

直流自動磁分卷發電機의 最適線型電壓調整器에 관한 研究

22~4~2

On the Optimum Linear Voltage Regulator of a Self-excited DC Shunt Generator

원 중 수*
(Jong Swoo Won)

Abstract

This paper presents an optimum control of the field resistance for the self-excited DC shunt generator to keep a constant terminal voltage in case of the load change or the torque variation in the system.

The non-linearity of the system is linearized by applying the small signal technique and the linearized equation is solved by the maximum principle with the digital computer.

The optimal control value of the field resistance for the step error of the generator output voltage is obtained and the transient voltage characteristics in the system are investigated.

1. 序 論

近來에 와서 變分法, 最大原理, 動的計劃法(dynamic programming), 傾斜法(gradient technique)¹⁾²⁾等 系統最適化에 對한 理論的研究가 많은 成果를 거두게 됨에 따라 工學分野에서도 이러한 理論을 適用해서 各該當分野의 系統을 最適化하는 方法에 對해서 많은 研究가 活潑히 展開되고 있는 實情이다.

本 研究에서도 最適運轉을 目的으로 直流自動磁式 分卷發電機의 端子電壓을 一定히 維持하기 爲한 界磁抵抗 最適變化方法을 다루었다.

狀態變數로서 發電機의 回轉速度, 負荷電流 및 界磁電流를 잡고 界磁抵抗을 制御量으로 잡았을때 이 系統의 運動方程式은 非線形微分方程式이 되는 關係上 本 研究에서는 平衡點을 中心으로한 微小信號 線形化方法을 適用해서 系統方程式의 線形化를 試圖하였다 最適化하기 爲한 目的函數는

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (Q\Delta v^2 + R\Delta U^2) dt \quad (1)$$

로 하였다. 또한 最適化方法으로는 Pontriagin의 最大原理를 利用하였으며 本 研究에서는 電子計算機를 써서 最適制御値와 이때의 系統變化狀態를 求하였다.

2. 動特性方程式

그림 1은 本 研究에서 取扱한 直流自動磁式 分卷發電機의 結線圖이다 機械的인 運動方程式은

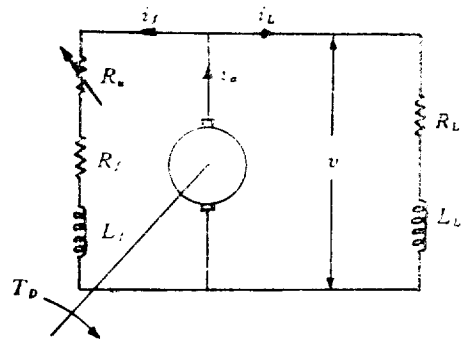


그림 1. 直流自動磁式分卷發電機
Fig. 1. Self-excited DC shunt generator.

$$J \frac{dw}{dt} + Dw + K_1 \phi i_a = T_D \quad (2)$$

이며 三相誘導電動機를 原動機로 使用하는 境遇 運轉部分에서의 토오크는

$$T_D = a_1 - a_2 w \quad (3)$$

로 表示된다 發電機의 端子電壓은

* 정희원 : 서울공대 공업교육과 조교수

$$v = e - i_a R_a - e_b - L_a \frac{di_a}{dt} \quad (4)$$

로表示되며

$$e = K_2 \phi(i_f, i_a) \omega \quad (5)$$

이다 界磁回路에서의 電壓電流關係式은

$$v = (R_a + R_f) i_f + \frac{d}{dt} \phi(i_f, i_a) \quad (6)$$

이고 한편 負荷回路에서의 電壓과 電流의 關係式은

$$v = L_L \frac{di_L}{dt} + R_L i_L \quad (7)$$

$$i_a = i_f + i_L \quad (8)$$

이 된다.

