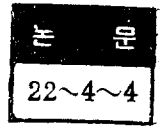


信號 흐름 行列에 의한 그래프 解析

Analysis of Graphs using the Signal Flow Matrix



김 정 덕*, 이 만 형**
(Chung Duk Kim, Man Hyung Lee)

Abstract

The computation of transmittances between arbitrary input and output nodes is of particular interest in the signal flow graph theory input.

The signal flow matrix $[T]$ can be defined by $[X] = -[T][X]$ where $[X]$ and $[Y]$ are input node and output node matrices, respectively.

In this paper, the followings are discussed;

- 1) Reduction of nodes by reforming the signal flow matrix.
- 2) Solution of input-output relationships by means of Gauss-Jordan reduction method
- 3) Extension of the above method to the matrix signal flow graph.

1. 序 論

同次線型 方程式은 Mason^{1,2,3}의 Signal Flow Graph에 의하여 位相數學的(topological)으로 묘사될 수 있고, 이 方法은 自動制御, 回路解析분야에 있어 信號 혹은 變數사이의 관계를 圖式的으로 관찰하여 系統的으로 구할 수 있으므로 널리 사용되고 있다.

Signal Flow Graph도 系(System)를 解析하는 경우에 있어, 位相數學的인 性質때문에 원상대로 圖式된 것에서 행하여야 한다. 그러나 복잡한 系의 解析시에 Mason의 이득공식은 사용하기 어렵고 任意變數 사이의 관계를 찾고자 할때는 Signal Flow Graph를 다시 Operation해야 하는⁴ 절점이 수반되며 transmittance가 行列일 경우에는 일반적으로 Mason의 이득공식을 이용할 수 없다.

본 논문에서는 Signal Flow Matrix⁵를 도입하여 回路網函數들을 보다 쉽고 기계적으로 구할 수 있는 해석법을 소개하며 Matrix Signal Flow Graph⁶인 경우에도 어려운 절차를 행하지 않고 이득을 구할 수 있는 방법을 얻고자 한다.

2. 信號 흐름 行列(Signal Flow Matrix)의 定義

信號 흐름 그래프는 同次方程式의 集合으로 부터

* 정희원 : 육군사관학교 교수부 전기과 조교수(공학박사)

**정희원 : 육군사관학교 교수부 전기과 전임강사

$$y_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} y_j + x_i$$

단, $i, j = 1, 2, \dots, n$ (1)

로 주어 지고 여기서

y_i, y_j : 從屬마디(nodes), sink node면 出力마디
 x_i : 獨立마디, y_i 마디로 흘러 들어오는 入力마디
 t_{ji} : y_j 마디에서 y_i 마디 사이의 트랜스미턴스(transmittance)이다.

그림 1은 n 개의 獨立마디와 從屬마디를 갖고 있는 信號 흐름 그래프이다.

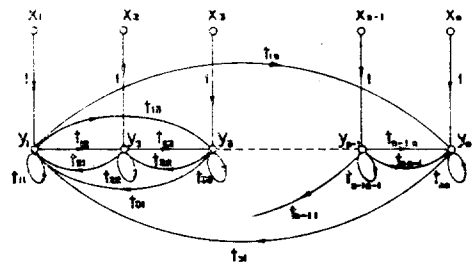


그림 1. n 개의 獨立마디와 從屬마디를 갖는 信號 흐름 그래프

Fig. 1. Signal flow graph having an independent nodes and dependent nodes.

