigma)^{n-m} \\ &\quad A^m {}_1F_1\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \\ &\quad \cos(m\omega_0 t + m\theta_1) \end{aligned} \quad (10)$$

로 된다. 여기 ${}_1F_1[\quad]$ 은 合流性 超幾何 函數 (confluent hypergeometric function)⁶

$${}_1F_1[a; b; x] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(b)_m m!} \quad (11)$$

을 表示하고 $\frac{A^2}{2\sigma^2}$ 은 入力の 信號對 雜音比를 表示한다. m 次 高調波 出力 信號 電力은 m 次 高調波 出力 信號 條件付 期待值의 平均自乘이므로 (10)式의 平均自乘은

$$\begin{aligned}
 & E\{[E\{v_m(r)\cos m\theta|A, \theta_1\}]^2\} \\
 &= C_m^2(n) \left(\frac{\binom{m+n}{2}}{m!} \right)^2 2^{n-m} \sigma^{2(n-m)} \\
 & E\left\{A^{2m} {}_1F_1^2\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right\} \cdot \\
 & E\{\cos^2(m\omega_0 t + m\theta_1)\} \\
 &= 2^{n-m-1} C_m^2(n) \left(\frac{\binom{m+n}{2}}{m!} \right)^2 \sigma^{2(n-m)} E\left\{A^{2m} \right. \\
 & \left. {}_1F_1\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right\} \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_o &= \frac{E\{[E\{v_m|A, \theta_1\}]^2\}}{E\{v_m^2\} - E\{[E\{v_m|A, \theta_1\}]^2\}} \\
 &= \frac{2^{n-m-1} C_m^2(n) \left(\frac{\binom{m+n}{2}}{m!} \right)^2 \sigma^{2(n-m)} E\left\{A^{2m} {}_1F_1^2\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right\}}{2^{n-1} C_m^2(n) (n!) \sigma^{2n} E\left\{{}_1F_1\left[-n; 1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right\} - 2^{n-m-1} C_m^2(n) \left(\frac{\binom{m+n}{2}}{m!} \right)^2 \sigma^{2(n-m)} E\left\{A^{2m} {}_1F_1^2\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right\}} \quad (14)
 \end{aligned}$$

分子 및 分母를 다 함께 $2^{n-1} C_m^2(n) \sigma^{2n} \left(\frac{1}{m!}\right)^2$ 으로 除하면

$$R_o = \frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)!^2 E\left\{\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^m {}_1F_1^2\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right\}}{(m!)^2 n! E\left\{{}_1F_1\left[-n; 1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right\} - \left[\left(\frac{m+n}{2}\right)!\right]^2 E\left\{\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^m {}_1F_1^2\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right\}} \quad (15)$$

로 되고 一定 振幅의 平均은 不必要 하므로

$$R_o = \frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)!^2 \left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^m {}_1F_1^2\left[\left(\frac{m-n}{2}\right); m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]}{(m!)^2 n! {}_1F_1\left[-n; 1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right] - \left[\left(\frac{m+n}{2}\right)!\right]^2 \left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^m {}_1F_1^2\left[\left(\frac{m-n}{2}\right); m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (16)$$

로 된다.

(i) $\sigma \gg A$ 일 때 :

(11)式에 依해

$$\begin{aligned}
 & {}_1F_1\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \\
 &= 1 - \frac{m-n}{2(m+1)} \left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{(m-n)(m-n+2)}{4(m+1)(m+2)} \frac{\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^2}{2!} \\
 & \quad - \frac{(m-n)(m-n+2)(m-n+4)}{8(m+1)(m+2)(m+3)} \frac{\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^3}{3!} + \dots \quad (17)
 \end{aligned}$$

로 되고 이는 m 次 高調波 出力 信號 電力이 되며 m 次 出力 雜音은 m 次 總出力과 m 次 出力의 條件付 期待值와의 差, 即 $v - E\{v|A, \theta_1\}$ 이어서 m 次 出力 雜音 電力은 $E\{[v_m - E\{v_m|A, \theta_1\}]^2\}$ 로 되고 出力 信號와 雜音은 直交이므로 簡單히 總出力 電力과 出力 信號 電力의 差, $E\{v_m^2\} - E\{[E\{v_m|A, \theta_1\}]^2\}$ 로 된다. 이제 m 次 總出力 電力은 (6)式에 依해

$$\begin{aligned}
 E\{v_m^2\} &= E\{C_m^2(n) r^{2n} \cos^2(m\omega_0 t + m\lambda)\} \\
 &= \frac{1}{2} C_m^2(n) E\{\gamma^{2n}\} \quad [\text{附錄}] \\
 &= \frac{1}{2} C_m^2(n) \left(\frac{n}{2}\right)! (\sqrt{2}\sigma)^n \cdot \\
 & \quad \cdot E\left\{{}_1F_1\left[-\frac{n}{2}; 1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