電壓, 電流, 角速度, 磁束, 界磁抵抗等 諸量이 平衡點을 中心으로 微小量만큼 變化하였을 때

$$\begin{aligned} v &= V + \Delta v \\ i_f &= I_f + \Delta i_f \\ i_L &= I_L + \Delta i_L \\ i_a &= I_a + \Delta i_a \\ \omega &= W + \Delta \omega \\ \phi &= \phi + \Delta \phi \\ R_u &= R_{u0} + \Delta R_u \end{aligned} \quad (9)$$

로表示되며

$$\Delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial i_f} \Delta i_f + \frac{\partial \phi}{\partial i_a} \Delta i_a = b_1 \Delta i_f + b_2 \Delta i_a \quad (10)$$

이다. 平衡狀態에 있을 때

$$\begin{aligned} DW + K_1 \phi I_a &= a_1 - a_2 W \\ V &= K_2 \phi W - I_a R_a - e_b \\ V &= (R_{u0} + R_f) I_f \\ V &= I_L R_L \end{aligned} \quad (11)$$

의 關係가 있으므로 L_a 를 無視하면

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X + B \Delta U \quad (12)$$

가 된다 여기서

$$\Delta X = \begin{pmatrix} \Delta \omega \\ \Delta i_L \\ \Delta i_f \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \Delta U = \Delta R_u$$

이다 또

$$\Delta v = C \cdot \Delta X \quad (14)$$

인데 $C = [C_{11} \ C_{12} \ C_{13}]$

이다. [行列 A, B, C 의 값은 附錄 1 參考]

3. 數值解

式(14)를 式(1)에 代入하여 目的函數는

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ (C \Delta X)^T Q (C \Delta X) + R \Delta U^2 \} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ \Delta X^T C^T Q C \Delta X + R \Delta U^2 \} dt \end{aligned} \quad (16)$$

가 얻어진다. J_0 를 最小로하는 最適制御量을 求하기 爲해서 Pontriagin의 最大原理 [附錄 2 參考]를 導入한바 이 方法을 利用하는 境遇 非線形微分方程式인 matrix Riccati equation.

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - C^T Q C \quad (17)$$

$$P(t_f) = 0 \quad (18)$$

을 풀어야한다 式(17)과 式(18)로부터 P 가 求하여지면

$$\Delta U = K \Delta X \quad (19)$$

가 되고 式(12)와 式(19)로부터

$$\Delta \dot{X} = (A + BK) \Delta X = G \cdot \Delta X \quad (20)$$

$$\Delta X(t_0) = \Delta X_0 \quad (21)$$

이다 式(20) 및 式(21)로부터

$$\Delta X = \exp(Gt) \Delta X_0$$

가 얻어지고 이것을 式(19)에 代入하면 ΔU 도 얻어진다. 式(17)은 非線形이므로 式(22)의 값을 求하는 過程에서 IBM 1130 電子計算機를 使用하였다. 그림 2는 $\Delta U, \Delta X, \Delta v$ 를 計算하기 爲한 電子計算機 플로그래밍의 차아트이다.

