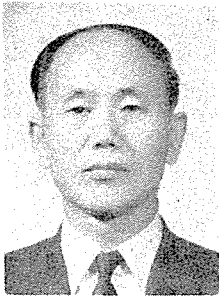


節點이 部分 剛接合인 架構의 應力解析에 關한 歷史的 考察

1

“A Historical Review for the Stress Analysis of Partially Rigid-Jointed Structures”



金 亨 杰

(서울大學校 工科大學教授)

目 次

1. 序 言
2. 部分剛接合節點의 剛性
3. 軟節架構의 應力解析
4. 結 言

1. 序 言

Rivet나 Bolt等으로, 接合시킨 節點을 갖는 鐵骨構造와 같은 組立構造에 있어서는 節點은 完全히 剛으로 接合되기 힘든 것이 普通이고, 따라서 이와같은 架構의 應力解析을 할 때에는 節點을 完全剛 接合으로나 또는 鉸接合으로 假定하고 하는 것이 通常이다. 鐵骨構造에 있어서 기둥과 보를 “Moment resistant connection”으로 設計했다 하여도, 完全剛接合에 對해서는 70%, 80% 또는 90%의 效果를 거두울 뿐이고, 決코 100%의 剛接合으로는 되지 않는 것이다.

多層鐵骨建物の 架構設計는, 普通 다음과 같은 假定에 基礎를 두고 하는 것으로 되어 있다. ⁵⁾⁸⁾

- 1) 보의 設計에 있어서는, 기둥과 보의 接合은, 鉸接合이나 혹은 單純支持로 한다.
- 2) 기둥은 Frame action에 依하여 생기는 모우먼트를 計算하지 않고 設計한다.
- 3) 보와 기둥의 接合은, 橫荷重 或은 風荷重에 依한 應力을 計算할 때에는 剛接合으로 假定한다.

예 보를 設計할 때에는, 보材端節點에 있어서의 拘束效果를 無視하는 것이다. 그러나, 鐵骨架構에 있어서 應力解析의 다른 여러가지 問題는 節點을 完全剛接合으로 假定하고 取扱하는 것이 普通이다.

數字는 參考文獻 番号를 表示함.

이와같은 假定에 依하여 計算은 빨리되고, 또 安全側에 있다는 것을 알게되나, 그러나 좀더 正確한 假定을 두어 應力解析을 한다 하면, 經濟적으로 된다는 可能性의 問題가 남아있다. 그리고 節點部分剛接合으로 말미암은 影響의 問題가 처음으로 提起된 것은 1934年 John F. Baker氏에 依해서 이다. 2)5)12)

節點이 Rivet, Bolt 或은 溶接으로 接合되어 있을 때 其剛性에 關해서는 過去 많은 實驗이 行하여 졌다. 1)3)4)5)7)8) 또 이때 實驗結果에 바탕을 두어 應力解析法을 試圖한 몇 개의 例가 있다. 2)5)6)8)9)10)11) 다음에 이러한 過去의 研究를 吟味하여 보고저 한다.

2. 部分剛接合節點의 剛性

英國에서의 調查研究¹⁾²⁾¹²⁾에 依하면, Rivet로서 보와 기둥을 接合하였을 境遇, 그 節點에 있어서의 部分的拘束作用을 利用하므로써, 보는 重量이 平均 20% 節約된다는 可能性이 있다고 報告되어 있다. 또 溶接構造에 있어서도 같은 節約이 이루어 질 것이라 하였다.

다음에 J. L. Brandes와 R. M. Mains 兩氏는 1944년에 發表한 그들의 論文³⁾에서 部分剛接合의 剛性이 50% 乃至 100% 範圍 내에서 部分剛接合일때가, 完全剛接合이나 또는 可撓性接合보다도 좀더 가벼운보를 써도 된다는 것은 興味로운 것이라고 말하고 있다.

또 Bruce Johnston과 Edward H. Mount 兩氏도 Top and seat angle型의 Rivet나 溶接接合으로 얻어지는 節點의 部分的拘束作用에 依하여, 보치수의 經濟를 卍할 수 있을 것을 指摘하고⁵⁾ 그것은 15% 또는 그 以上の 重量이 節約된다고 말하였다. 9) 그리고 兩氏는 過去에 行하여진 節點溶接架構의 設計에 關한 研究를 檢討하였다.

Bruce Johnston과 Robert A. Hechtman 兩氏는 1940년에 發表한 그들의 論文¹⁰⁾에서, 節點이 部分剛接合인 鐵骨架構의 보가, 自己들이 提案한 計算法을 써서 設計한 結果는 15% 乃至 20% 가 가볍게 된다고 指摘하였다. 그러나 보와의 接合節點에 對해서는 節點을 完全剛接合으로 만드는 일이 困難하기 때문에, 100% Restraint일 때가 반드시 가장 經濟적으로 될 可能이 있는 것은 아니고, 40%와 75% 中間의 어디션가에서 그 可能性이 있다고 兩氏는 指摘하였다. 여기에 關해서는 B. Johnston 과 E. H. Mount 兩氏도 1933년에 發表한 그들의 論文⁹⁾에서 100% Restraint인 節點을 갖는 剛性架構가, 가장 經濟적으로 될 可能性이 있는 것은 아니라 하고 그 理由로서 다음 두가지를 들고 있다.

- 1) 100% 拘束作用을 줄 수 있는 節點은, 그렇게 構成하기 爲한 詳細한 溶接 때문에 50%乃至 75% 拘束作用을 줄수 있는 것 보다도 高價이다.
- 2) 보 中央에 集中荷重이 作用할 때를 除外하고는 보 設計에 對해서 經濟性은 節點의 拘束作用이 100%인 境遇보다도 75%일 때가 크다.