인데 (12)式 및 (13)式을 (7)式에 代入하고

(i)의 條件이므로 2項 以下 無視되어

$${}_1F_1\left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \cong 1 - \frac{m-n}{2(m+1)}\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \quad (18)$$

로 되고 (18)式에서 $m=0$, $n=2n$ 으로 놓은

$${}_1F_1\left[-n; 1; -\frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \cong 1+n\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \quad (19)$$

(19)式을 (18)式과 함께 (16)式에 代入하면

$$R_o = \frac{\left[\left(\frac{m+n}{2}\right)!\right]^2 \left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^m \left[1 - \frac{m-n}{2(m+1)}\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)\right]^2}{(m!)^2(n!) \left[1 + \left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)n\right] - \left[\left(\frac{m+n}{2}\right)!\right]^2 \cdot \left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^m \left[1 - \frac{m-n}{2(m+1)}\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)\right]^2} \quad (20)$$

와 같다. (20)式에서 入力 SN比를 變化시키면서 m 및 n 의 여러 값에 對한 出力 SN比를 計算하면 付錄 II-(1)과 같고 이를 圖表化하면 그림 3, 4 및 5와 같다.

(ii) $\sigma \ll A$ 일 때

(2)式의

$$r^2 = (A+x)^2 + y^2 \text{ 에서}$$

$$r^n = [(A+x)^2 + y^2]^{\frac{n}{2}}$$

을 2項 展開하고 $\cos m\lambda$ 를 幕級數 展開하여 相乘한 平均은

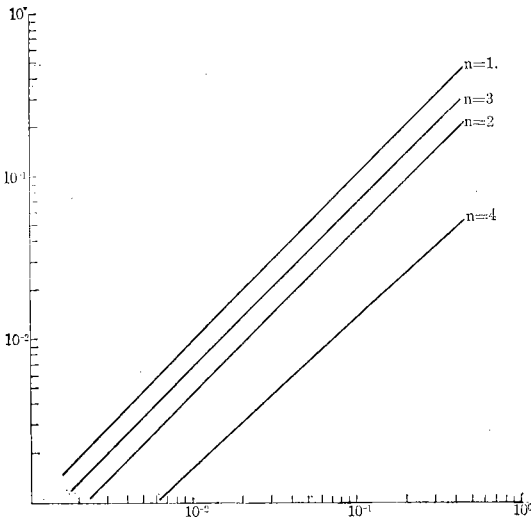


그림 3. 入力 SN比 對 出力 SN比 ($\sigma > A$)
 $m=1$

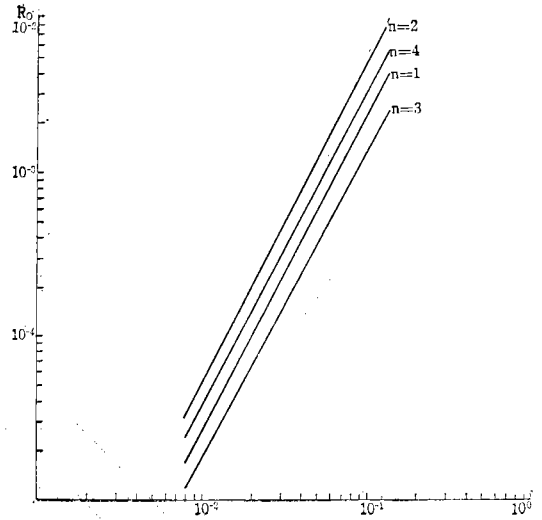


그림 4. 入力 SN比 對 出力 SN比 ($\sigma > A$)
 $m=2$

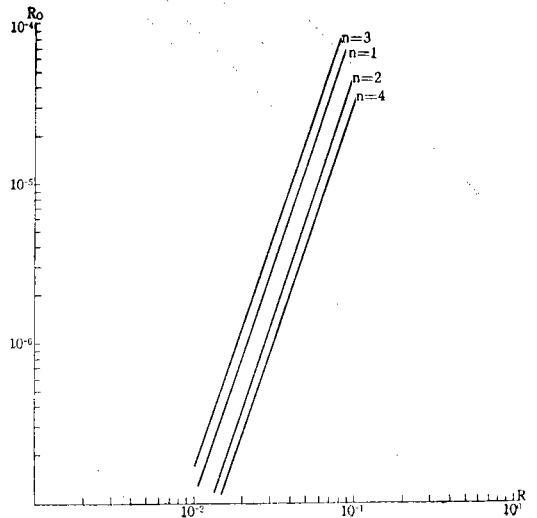


그림 5. 入力 SN比 對 出力 SN比 ($\sigma > A$)
 $m=3$

$$E\{r^n \cos m\lambda\} = E\left\{\left[(A+x)^n + \frac{n}{2}(A+x)^{n-2}y^2 + \dots\right] \cdot \left[1 - \frac{(m\lambda)^2}{2!} + \frac{(m\lambda)^4}{4!} + \dots\right]\right\}$$

인데 (ii)의 條件 이므로 $\lambda = \frac{y}{A}$, 따라서 $\lambda^2 \cong 0$ 로 되고 A^{n-3} 以下는 無視되어

$$E\{r^n \cos m\lambda\}$$

$$\begin{aligned}
 &= E \left[A^n + nA^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}A^{n-2}x^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}A^{n-3}x^3 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{n}{2}(n-2)A^{n-3}xy^2 \right] \\
 &= A^n + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}E\{x^2\} + \frac{n}{2}A^{n-2}E\{y^2\} \\
 &\quad - \frac{m^2}{2}A^{n-2}E\{y^2\} \\
 &= A^n + \frac{1}{2}(n^2 - m^2)A^{n-2}\sigma^2 \tag{22}
 \end{aligned}$$