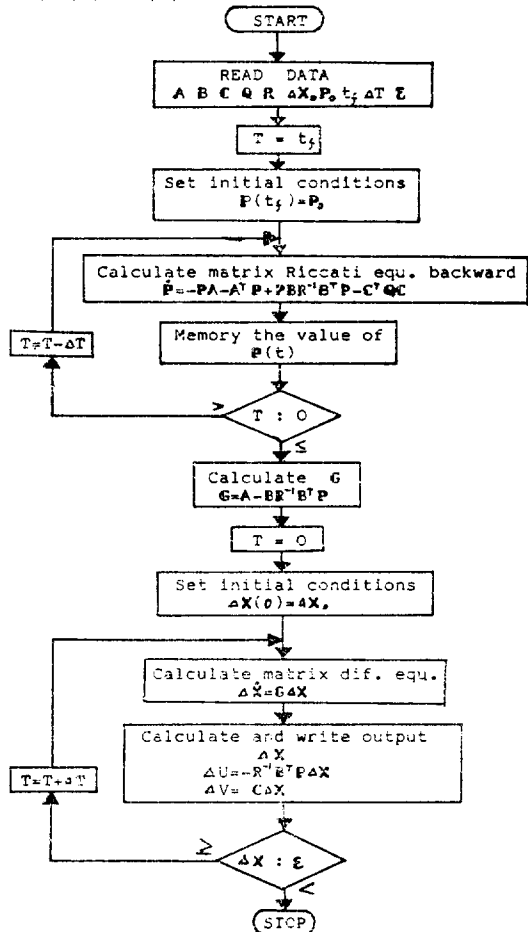


그림 2. 電子計算機의 플로그래밍
Fig. 2. Flow diagram of computer simulation.

4. 最適線型電壓調整器

式(9)와 式(47)을 利用하여 最適線型電壓調整器를 構成하면 그림 3과 같다.

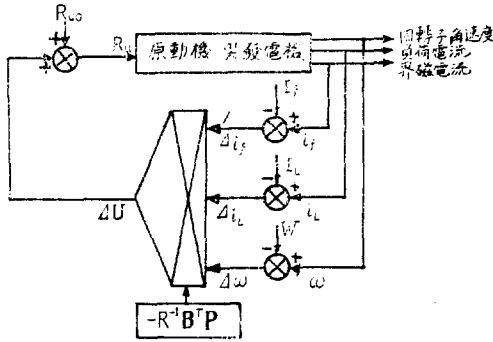


그림 3. 最適線型電壓調整器
Fig. 3. Block diagram of the optimum linear voltage regulator.

發電機로부터 回轉子角速度, 負荷電流, 界磁電流를 檢出하여 이것들을 平衡狀態의 角速度 W , 負荷電流 I_L , 界磁電流 I_f 와의 差 $\Delta\omega$, Δi_L , Δi_f 를 求하고 이것을 乘算器로 $-R^{-1}B^T P$ 와 곱하여 ΔU 를 求한다. 이 ΔU 와 R_{w0} 를 合하여 最適制御界磁抵抗 R_w 를 求한다.

5. 數值解析例

本研究는 發電機로서 直流 120[V], 1.5[kW] 分卷發電機를, 原動機는 60[Hz], 3φ, 220[V], 3[HP], 卷線形誘導電動機를 使用하였으며 實地로 系統定數를 求해서 數值解析을 하였다.

平衡狀態 即 $W=183.2$ [rad/sec], $I_A=10.3$ [A], $I_f=1.0$ [A]에서

$$A = \begin{bmatrix} -164.5 & -73.0 & -511.0 \\ 6.46 & -110.8 & 595.5 \\ 1.292 & -2.16 & -86.9 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$C = [0.646 \quad -1.08 \quad 59.72] \quad (25)$$

이 었다 [附錄 3參考].

이 系統은 時不變系統(time invariant system)이므로 매트릭스 리카치 方程式(matrix Riccati equation)을 解 結果 實地로 制御가 行하여지는 時間(初期時間)附近에서

$$P = \text{常數} \quad (26)$$

가 되었는데 몇 個의 R 값에 對하여 求한 P 및 G 의 값은 아래와 같다.

(1) $Q=1 \quad R=\infty$ 일 때

$$G = A \quad (27)$$

(2) $Q=1 \quad R=1$ 일 때

$$P = \begin{bmatrix} -0.0020 & -0.0049 & 0.1612 \\ -0.0049 & 0.0132 & -0.3765 \\ 0.1612 & -0.3765 & 13.040 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$G = \begin{bmatrix} -164.5 & -73.0 & -511.0 \\ 6.460 & -110.8 & 595.5 \\ 0.6468 & -0.6539 & -139.0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