이 2) 項에 關해서는 두 境遇에 보의 正負 彎모우먼트의 값을 比較해 보므로써, 곧 推測할 수 있을 것이다. 그리고 材端에 있어서의 Restraint가 50%와 75% 中間에 있을 때의 보는 어떠한 荷重狀態下에서도, 보 中央의 正모우먼트의 값이 恒常 크며, 또 75% 以上の Restraint의 境遇에는, 材端負 모우먼트의 값이 크다는 것은 注目할 만한 事實이다.

1936년에 J. Charles Rathbun氏에 依하여 行하여진 鉸接合의 彈性的 性質에 關한 實驗⁸⁾에서는, 接合用的 鉸이든가 또 그 Beam에는, 눈에 띄일 程度의 破壞는 없고 接合에 使用한 山形鋼이 大端히 變形을 했다고 報告되어 있다. 또 全氏가 行한 山形鋼과 鉸을 使用한 接合의 試驗에서는 기둥과 보 材端間의 相對的回轉 角度에 相當한 變化가 있기는 했지만, 接合이 剪斷力을 傳達하는 能力에는 그 다지 影響을 주지 않는 것 같다고 說明되어 있다. 그리고 全氏는 17개의 鉸接合을 試驗한 結果, 接

합점에 있어서의 $M-\phi$ 곡선은 全部 같은 모양의 곡선을 얻었다. 또 어느 곡선에 있어서도, 確定的인 降伏點의 位置는 나타내고 있지 않다.

그런데 過去에 行하여진 많은 實驗結果에 依하면 Rivet나 Bolt 或은 溶接으로 接合된 鐵骨架構의 節點의 剛性은 그 接合의 構造 如何에 따라 差는 있을 것이나, 節點에 作用한 모우먼트 M 과, 節點에 있어서의 기둥과 보材端의 相對的 回轉角度的 變化와의 關係는, 大略 Fig. 1.1 或은 Fig. 1.2에 나타낸 것 처럼 되어 있음을 알 수 있다.

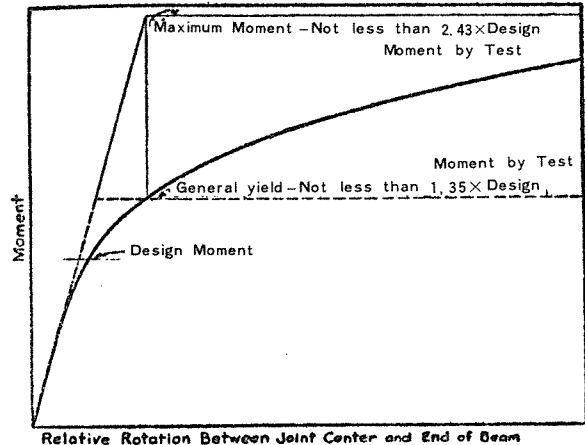


FIG 1.1 Moment-Rotation Diagram, Minimum Test Values.

即 節點에 作用된 모우먼트 M 과, 節點에 있어서의 기둥과 보材端間의 相對的 回轉角度變化 ϕ 와의 關係는, 大體로 非線形 舉動을 나타내고 있다.³⁾⁵⁾⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾ 但 이들의 實驗에 있어서의 試驗하는 節點에 對하여 보의 他端을 單純支持狀態에 놓고, 部分剛接合의 剛性을 測定했다는 것을 잊어서는 안될 것이다. 그리고 節點의 $M-\phi$ 關係는 다음의 3 段階로 나누어진다.¹⁰⁾¹¹⁾ 即 初期段階는 M 과 ϕ 가 大略 比例關係에 있고 다음 段階는 接合의 降伏이다. 다음 最後의 段階는 모우먼트 M 의 增加에 比較하여 回轉角度變化 ϕ 가 急激으로 增加하는 領域으로서, 勿論 非線形 關係이고, 마침내는 破壞되든가 또는 過大한 變形을 일으키는 結果가 된다.¹⁰⁾

이것에 關聯하여 Steve R. Lionberger 氏는 $M-\phi$ 關係를 Bilinear로 하여 取扱하였다.¹¹⁾ 그리고 上 術한 第一段階는 接合의 有用한 設計範圍이다. 또 部分剛接合節點의 境遇에 일어날 수 있는 最大回轉角度的 값은, 單純보로 하였을 때의 材端回轉角이 될 것이며, 通常의 接合狀態의 境遇에는 大端히

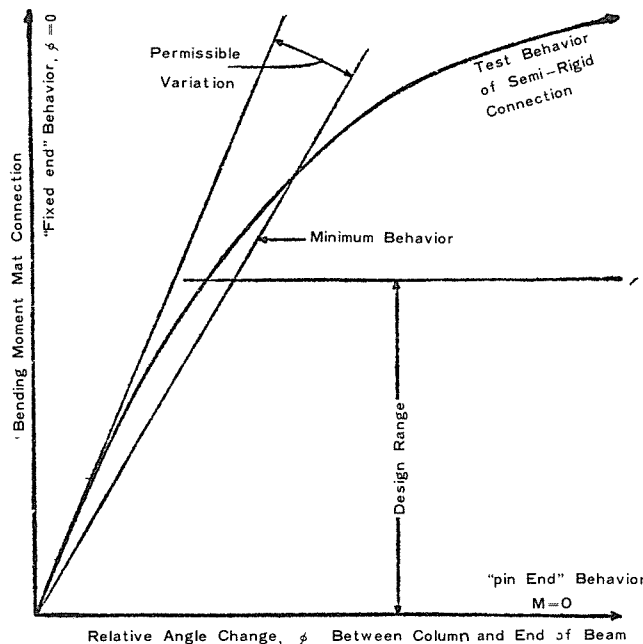


FIG 1.2 Typical $M-\phi$ Relation in the Test of a Welded or Riveted Beam-Column Connection

큰 剛性을 가진 몇 個를 除外하고는 全部의 部分剛接合節點에 對하여 破壞될 때의 角度以內에 있다.
 10) 그리고 이 몇 個의 境遇에는 모우먼트는 그 極限值를 取해야 될 것이다.