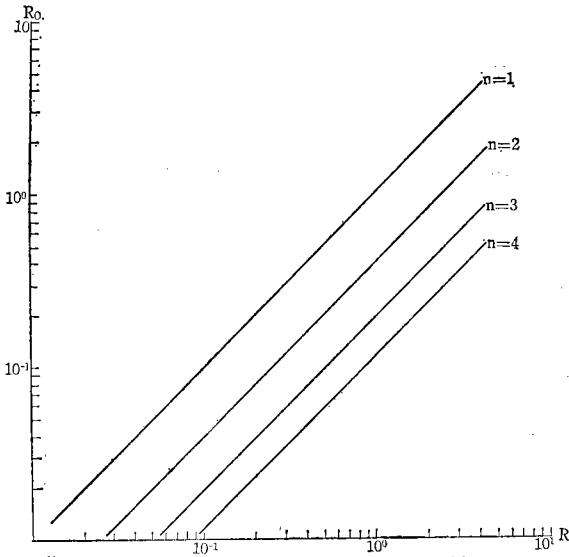


그림 6. 入力 SN比 對 出力 SN比 ($\sigma \ll A$)
 $m=1$

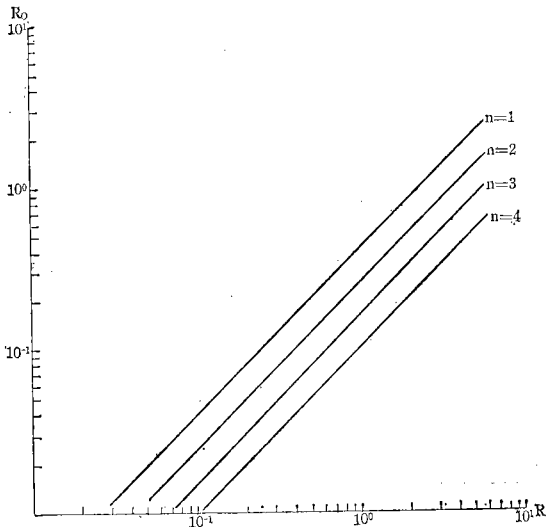


그림 7. 入力 SN比 對 出力 SN比 ($\sigma \ll A$)
 $m=2$

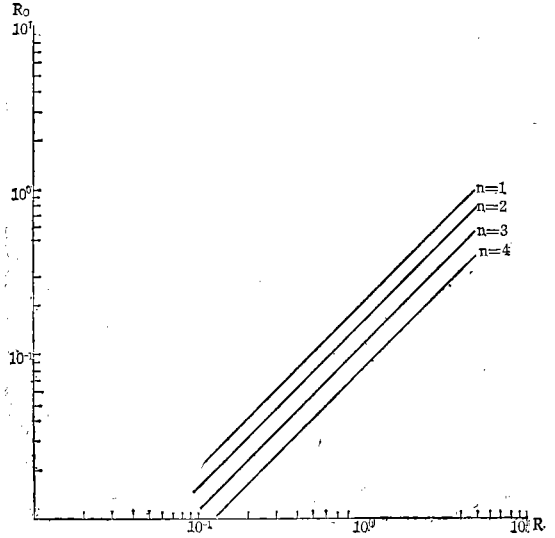


그림 8. 入力 SN比 對 出力 SN比 ($\sigma \ll A$)
 $m=3$

(22)式을 (9-1)式에 代入하여

$$\begin{aligned}
 &{}_1F_1 \left[\frac{m-n}{2}; m+1; -\frac{A^2}{2\sigma^2} \right] \\
 &= \frac{m! A^n + \left(\frac{n^2-m^2}{2}\right)A^{n-2}\sigma^2}{\left(\frac{m+n}{2}\right)! A^n (\sqrt{2}\sigma)^{n-m}} \tag{23}
 \end{aligned}$$

$m=0, n=2n$ 으로 놓아서

$${}_1F_1 \left[-n; 1; -\frac{A^2}{2\sigma^2} \right] = \frac{A^{2n} + 2n^2 A^{2n-2} \sigma^2}{n! (\sqrt{2}\sigma)^{2n}} \tag{24}$$

(23)式 및 (24)式을 (16)式에 代入하면

$$\begin{aligned}
 R_o &= \frac{\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \left[A^n + \frac{1}{2}(n^2 - m^2)A^{n-2}\sigma^2 \right]^2}{A^{2n} (\sqrt{2}\sigma)^{2(n-m)} \left[\frac{A^{2m} + 2n^2 \sigma^2 + A^{2n-2}}{(\sqrt{2}\sigma)^{2n}} \right]} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^m \left[A^n + \frac{1}{2}(n^2 - m^2)\sigma^2 A^{n-2} \right]^2} \\
 &= \frac{\left[A^n + \frac{1}{2}(n^2 - m^2)\sigma^2 A^{n-2} \right]^2}{(A^{2n} + 2n^2 \sigma^2 A^{2n-2}) - \left[A^n + \frac{1}{2}(n^2 - m^2)\sigma^2 A^{n-2} \right]^2} \\
 &\cong \frac{\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2}{m^2 + n^2}
 \end{aligned}$$

와 같다. (25)式에서 入力 SN比 값을 變化하면서 m 및 n 의 값에 對한 出力 SN比를 圖表化 하면 그림 6, 7 및 8과 같다.

IV. 結 論

半波 n 乘 非線形 裝置에 非 變調波 正弦 信號와 實効值 σ 인 雜音이 合하여 印加될 時 出力 SN比 값 및 m 과 n 과의 關係를 밝혔다. $\sigma \gg A$ 의 경우 恒常 $m=n$ 에서 最大 出力 SN比 이었고(그림 3~5) 基本波分은 $n=1$ 에서 第一 컷으며(그림 3) m 次數와는 反比 關係이고 高調波는 $m=n=2$ (그림 4)에서 最大이었다.

$\sigma \ll A$ 의 경우는 $m=n=1$ 에서 最大 SN比 이었 으며(그림 6) 基本波는 $n=1$ 에서, 高調波는 $n=2$ 에서 언제나 最大이었다. $\sigma \gg A$ 의 경우 1~2象 限에서 $m=n=2$ 를 考慮한다면 “高調波二倍器”⁹⁾가 可能함을 알 수 있다.

끝으로 計算을 爲해 協助해 주신 東國大學校 電子 計算室 여러분께 感謝를 表한다.