(3) $Q=1 \quad R=0.1$ 일 때

$$P = \begin{bmatrix} 0.00099 & -0.00207 & 0.08562 \\ -0.00207 & -0.00469 & -0.1701 \\ 0.008562 & -0.1701 & 7.128 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$G = \begin{bmatrix} -164.5 & -73.0 & -511.0 \\ 6.46 & -110.8 & 595.5 \\ -2.053 & 4.646 & -372.0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

(4) $Q=1, \quad R=0.02$ 일 때

$$P = \begin{bmatrix} 0.00048 & -0.00091 & 0.04216 \\ -0.00091 & 0.00182 & -0.07857 \\ 0.004216 & -0.07857 & 3.725 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$G = \begin{bmatrix} -164.5 & -73.0 & -511.0 \\ 6.46 & -110.8 & 595.5 \\ -7.141 & 13.55 & -831.9 \end{bmatrix} \quad (33)$$

(1)에서 $R=\infty$ 의 物理的意味는 $R^{-1}=0 \quad \Delta U=0$ 即 界磁抵抗을 平衡值 R_{w0} 로 一定하게 놓는 境遇이다. 또 한 (1), (2), (3), (4)의 各各에 對해서 檢討하여보면 $g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{21}, g_{22}, g_{23}$ 의 값은 거의 變化가 없고 g_{31}, g_{32}, g_{33} 의 값만이 增加 또는 減小함을 알 수 있다. 即 g_{33} 의 값을 보면 R 값의 減小에 따라 $-86.9, -139.0, -372.0, -831.9$ 로 變化되었는데 이 값이 적어질수록 界磁電流의 減衰率도 커진다.

$$\text{初期條件 } \Delta X_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\text{即 } \Delta v_0 = [0.646 \quad -1.08 \quad 59.72] \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 8.12[V] \quad (35)$$

에 對하여 $\Delta U, \Delta v, \Delta i_f, \Delta i_L, \Delta\omega$ 를 計算한 結果 그림 4~그림 8을 얻었다.

그림 4는 端子電壓에 誤差가 發生하였을 때 目的函數를 最小로 하기 爲한 界磁抵抗變化(ΔU)를 그린 것이고 그림 5는 이때의 端子電壓變化量(Δv)를 그린 것이다. 端子電壓에 誤差가 생기면 制御界磁抵抗을 크게 變化시켜 誤差電壓을 빨리 減衰시키고 誤差가 점점 減少함

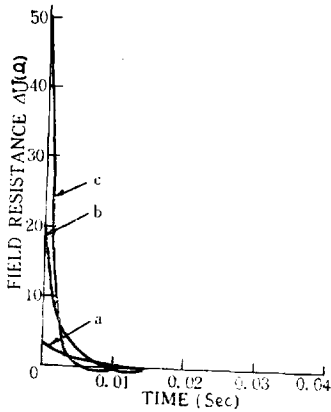


그림 4. 界磁抵抗對時間特性
Fig. 4. Relation of field resistance vs. time.

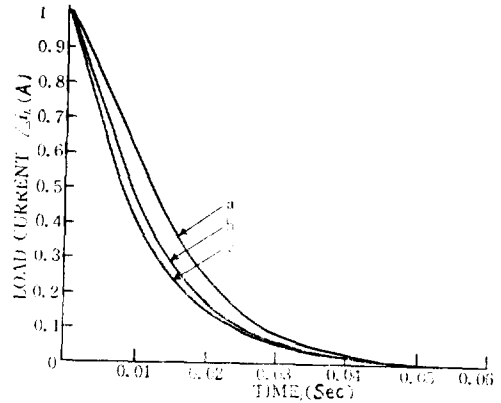


그림 7. 負荷電流對時間特性
Fig. 7. Relation of load current vs. time.