3. 軟節架構의 應力解析

다음에 이러한 實驗結果에 바탕을 두고 部分剛接合節點을 갖는 所謂 軟節架構로서의 鐵骨架構의 應力解析을 如何히 하였는가를 考察하여 보기로 하자.

B. Johnston 및 R. A. Hechtman 兩氏는 1940년에 發表한 그들의 論文¹⁰⁾에서, 節點이 部分剛接合인 鐵骨架構의 보를 다음과 같이 設計할 것을 提案하였다. 보는 爲先 單純보로서의 最大 휨모우먼트에 依하여 設計한다. 다음에 보강도와 節點에 있어서의 기동剛度の 總和와의 比를 計算하여 미리 準備한 圖表로 부터, 이 比와 節點剛度を 等值로 하는 條件으로 減少率(Reduction factor)이라는 것을 求한다. 다음에 單純보로서 計算한 보의 斷面係數에 이 減少率을 곱하여 보 斷面을 最終적으로 決定한다. 이것은 即 다시 말하자면 보를 單純보로서 設計하여 놓고, 다음에 節點에서의 拘束作用에 依한 影響을 考慮하여 보 斷面을 減少시킨다는 思考方式이다. 그렇게 하므로서 보材는 15% 乃至 20% 그 重量을 節約할 수 있다고 하는 것이다.

1939년에 發表한 B. Johnston 및 E. H. Mount 兩氏의 論文⁹⁾에서는 節點의 剛性率(Percentage-rigidity)를 다음과 같이 하여 求하고 있다. 爲先 節點에 加하여진 모우먼트 M 과 節點에서의 기동과 보材端의 相對的回轉角度變化 ϕ 의 關係를, γ 를 써서 $\gamma = \frac{\phi}{M}$ 로서 定義하고 이 γ 를 接合常數(Connection constant)라 불렀다. 勿論 이 γ 는 實驗으로부터 決定지을 것은 말할 必要도 없다. 그런 則 γ 는 單位모우먼트에 對한 回轉角度變化라고 定義할 수도 있을 것이다. 또 어떤 特定 보의 斷面과, Span에 對해서는 $\alpha = \frac{2EI}{L} \gamma = 2EK\gamma$ 라는 關係로 맺어지는 常數 α 를 끌어 넣고 있다. 다음에 設計에 便利하도록 또 새 常數 J 를 導入하여 $J = \frac{1}{E\gamma} = \frac{2K}{\alpha}$ 로 表示하여 γ 와 關聯시키고 있다. B. Johnston과 R. A. Hechtman 兩氏는, 1940년에 發表한 그들의 論文¹⁰⁾에서, 이 J 를 節點常數(Joint constant)라 불렀다, J 의 物理的 意義는 部分剛接合節點에 있어서 $M-\phi$ 曲線의 初期段階 即 直線部分의 句配를 材料의 E 로 除한 값이고 節點의 剛性을 量的으로 定義하는 한 方法일 것이다. 그러므로 J 의 값이 큰 것은 剛性이 큰 接合임을 意味하며 따라서 더 많은 모우먼트를 傳達하는 接合임을 意味한다.¹⁰⁾ 다음에 節點常數 J 의 값의 變化는, 傳達되는 모우먼트에는 그다지 큰 影響을 주지 않는다는 것은 注目할만 한 事實이다. 한편으로 節點接合의 設計는 如何히 하는가 하면, 節點에 있어서 기동이 回轉을 이르지 않는다고 假定하였을 때에, 左在하는 拘束모우먼트에 對하여 設計한다고 되어있다. 그리고 이 때에, 實際의 材端모우먼트 M_F 는 $M_F = \frac{M_{FR}}{1+\alpha}$ 로서 나타내진다. 但 여기서 M_{FR} 는 兩端定全固定인 境遇의 F. E. M(固定端모우먼트)를 表示하는 것이다. 그렇게 하면 部分剛接合節點의 Percentage rigidity는 다음과 같이 나타내 진다.

$$\text{Percentage rigidity} = 100 \frac{M_F}{M_{FR}} = \frac{100}{1+\alpha} = \frac{100}{1+\frac{2I}{JL}}$$

이것에 따르면, Percentage rigidity 50%, 75% 및 80%에 對하여 J 의 값은 各各 $\frac{2I}{L}$, $\frac{6I}{L}$ 및 $\frac{8I}{L}$ 로 됨을 알 수 있다. 그리고 兩氏는 節點剛性率의 限度로서, 50%부터 75%以內에 들것이 바람직 하나, 80%를 設計에 對한 節點剛性率의 最大限度로서 取扱할 수도 있을 것이라고 說明하였다.

B. Johnston 및 R. A. Hechtman 兩氏는 다음과 같은 設計方法을 提示하고 있다.

- 1) 節點은 기동이 回轉을 일으키지 않는다고 假定하였을 때에 일어난다고 생각되는 部分剛接合端 모우먼트(Partially fixed end moment)로서 設計한다.