그림 1에서 信號 흐름 그래프의 그릴반식은⁷⁾

$$y_1 = t_{11} y_1 + t_{21} y_2 + \dots + t_{n1} y_n + x_1$$

$$y_2 = t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \dots + t_{n2}y_n + x_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \dots + t_{nn}y_n + x_n \quad (2)$$

표시되는데 이를 獨立마디와 從屬마디 및 트랜스미턴스를 行列⁷⁾로 나타내면

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1+t_{11} & t_{21} \dots t_{n1} \\ t_{12} & -1+t_{22} \dots t_{n2} \\ \vdots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} \dots -1+t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

이 된다. (3)식에서 알 수 있는 바와 같이 獨立마디, 從屬마디 및 트랜스미턴스 사이의 관계를 行列로 표시할 수 있는데 이를 信號 흐름 行列(Signal Flow Matrix)이라고 정의한다.⁵⁾

信號 흐름 行列의 일반적 표시는

$$[X] = -[T][Y] \dots\dots\dots (4)$$

인데 $[X], [Y]$ 는 $n \times 1$ 의 行列,

$[T]$ 는 $n \times n$ 의 正方行列이다.

즉

$$[X] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [Y] = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$[T] = \begin{pmatrix} -1+t_{11} & \dots & t_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & \dots & -1+t_{nn} \end{pmatrix}$$

으로 그 性質은

- (i) $[X]$ 는 獨立마디의 集合이고, $[Y]$ 는 從屬마디의 集合으로 構成되어 있다.
- (ii) $[T]$ 의 要素 t_{ij} 는 j 마디에서 i 마디로 흘러들어가는 트랜스미턴스이며, 그 主對角線上的 -1 은 從屬마디 y_1, y_2, \dots, y_n 에 해당하고 t_{ii} 는 y_i 마디의 self loop이다.
- (iii) 순방향통로(forward path)와 棼환로(feedback path)의 트랜스미턴스는 主對角線上的 아래와 위에 존재한다.

이와 같이 信號 흐름 그래프와 信號흐름 行列은 1對1로 對應하므로 信號흐름 行列에서 새로운 계산법을 얻고자 한다.

3. 信號 흐름 行列의 次數 消去

多重 入出力을 갖는 그래프에서 K 마디의 線型同次方程式을 생각하면 (2)로부터

$$y_k = t_{1k}y_1 + t_{2k}y_2 + \dots + t_{nk}y_n + \dots + t_{nk}y_n + x_k \dots\dots\dots (5)$$

이다. 이에 入力函數로서 주어지는 出力의 發見은 單一入出力關係를 구함으로서 해결할 수가 있다. 이득을 구할때에 필요없는 마디들에 대해서 除去할 수가 있다^{8) 9)}. 한마디가 다른 마디들에 의해서 代치될때 이를 분리시킨다고 말하는데 없어진 마디는 다른마디들

에 흡수되어 버린다.

(5)식을 y_k 에 대하여 정리하면

$$y_k = \frac{t_{1k}}{1-t_{kk}}y_1 + \dots + \frac{t_{k-1k}}{1-t_{kk}}y_{k-1} + \frac{t_{k+1k}}{1-t_{kk}}y_{k+1} + \dots + \frac{t_{nk}}{1-t_{kk}}y_n + \frac{x_k}{1-t_{kk}} \quad (6)$$

으로 이를 (2)식에 포함된 y_k 에 代치하면 y_k 마디가 다른마디들에 의하여 흡수된다. 이를 信號 흐름 行列로 표시하면 새로운 行列을 구할 수가 있다. 즉 y_k 마디를 분리시키면 信號 흐름 行列의 x_k 마디와 $[T]$ 의 k 行 k 列이 소거된 (7)식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} x_1 + \frac{t_{k1}}{1-t_{kk}}x_k \\ \vdots \\ x_{k-1} + \frac{t_{k,k-1}}{1-t_{kk}}x_k \\ x_{k+1} + \frac{t_{k,k+1}}{1-t_{kk}}x_k \\ \vdots \\ x_n + \frac{t_{kn}}{1-t_{kk}}x_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1+t_{11} + \frac{t_{1k}t_{k1}}{1-t_{kk}} \dots \\ \vdots \\ t_{1,k-1} + \frac{t_{1k}t_{k,k-1}}{1-t_{kk}} \dots \\ t_{1,k+1} + \frac{t_{1k}t_{k,k+1}}{1-t_{kk}} \dots \\ \vdots \\ t_{1n} + \frac{t_{1k}t_{kn}}{1-t_{kk}} \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