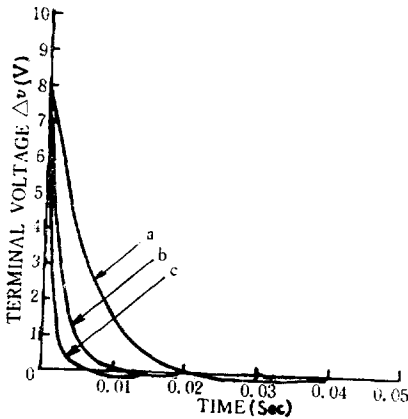


그림 5. 端子電壓對時間特性
Fig. 5. Relation of terminal voltage vs. time.

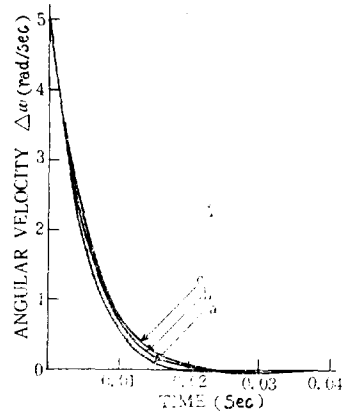


그림 8. 角速度對時間特性
Fig. 8. Relation of angular velocity vs. time.

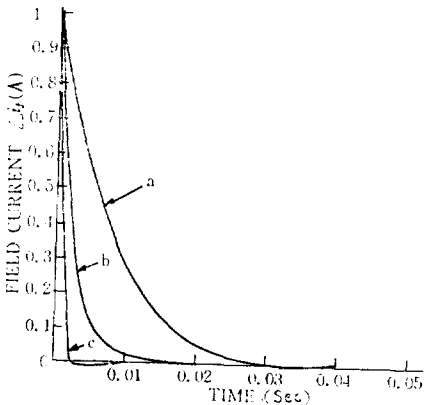


그림 6. 界磁電流對時間特性
Fig. 6. Relation of field current vs. time.

에 따라 制御界磁抵抗도 그 값을 減少시켜 平衡값으로 한다. 이들 그림에서 曲線 a, b 및 c는 各各 Δv 와 ΔU 와의 比重 即 Q 와 R 와의 比率로 1:1, 1:0.1, 1:0.02로 하였을 때인바 R 의 값에 따라 ΔU 및 Δv 의 變化가 다르게 나타났다. R 의 값을 적게 할수록 發電機端子電壓이 短時間에 平衡狀態에 도달하였다. 그러나 界磁抵抗의 變化量은 훨씬 增加하였다 實際의 linear regulator에서는 ΔU 가 어떤 값에 制限되어 있으므로 R 의 값을 取하는데 있어 ΔU 가 그 制限値를 넘지 않도록 定하여야 할 것이다. 그림 6은 界磁電流 變化를 그린 것인데 界磁電流는 R 값을 적게 取함에 따라 빨리 平衡狀態에 到達함을 알 수 있다. 그림 7은 負荷電流 變化를 그린 것인바 a, b, c 세 가지 境遇 모두 비슷한 減衰現象을 나타낸다. 그림 8은 電動機의 角速度變化인바 平衡點附近에서 原動機의 速度-토크特性이 急傾斜를 이루고 있어 回轉子 角速度의 減衰가 매우 빠르게 나타났다.

6. 結 論

이 研究은 直流 自動磁式 分卷發電機를 주어진 端子電壓으로 運轉하고 있을 때 負荷變動 또는 原動機의 回轉力 變動으로 因해서 發電機의 端子電壓이 變化하는 境遇 制御界磁抵抗을 變化시켜 端子電壓을 빨리 回復시킬 수 있는 制御方法을 取扱한 것이다. 系統의 動特性方程式을 平衡點附近에서 微小信號 線形化方法으로 線形化한 後 最大原理를 써서 電子計算機로 最適制御界磁抵抗調整方法을 求하였는마 그 結果를 要約하면 아래와 같다.