- 2) 보는 기둥이 回轉을 일으킨다고 하였을 때 생기는 最大보中央點모우먼트를 가지고 設計한다.
- 3) 構造와 荷重은 對稱이라고 假定한다.
- 4) 節點接合의 剛性率은 50%로 假定한다.

以上과 같은 假定에 基礎를 두면 기둥은 上下로 通해 있는 것으로 하여, 通常의 Slope-deflection equation을 쓰기로 하고, 또 보 AB에 對해서는 材端節點剛性率을 50%로 하여 $M_{AB} = EI(1.25 O_A + 0.25 O_B) \pm \frac{M_R}{2}$ (但 M_R 은 A端과 B端이 共히 完全固定일 때의 F. E. M.)라는 式을 誘導하고 여기에 對稱性을 利用하여, $O_A = (-)O_B$ 라는 關係를 써서 材端모우먼트의 式으로서

$$M_{AB} = EK\theta_A - \frac{M_R}{2}$$

라는 式을 誘導하였다. 다음에 節點方程式을 利用하여

$$O_A = -\frac{M_R}{2} \left(\frac{1}{2E\sum K_C + EK_B} \right)$$

를 얻고 이것을 써서, M_{AB} 의 式을 다음과 같이 誘導하였다.

$$M_{AB} = (-)M_R \left(\frac{1}{2 + \frac{K_B}{\sum K_C}} \right)$$

但 여기서 K_B 및 K_C 는 各各 보와 기둥의 剛度이다. 그렇게 하면 보中央點의 휨모우먼트 M_C 는, M_S 를 單純보로서의 보中央點의 휨모우먼트로 하여 다음과 같이 된다.

$$M_C = M_S + M_{AB} = M_S - M_R \left(\frac{1}{2 + \frac{K_B}{\sum K_C}} \right)$$

그리고, 節點剛性率이 75% 以下인 境遇에는 M_C 가 最大로 되어, 보는 이것에 依하여 設計된다. 다음에 單純보로서 設計한 보의 斷面係數에 곱하는 減少率 F 는 다음과 같이 하여 求한다.

$$F = \frac{M_C}{M_S} = 1 - \frac{M_R}{M_S} \left(\frac{1}{2 + \frac{K_B}{\sum K_C}} \right)$$

이와같이 하여 F 의 값이 決定되면, $M_C = F M_S$ 로부터 設計用모우먼트 M_C 를 꺼꾸로 計算해 낼 수 있다.

結論으로서 다음과 같이 設計順序를 시사하였다.

- 1) 爲先 보를 單純보로서 最大 휨모우먼트에 對하여 設計한다.
- 2) 보에 對하여 $K_B = \frac{I_B}{L_B}$ 와 기둥에 對하여 보 一端에서 上下柱의 $\sum K_C = \sum \frac{I_C}{L_C}$ 를 計算한다.
- 3) $\frac{K_B}{\sum K_C}$ 를 計算하고 設計에 使用할 Percentage rigidity를 決定하여, 實際의 荷重狀態에 맞는 減少率 F 를 計算한다.
- 4) 單純보로서 計算한 보의 斷面係數에, 減少率 F 를 곱하여 減少된 새 斷面係數를 바탕으로 하여 보를 다시 設計한다.
- 5) F. E. M. M_R 에 假定한 Percentage rigidity를 곱하여 部分剛接合端 모우먼트를 計算한다.
- 6) 材端反力和 部分剛接合端 모우먼트 및 假定한 Percentage rigidity를 바탕으로 하여 節點接合을 選定한다.

C. Batho와 H. C. Rowan 兩氏는, 1934년에 論文¹⁾을 發表하여 部分剛接合節點에 關한 $M-\phi$ 曲線을 나타내는 圖表上에 “보에 對한 Design requirement line” 또는 簡單히 말하여 “Beam line”이라는 것 을 그어서, 節點에 있어서의 材端모우먼트와 그것에 相應하는 材端回轉角을 圖式으로 決定하는 方法

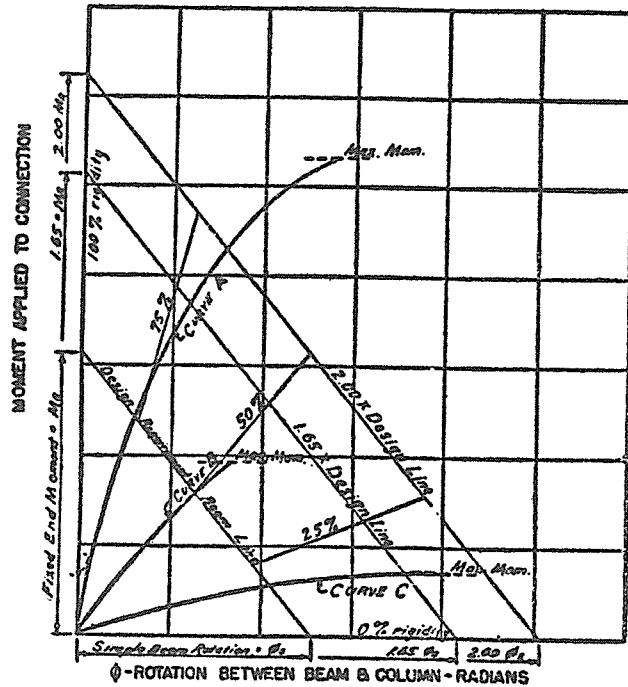


FIG 1.3 Typical Moment-Rotation Curves

을 說明하였다.