V. 附 錄

(i) (9-1) 및 (13)式의 誘導
두 連續 確率變數 x, y 의 期待值式에서

$$E\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy \quad (A-1)$$

$$\begin{aligned} E\{r^n \cos m\lambda\} &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^n \cos m\lambda \cdot p(r, \lambda) dr d\lambda \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^{\infty} r^{n+1} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \\ &\quad I_m\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right) dr \end{aligned} \quad (A-2)$$

로 되고 여기 $I_m\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right)$ 는 第一種 Bessel 函數이다.

$$\begin{aligned} I_m\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right) &= j^{-m} J_m\left(j \frac{Ar}{\sigma^2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)} \left(\frac{Ar}{2\sigma^2}\right)^{m+2k} \end{aligned} \quad (A-3)$$

(A-3)式을 (A-2)式에 代入하고

$$\begin{aligned} E\{r^n \cos m\lambda\} &= \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)} \left(\frac{A}{2\sigma^2}\right)^{m+2k} \\ &\quad \cdot \int_0^{\infty} r^{(n+m+2k+1)} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \quad (A-4) \end{aligned}$$

右邊의 積分을 $z = \frac{r^2}{2\sigma^2}$ 으로 置換하면

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} r^{(n+m+2k+1)} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \\ &= \sigma^2 (\sigma\sqrt{2})^{n+m+2k} \int_0^{\infty} z^{\frac{n+m+2k}{2}} e^{-z} dz \\ &= \sigma^2 (\sigma\sqrt{2})^{n+m+2k} \frac{n+m+2k}{2} \end{aligned} \quad (A-5)$$

故로 (A-4)式은

$$\begin{aligned} &E\{r^n \cos m\lambda\} \\ &= A^n \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) (\sigma\sqrt{2})^{n-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)} \left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)^k \\ &\quad \cdot \frac{n+m+2k}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{m+n}{2}\right) \left(\frac{1}{m!}\right) A^m (\sqrt{2}\sigma)^{n-m} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \\ &\quad {}_1F_1\left[\frac{m+n+2}{2}; m+1; \frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (A-6)$$

Kummer의 第一 定理에 依해 (A-6)式은

$$\begin{aligned} &E\{r^n \cos m\lambda\} \\ &= \left(\frac{m+n}{2}\right)! \left(\frac{1}{m!}\right) A^m (\sqrt{2}\sigma)^{n-m} \cdot \\ &\quad {}_1F_1\left[\frac{m-n}{2}; m+1; \frac{A^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (A-7)$$

로 된다. 그런데 A 가 一定치 않으면 A 의 分布에 對해 期待值를 取해 주어야 되므로

$$\begin{aligned} &E\{r^n \cos m\lambda\} \\ &= \left(\frac{m+n}{2}\right)! \left(\frac{1}{m!}\right) (\sqrt{2}\sigma)^{n-m} \cdot \\ &\quad E\left[A^m {}_1F_1\left[\frac{m-n}{2}; m+1; \frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right] \end{aligned} \quad (A-8)$$

$m=0$ 로 놓아서

$$\begin{aligned} &E\{r^n\} \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)! (\sqrt{2}\sigma)^n \cdot E\left[{}_1F_1\left[-\frac{n}{2}; 1; \frac{A^2}{2\sigma^2}\right]\right] \end{aligned}$$

(ii) (9-2)式의 誘導

$$\begin{aligned} E\{r^n \sin m\lambda\} &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^n \sin m\lambda \cdot p(r, \lambda) dr d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \frac{r^{n+1}}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2+r^2}{2\sigma^2}\right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin m\lambda \cdot \exp\left(\frac{Ar \cos \lambda}{\sigma^2}\right) d\lambda\right] dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

參 考 文 獻

1. Davenport, Jr., W.B., Signal to noise ratios in band pass limiters, J. Appl. Phys., vol. 24, 1953. pp. 720-727.
2. Davenport, Jr., W.B. and Root, W.L., An introduction to the theory of random signals and noise McGraw Hill Book Co., 1958, pp.250-311.
3. Blachman, N.M., Band pass nonlinearities, IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-10, 1964, pp. 162-164.
4. Blachman, N.M., Derectors, band pass non-linearities, and their optimization, IEEE Trans. on Inform Theory, vol. IT-17, 1971, pp. 398-404.
5. Blachman, N.M., The output signal to noise ratio of a power law device, J. Appl. Phys. vol. 24, 1953, pp. 783-785.
6. Middleton, D., An introduction to statistical communication theory, McGraw Hill Book Co., 1960, pp. 1073-1076.
7. Cahn, C.R., A note on signal to noise ratios in band pass limiters, IRE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-7, 1961, pp. 39-43.
8. Berglund, C.N., A note on power law devices and their effect on signal to noise ratio, IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-10, 1964, pp. 52-57.
9. Oberst, J. F. and Schilling, D.L., The SNR of a frequency doubler, IEEE Trans. on Commun. Technology, vol. COM-19, 1971, pp.97-99.