(1) 平衡狀態에서 角速度를 5[rad/sec], 負荷電流는 1[A], 界磁電流 또한 0.1[A]만큼 階段的으로 變化를 주었을 때 發電機 端子電壓도 8.12[V]식 階段的으로 增加하였으며 이것을 다시 平衡狀態로 하려면 制御界磁抵抗의 最適値는 그림 4의 b曲線(R=0.1인 境遇)에서와 같이 制御界磁抵抗을 瞬間的으로 20[Ω]으로 增加시켰다가 時間이 經過함에 따라 制御하면 된다.

(2) 電壓變化에 對한 誤差減衰를 더욱 빨리 하려면 R의 값을 더욱 적게 잡을 必要가 있으며 R를 0.02로 한다면 그림 5의 c曲線과 같이 電壓의 減衰는 더욱 빨리 이어난다. 그러나 이때 그림 4의 c曲線과 같이 制御界磁抵抗의 調整範圍는 커진다.

(3) 式 (24)에서 $b_{11}=0, b_{21}=0, b_{31}=-2$ 이므로 界磁電流만이 直接的으로 制御界磁抵抗의 影響을 받는다. 그러므로 制御界磁抵抗의 變化가 클 때는 界磁電流의 變化도 크게 나타난다.

(4) 回轉子의 角速度나 負荷電流의 時間的變化를 볼 때 制御界磁抵抗 ΔU의 影響은 僅少하였다.

(5) Δw와 Δi_L는 ΔU로 因한 影響이 微少하나 Δi_f는 크게 影響을 받는다. 그러므로 Δw, Δi_L, Δi_f의 函數인 發電機의 端子電壓 Δv의 變化는 Δi_f의 影響을 주로 받는다.

끝으로 本 研究에 特別히 많은 助言과 協助를 하여 주신 本大學 助教授 黃熙隆 및 助教授 韓松暉 두분에게 深甚한 謝意를 表示하는 바이다.

참 고 문 헌

1. Andrew P. Soge, "Optimum System Control", Printice-Hall Inc., 1968.
2. Michael Athans and Peter L. Falb, "Optimal Control" McGraw-Hill Inc., 1966.
3. S. Seely, "Electromechanical Energy Conversion," McGraw-Hill Inc., 1962.

4. Daniel D. McCracken and William S. Dorm, "Numerical Methods and Fortran Programming," John Wiley and Sons Inc., 1964.
5. 李承院, 李允鍾, 電氣機械

記 號 說 明

$w, W, \Delta w$	回轉子 角速度, 平衡狀態의 角速度 및 微小變分
$\phi, \Phi, \Delta\phi,$	界磁磁束, 平衡狀態의 磁束 및 微小變分
$i_L, I_L, \Delta i_L$	負荷電流, 平衡狀態의 負荷電流 및 微小變分
$i_f, I_f, \Delta i_f$	界磁電流, 平衡狀態의 界磁電流 및 微小變分
$R_u, R_{u0}, \Delta U$	制御界磁抵抗, 平衡狀態의 界磁抵抗 및 微小變分
L_L, R_L	負荷인덕턴스 및 抵抗
R_a	電機子抵抗
R_f	界磁卷線抵抗
J, D	回轉子慣性모멘트 및 摩擦係數
a_1, a_2	原動機回轉力定數
b_1, b_2	發電機磁束定數
e_s	브러쉬 接觸電壓降下