等分荷重 w 와 兩材端에서 等價의 모우먼트 M 의 作用을 받는 Span 길이 L 의 單純보의 兩端에서 的回轉角 ϕ 은 材料力學에서 아는 바와 같이 다음 式으로 주어진다.

$$\phi = \frac{wL^3}{24EI} - \frac{ML}{2EI}$$

여기서 보에 對한 ϕ 과 M 의 값은 節點의 그것에 相應하는 값과 같지 않으면 안될 것이다. 上式은 ϕ 과 M 이 直線의 關係에 있고, 이 式으로 주어지는 直線을 기둥이 回轉을 일으키지 않았다고 할때의 對稱荷重에 對한 Beam line이라고 C. Batho氏는 일컬었다. 16) 19) 上式에 있어서 $\phi = 0$ 로 놓으면 $M = \frac{wL^2}{12}$ 로 되어 兩端이 完全固定인 境遇가 된다. 이제 이 點을 Fig. 1.3의 M 軸上에 잡는다. 다음에

$M = 0$ 로 놓고 $\phi = \frac{wL^3}{24EI}$ 를 얻으면 이것은 單純보의 境遇가 된다. 또 이 點을 Fig. 1.3의 ϕ 軸上에 잡는다. 이와같이 두 極端의 境遇를 생각하여 決定한 두 點을 連結하므로써 Beam line은 決定되게 된다. 그리고 部分剛接合節點의 境遇는 이미 說明한 두 極端의 境遇의 中間에 存在하게 된다. 그런 故로 Fig. 1.3에서 節點의 $M-\phi$ 曲線과 주어지 보의 Beam line과의 交點으로부터 이 境遇에 實際로 쓰여지는 節點과 보에 適合하는 M 과 ϕ 가 알아지게 된다는 것이다. 29)

다음에 Beam line을 좀더 一般的인 形式으로 나타낸다 하면 다음과 같이 될 것이다. 卽

$M =$ 部分剛接合材端모우먼트

$\phi =$ 보材端의 기둥에 對한 相對的 回轉角

$M_r =$ 보材端이 完全固定일 때의 F. E. M. 라 하면

$$M + \frac{2EI}{L}\phi = M_r \text{ 3)}$$

로 되어 이것이 기둥이 回轉을 일으키지 않는다 할 때의 對稱荷重에 對한 “보의 Design requirement line”式이 되게 될 것이다. 그리고 이때 보 左右兩端의 部分剛接合狀態도 對稱인 境遇일 것은 勿論이다.

지금까지 說明한 部分剛接合節點을 갖는 鐵骨架構의 設計에서는 單只 節點에서의 拘束效果의 影響을 생각하여 斷面을 어떻게 減少시키느냐 또 기둥이나 節點은 어떠한 應力으로 設計할 것인가 等을 提案한데 不遇한 것이고 節點이 部分剛接合인 架構를 全體로서 그 應力解析法을 論한 것은 아니었다. 그런데 比하여 以下에 說明하는 J. C. Rathbun氏의 方法은 節點이 部分剛接合인 架構로서의 應力解析法을 試圖한 것이다.

J. C. Rathbun氏는 自己가 行한 實驗을 基礎삼아 節點에서의 材端部分剛接合의 影響을 考慮하여 部分剛接合材端모우먼트의 式을 誘導하고 이 式을 써서 Slope-Deflection method나 或은 Moment Distribution method를 써서 架構의 應力解析法을 窮明하고 있다. 이 境遇 基本式을 誘導함에 있어서 普通의 Slope-Deflection Equation의 境遇와 다른 點은 節點이 部分剛接合이기 때문에 節點에서의 材端回轉角의 項이 追加되어 있는 點이다. 即 節點이 部分剛接合인 故로 해석의 相對的回轉角 ϕ 는 節點에 加해지는 모우먼트 M 에 比例하는 것으로 하여 $\phi = Z\bar{x} M$ 로 表示하고, 材端回轉角을 求할 때 이 項을 加해 가지고 材端모우먼트의 式을 誘導한 것이다. 여기서 Z 는 節點常數(Joint constant)에 該當한 것으로서, 勿論 實驗으로 決定지을 係數인 것이다. 여기서 注意해야 할 것은, 部分剛接合端의 剛性을 實驗에 依하여 測定할 때, 他端을 單純支持狀態의 條件下에서 決定한 係數 Z 의 값을 그대로 他端이 部分剛接合支持狀態인 境遇에 適用하여 옳을까 하는 問題로서 量的으로 差가 있을 것이고 적어도 理論에 맞는 方法이라고는 생각되지 않는다. 何如튼간에 尙氏는 그렇게 하므로서, AB 材의 材端모우먼트式을 다음과 같이 誘導하였다.

$$M_{AB} = \frac{6EI}{4L_{2A}L_{2B} - L^2} \{2L_{2B}\theta_A + L\theta_B - (2L_{2B} + L)R\} + \frac{6A}{L} \frac{2L_{2B}\bar{x}_1 - L\bar{x}}{4L_{2A}L_{2B} - L^2}$$

$$M_{BA} = \frac{6EI}{4L_{2B}L_{2A} - L^2} \{2L_{2A}\theta_B + L\theta_A - (2L_{2A} + L)R\} + \frac{6A}{L} \frac{2L_{2A}\bar{x} - L\bar{x}_1}{4L_{2B}L_{2A} - L^2}$$

但 여기서

A = 휨모우먼트圖의 面積

L = 部材의 길이

θ_A = A 端에서의 節點回轉角

θ_B = B 端에서의 節點回轉角

R = 部材回轉角

\bar{x} = 左端에서 휨모우먼트圖의 圖心까지의 距離

\bar{x}_1 = 右端에서 휨모우먼트圖의 圖心까지의 距離

$L_{2A} = L + 3EIZ_A$

$L_{2B} = L + 3EIZ_B$

B. Johnston과 E. H. Mount 兩氏는 1942년에 發表한 그들의 論文⁵⁾에서, 위에서 說明한 J. C. Rathbun氏가 誘導한 것과, 거이 같은 式을 誘導하였다. 兩氏는 部分剛接合節點을 材端과 기둥面 사이에서 端面이 局部的으로 弱해져 있다고 생각해도 된다고 하고 解析에 미치는 影響은 材端 Haunch 나 Cover plate에 依한 影響과 反對로 생각할 수 있다고 하였다. 그리고 兩氏는 特히 節點이 部分剛接合인 架構의 應力解析에 있어서는 기둥材의 幅을 無視하는 것은 어지간한 誤差를 惹起시키는 것이라 하여 이것을 考慮에 넣은 點이 J. C. Rathbun氏의 式과는 다르다. 이 기둥材의 幅을 無視하면 材端 모우먼트는 安全側에, 또 材中央部의 正모우먼트는 不安全側에 誤差가 있다. 이와같이 하여 節點에서의 側에 剛性을 생각하여 誘導한 그들의 式은 다음과 같은 것이다.

$$\bar{M}_{AB} = \frac{1}{1+2\alpha+\beta+3\alpha\beta} [2EK(C_{AA}O_A + C_{AB}O_B - C_{AC}R) - F_{AA}M_{RAB} - F_{AB}M_{RBA}] - V'_{AB}b_{AB}$$

$$\bar{M}_{BA} = \frac{1}{1+2\alpha+2\beta+3\alpha\beta} [2EK(C_{BB}O_B + C_{BA}O_A - C_{BC}R) + F_{BB}M_{RBA} + F_{BA}M_{RAB}] + V_{BA'}b_{BA}$$

上式에 있어서의 常數 $C_{AA}, C_{AB}, C_{AC}, C_{BB}, C_{BA}, C_{BC}, F_{AA}, F_{AB}, F_{BA}, F_{BB}$ 는, 部材의 치수와 節點常數의 값에 依하여 決定되는 것이고 兩氏의 論文에는 此 境遇를 α 와 β 를 使用하여 나타내고 있다.

上式에서 部材幅을 無視한 境遇에는, 即 $b_{AB}=b_{BA}=0$ 로 놓으면 J. C. Rathbun氏 式과 一致하게 되고 이것은 當然한 歸結이라고 하겠다. 또 上式에서 α 와 β 는 接合常數 γ_A 와 γ_B 代身에 $\alpha=2EK\gamma_A$ 와 $\beta=2EK\gamma_B$ 로 關係지어지는 새 常數이다. M_{RAB} 및 M_{RBA} 는 Span 길이가 l 인 兩端 完全固定의 境遇의 F. E. M. 이고 V_{AB} 및 V_{BA} 는 Span 길이가 l 인 兩端單純支持狀態때의 兩材端에 있어서의 剪斷力 또는 反力이다. 이와같이 하여 材端모우먼트式이 求하여지면, 그 다음은 Slope-Deflection法에 依하여 \bar{M}_{AB} 와 \bar{M}_{BA} 等을 求할 수 있으리라는 것은 完全剛接合인 普通의 架構의 境遇와 똑같다. 한편으로 材端剪斷力은 다음 式으로 求하여진다.

$$V_{AB} = \bar{V}_{AB} = (-) \frac{\bar{M}_{AB} + \bar{M}_{BA}}{L} + \bar{V}'_{AB}$$

$$V_{BA} = \bar{V}_{BA} = (-) \frac{\bar{M}_{AB} + \bar{M}_{BA}}{L} - \bar{V}'_{BA}$$

여기서 \bar{V}_{AB} 와 \bar{V}_{BA} 는 Span 길이가 L 인 單純보 狀態때의 材端剪斷力이다. 이와같이 하여 材斷剪斷力이 求하여지면 다음에 接合點에 있어서의 모우먼트 M_{AB} 와 M_{BA} 는 다음 式으로 求할 수 있다.

$$M_{AB} = \bar{M}_{AB} + \bar{V}_{AB} b_{AB}$$

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} + \bar{V}_{BA} b_{BA}$$

이제 기둥材의 幅을 無視한 境遇에 A端과 B端의 接合常數가 各各 γ_A 및 γ_B 인 보 AB가 節點 A 및 B에 있어서 各各 回轉角 θ_A 및 θ_B 와 아울러 部材回轉角 R 을 일으키고, 또 荷重이 作用하였을 때 材端모우먼트 M_{AB} 와 M_{BA} 를 나타내는 式을 直接誘導하여 보고자 한다. Fig. 1.4에 있어서 材端에 作用하는 모우먼트와 荷重에 依한 보 AB의 A端과 B端의 回轉角을 생각하면 容易하게 다음 式을 얻을 수 있다.