附錄 1. Matrix A

$$a_{11} = -\frac{D+a_2}{J}$$

$$a_{12} = -\frac{K_1\phi + K_1I_a b_2}{J}$$

$$a_{13} = -\frac{K_1\phi + K_1I_a(b_1+b_2)}{J}$$

$$a_{21} = \frac{K_2\phi}{L_L}$$

$$a_{22} = \frac{K_2Wb_2 - R_a - R_L}{L_L}$$

$$a_{23} = \frac{K_2W(b_1+b_2) - R_a}{L_L}$$

$$a_{31} = \frac{(L_L - b_2)a_{21}}{b_1 + b_2}$$

$$a_{32} = \frac{(L_L - b_2)a_{22} + R_L}{b_1 + b_2}$$

$$a_{33} = \frac{(L_L - b_2)a_{23} - (R_f + R_{u0})}{b_1 + b_2}$$

$$C_{11} = a_{21}L_L$$

$$C_{12} = a_{22}L_L + R_L$$

$$C_{13} = a_{23}L_L$$

附錄 2. 最大原理을 利用한 linear regulator

線形聯立微分方程式

$$\dot{X} = AX + BU, \quad X(t_0) = X_0 \quad (36)$$

로 表示되는 系統에서 目的函數(t_f 固定)

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [X^T Q X + U^T R U] dt \quad (37)$$

를 最小로 하는 制御量 U 를 求하는 問題를 生覺하자 이 問題를 푸는 方法은 여러가지가 있으나 여기서는 Pontriagin의 最大原理을 利用하기로 한다.

Hamiltonian H 는

$$H = \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T R U + \lambda^T (AX + BU) \quad (38)$$

이고

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 = RU + B^T \lambda \quad (39)$$

$$\frac{\partial H}{\partial X} = -\dot{\lambda} = QX + A^T \lambda, \quad \lambda(t_f) = 0 \quad (40)$$

이다. 또

$$\lambda = PX \quad (41)$$

로 놓으면

$$\dot{\lambda} = \dot{P}X + P\dot{X} \quad (42)$$

이다. 式 (39), (40), (42)로 부터

$$-QX - A^T PX = \dot{P}X + P\{AX + B(-R^{-1}B^T PX)\} \quad (43)$$

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \quad (44)$$

$$P(t_f) = 0$$

式(44)를 matrix Riccati equation이라 한다.

이 方程式은 最終時間과 最終值가 주어진 非線形微分 方程式이다

여기서 P 가 t_f 에서 t_0 까지 求하여지면

$$\dot{X} = AX - BR^{-1}B^T PX = GX \quad (45)$$

그러므로

$$X = \exp(G \cdot t) X_0 \quad (46)$$

가 되고

$$U = -R^{-1}B^T P X = K X \quad (47)$$

이 된다.

附錄 3. 系統定數

$$a_1 = 239.5 \text{ [N-m]}$$

$$a_2 = 1.27 \text{ [N-m/rad/sec]}$$

$$b_1 = 0.50 \text{ [Wb/A]}$$

$$b = 0.0 \text{ [Wb/A]}$$

$$J = 7.72 \times 10^{-3} \text{ [kg-m]}$$

$$D = 1.36 \times 10^{-3} \text{ [N-m/rad/sec]}$$

$$K_1 = 0.536 \text{ [N-m/Wb \cdot A]}$$

$$K_2 = 0.646 \text{ [V/Wb \cdot rad/sec]}$$

$$R_a = 1.08 \text{ [\Omega]}$$

$$e_s = 2 \text{ [V]}$$

$$R_L = 10.0 \text{ [\Omega]}$$

$$L_L = 0.1 \text{ [H]}$$

$$R_f = 57.8 \text{ [\Omega]}$$

$$R_{a0} = 45.2 \text{ [\Omega]}$$

$$W = 183.2 \text{ [rad/sec]}$$

$$\phi = 1.00 \text{ [Wb]}$$

$$I_a = 11.3 \text{ [A]}$$

$$I_f = 1.00 \text{ [A]}$$

$$a_{11} = -164.5 \quad a_{12} = -73.0$$

$$a_{13} = -511.0 \quad a_{21} = 6.46$$

$$a_{22} = -110.8 \quad a_{23} = 595.5$$

$$a_{31} = 1.292 \quad a_{32} = -2.16$$

$$a_{33} = -86.9 \quad b_{11} = 0.0$$

$$b_{21} = 0.0 \quad b_{31} = -2.0$$

$$C_{11} = 0.646 \quad C_{12} = -1.08$$

$$C_{13} = 59.55$$