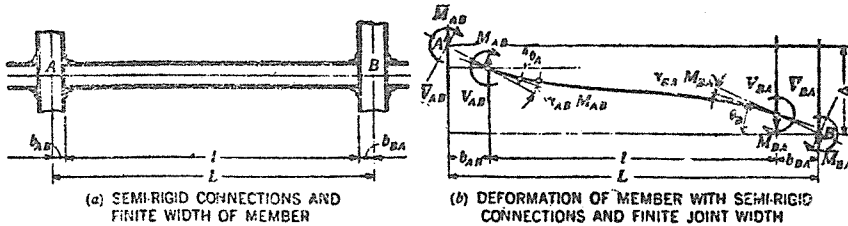


FIG 1.4 Deformation of Member Considering Semi-Rigid Connections and Finite Joint Width

$$\theta_A - R - \gamma_{AB} M_{AB} = \frac{1}{3EK} M_{AB} - \frac{1}{6EK} M_{BA} - \frac{A}{EI} \frac{\bar{x}_1}{l}$$

$$\theta_B - R - \gamma_{BA} M_{BA} = \frac{1}{3EK} M_{BA} - \frac{1}{6EK} M_{AB} - \frac{A}{EI} \frac{\bar{x}}{l}$$

이제 上式에, $\gamma_A = \frac{\alpha}{2EK}$ 및 $\gamma_B = \frac{\beta}{2EK}$ 를 代入하고, 또 運算을 簡單하게 하기 爲하여 便宜上 $EK(\theta_A - R) = \varphi_A$ 및 $EK(\theta_B - R) = \varphi_B$ 로 놓고 整理하면 다음과 같이 된다.

$$(3\alpha + 2) M_{AB} - M_{BA} = 6(\varphi_A - \frac{A\bar{x}_1}{l^2})$$

$$-M_{BA} + (3\beta + 2) M_{BA} = 6(\varphi_B + \frac{A\bar{x}}{l^2})$$

이것을 M_{AB} 와 M_{BA} 에 對하여 聯立으로 풀고 φ_A 와 φ_B 의 값을 도리키면

$$M_{AB} = \frac{1}{1+2\alpha+2\beta+3\alpha\beta} [2EK \{ (3\beta+2)\theta_A + \theta_B - 3(\beta+1)R \} - \frac{6\beta\bar{x}_1 A}{l^2} - \frac{2(2\bar{x}_1 - \bar{x})A}{l^2}]$$

$$M_{BA} = \frac{1}{1+2\alpha+2\beta+3\alpha\beta} [2EK \{ (3\alpha+2)\theta_B + \theta_A - 3(\alpha+1)R \} + \frac{6\alpha\bar{x} A}{l^2} + \frac{2(2\bar{x} - \bar{x}_1)A}{l^2}]$$

로 된다. 이제 上式中の 荷重項을 整理하건대

$$\begin{aligned} -\frac{6\beta\bar{x}_1 A}{l^2} - \frac{2(2\bar{x}_1 - \bar{x})A}{l^2} &= (-) \{ 6\beta\bar{x}_1 + 2(2\bar{x}_1 - \bar{x}) \} \frac{A}{l^2} \\ &= -(1+2\beta) \frac{2(2\bar{x}_1 - \bar{x})A}{l^2} + \beta \frac{2(\bar{x}_1 - 2\bar{x})A}{l^2} \\ &= -(1+2\beta) \frac{2(l-3\bar{x})A}{l^2} + \beta \frac{2(l-3\bar{x})A}{l^2} \end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned} \frac{6\alpha\bar{x} A}{l^2} + \frac{2(2\bar{x} - \bar{x}_1)A}{l^2} &= \{ 6\alpha\bar{x} + 2(2\bar{x} - \bar{x}_1) \} \frac{A}{l^2} \\ &= -(1+2\alpha) \frac{2(\bar{x}_1 - 2\bar{x})A}{l^2} + \alpha \frac{2(2\bar{x}_1 - \bar{x})A}{l^2} \\ &= -(1+2\alpha) \frac{2(l-3\bar{x})A}{l^2} + \alpha \frac{2(2l-3\bar{x})A}{l^2} \end{aligned}$$

로 되며, 한편 載荷에 의한 F. E. M. C_{AB}^0 및 C_{BA}^0 는

$$C_{AB}^0 = \frac{2(2\bar{x}_1 - \bar{x})A}{l^2} = \frac{2(l-3\bar{x})A}{l^2}$$

$$-C_{BA}^0 = \frac{2(\bar{x}_1 - 2\bar{x})A}{l^2} = \frac{2(l-3\bar{x})A}{l^2}$$

인 故로, M_{AB} 와 M_{BA} 는 結局 다음과 같이 나타내 짐을 알 수 있게 된다.

$$M_{AB} = \frac{1}{1+2\alpha+2\beta+3\alpha\beta} [2EK \{ (3\beta+2)\theta_A + \theta_B - 3(\beta+1)R \} - (2\beta+1)C_{AB}^0 - \beta C_{BA}^0]$$

$$M_{BA} = \frac{1}{1+2\alpha+2\beta+3\alpha\beta} [2EK \{ (3\alpha+2)\theta_B + \theta_A - 3(\alpha+1)R \} + (2\alpha+1)C_{BA}^0 + \alpha C_{AB}^0]$$

그리고 위의 두 式은 B. Johnston과 E. H. Mount 兩氏가 誘導한 一般式에 있어서 기둥材의 幅을 생각하였기 때문에 미친 影響에 의한 項을 無視하면 얻어지는 特別한 境遇에 不過하다는 것은 當然 한 것이다. 卽 이때에는, Fig. 1. 4에서 $b_{AB} = b_{BA} = 0$ 가 되고 또 $\bar{M}_{AB} = M_{AB}$, 및 $\bar{M}_{BA} = M_{BA}$ 로 되므로, 이것 을 B. Johnston과 E. H. Mount 兩氏의 一般式에 代入하면 얻어지게 된다.

1961년에 發刊된 Edgar Lightfort의 著書 "Moment Distribution"²⁷⁾에서는 기둥材의 幅을 無視하고, 部分剛接合節點에 있어서, 節點에 加해진 모우먼트 M 과 기둥에 對한 보材端의 相對的回轉角의 變化 θ 가 亦는 一次關係에 있다는 假定下에 節點回轉角에 對한 材端모우먼트의 式을 誘導하였다. Fig. 1. 5

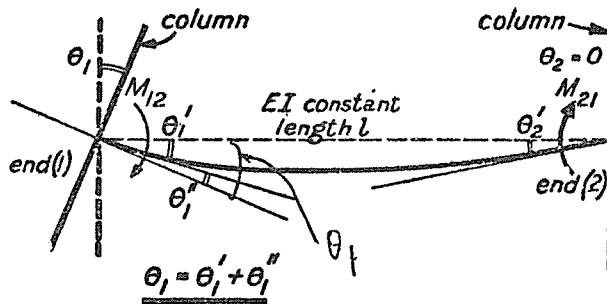


FIG 1.5 Effect of Column Rotation at one end of an elastically-connected Beam

에서 보 12의 (1)端과 (2)端에서의, 모우먼트 M 과 回轉角 θ 의 關係를 $M_{12} = \epsilon_1 \theta_1$ 및 $M_{21} = (-)\epsilon_2 \theta_2$ 라 하고 (1)端에서 기둥이 回轉角 θ_1 만을 일으켰다고 하였을 때 M_{12} 式을 다음과 같이 誘導하였다. 그렇게 하여 이 式으로 부터 (1)端에서의 Stiffness를 計算하고 또 分配率을 求하는 것을 說明하였다.

$$M_{12} = \frac{2EK}{1+2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_1\alpha_2} (3\alpha_2+2)\theta_1$$

但 $\alpha_1 = \frac{2EK}{\epsilon_1}$, $\alpha_2 = \frac{2EK}{\epsilon_2}$ 이다.

그리고 α_2 는 B. Johnston과 E. H. Mount 兩氏 式中の β 에 該當하는 것이다. 다음에 마찬가지로 M_{21} 式을 誘導하고, 到達率을 다음과 같이 求하였다.

$$\frac{M_{21}}{M_{12}} = \frac{1}{2+3\alpha_2}$$

E. Lightfoot 氏의 ϵ 는 다름 아니라 B. Johnston과 E. H. Mount 兩氏가 定義한 節點常數 γ 의 逆數에 지나지 않는다. 또 E. Lightfoot 氏는 $M = \epsilon \theta'$ 로 假定하는 것에 關聯하여 생기는 誤差는 設計荷重에 對해서 생기는 M 과 θ' 의 範圍에 對하여 그 平均値에 該當하는 ϵ 의 값을 選定하므로써 輕減될 것이라고 說明하였다. 그리고 全氏는 實際로 使用하는 範圍內에서의 M 과 θ' 의 關係는 剛性이 센 接合이 弱한 接合의 境遇에 比較하여 좀더 直線的이라는 說明을 덧붙였다.

다음에 載荷에 依한 (1) 端 및 (2) 端의 部分剛接合端모우먼트 C_{12} 와 C_{21} 를 다음과 같이 하여 求하였다. 이제 節點回轉角은 일어나지 않는다 하고, 보의 兩材端回轉角을 各各 θ_1 및 θ_2 라 하면 이때에 C_{12} 와 C_{21} 은 다음과 같이 나타내진다.

$$C_{12} = \frac{2EI}{L} (2\theta_1 + \theta_2) + C_{12}^0 = -\epsilon_1 \theta_1$$

$$C_{21} = \frac{2EI}{L} (2\theta_2 + \theta_1) + C_{21}^0 = -\epsilon_2 \theta_2$$

이 式으로 부터 θ_1 과 θ_2 의 값을 求하여 가지고 그 값을 다시 C_{12} 와 C_{21} 式에 逆代入하면 C_{12} 와 C_{21} 을 얻을 수 있고 다음과 같이 된다.

$$C_{12} = \frac{1}{1+2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_1\alpha_2} \{ (2\alpha_2+1)C_{12}^0 - \alpha_2 C_{21}^0 \}$$

$$C_{21} = \frac{1}{1+2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_1\alpha_2} \{ (2\alpha_1+1)C_{21}^0 - \alpha_1 C_{12}^0 \}$$

위에서 說明한 M_{12} 式과 C_{12} 및 C_{21} 의 兩式은 勿論 B. Johnston과 E. H. Mount 兩氏의 一般式의 特殊한 境遇이고 一般式으로 부터도 곧 얻어질 수 있다는 것은 勿論이다.

R. K. Livesley 氏는 1964년에 發刊된 그의 著書 "Matrix Method of Structural Analysis,"²⁸⁾에서 節點이 部分剛接合인 所謂 可撓性接合의 部材에 對하여 Stiffness를 計算하였다. 全氏도 其 各各은 節點回轉角과 部材端回轉角과의 差에 比例하는 모우먼트를 傳達하는 것으로 假定하였다. 그리고 그는 節點에 作用된 모우먼트 M 과 部材端의 相對的인 回轉角 ϕ 와의 關係를 節點剛性에 關聯있는 係數 k 를 使用하여 다음과 같이 나타냈다.

$$\phi = \frac{1}{4EKk} M$$

例를 들면 節點 A 및 節點 B에 있어서, 各各 $\phi_A = \frac{1}{4EKk_A} M_A$ 및 $\phi_B = \frac{1}{4EKk_B} M_B$ 로 놓는 等과 같다.

嚴密히 말하여 ϕ 와 M 은 一次의 關係에 있는 것은 아니나, 反覆法 (Iterative method)를 使用하여 反覆法의 各段階에서는 構造物은 線形의 系로서 取扱하고 이들의 總和를 求하므로써 非線形學動의 構造物은 其應力解析이 解決될 수 있다.