(7)식을 검토해 볼때 y_k 마디가 다른 마디들에 흡수되거든 $[T]$ 의 信號흐름 行列의 要素를 t_{ij} , 입력 x_j 가 흡수된후 i 行 j 列의 要素를 t'_{ij} , 입력을 x'_j 라 두면

$$t'_{ij} = t_{ij} + \frac{t_{ik}t_{kj}}{1-t_{kk}} \quad (8)$$

$$x'_j = x_j + \frac{t_{kj}}{1-t_{kk}} \quad (9)$$

의 關係식이 성립한다. 따라서 任意의 마디를 다른 마디들에 흡수시킨후의 트랜스미턴스 t'_{ij} 와 입력 x'_j 의 일반식이 (8), (9)로 주어졌으므로 우리가 필요로 하지 않는 마디들에 대하여 계산을 되풀이 한다면 소거해 나갈 수 있다. 따라서 電子計算機로 programming 하여 data을 처리하고자 할 때 任意의 소거할 마디들에 대한 소거가 쉽게 다루어 질 수 있다.

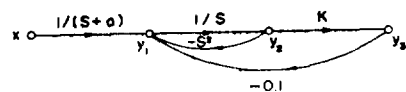


그림 2. 간단한 信號 흐름 그래프
Fig. 2. A simple signal flow graph.

예제 1) 그림 2와 같은 信號 흐름 그래프에 傳達函數를 구해 보자.

그림 2에서 신호 흐름 행렬은

$$\begin{pmatrix} x/(s+a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & -s^2 & -0.1 \\ 1/s & -1 & 0 \\ 0 & K & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

y_2 마디를 소거하면

$$\begin{pmatrix} x/(s/a) \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1-s & -0.1 \\ K/s & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

y_1 마디를 소거하면

$$\left[\frac{x}{(s+a)} \cdot \frac{K/s}{(1+s)} \right] = - \left[-1 + \frac{-0.1K/s}{(1+s)} \right] \left[y_3 \right]$$

따라서 전달함수 y_3/x 는

$$y_3/x = K/(s+a) (s^2+s+0.1K)$$

로서 구해진다.

4. 信號 흐름 行列에서 Gauss-Jordan¹⁰⁾

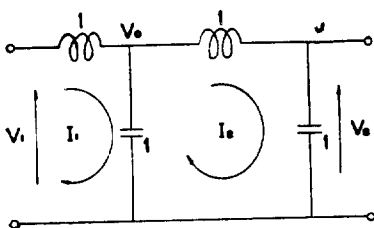
消去法 適用

信號 흐름 그래프에서 Mason의 이득공식은 오직 입력출력사이에서만 구할 수 있을뿐 任意의 두마디 사이에서는 그 관계를 구할 수 없다. 그러므로 任意의 두마디 사이의 回路網函數를 구하고자 할때는 신호 흐름 그래프의 모양을 적당히 바꾸어야 하는데 任意의 非入力源(nosource) 마디를 入力源(source) 마디로 轉換하는 방법⁴⁾ 등이 있으나 구하고자 하는 마디들에 대해 개개의 새로운 信號 흐름 그래프를 얻어야 하는데 信號轉換과 복잡한 回路에서는 그 이용이 곤란하다. 그러나 신호 흐름 행렬에서는 우리가 해석하고 싶은 任意의 마디를 제외하고 나머지는 소거해 버릴 수 있음을 이용하면 소거한후 새로 얻은 신호 흐름 행렬은

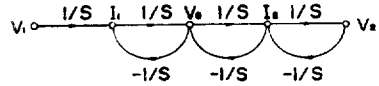
$$[X''] = -[T''] [Y''] \tag{10}$$

로서 $[X'']$, $[Y'']$, $[T'']$ 는 불필요한 마디들을 소거해 버린후 새로 얻는 독립, 종속마디 및 트랜스미션스의 집합으로 쓸 수 있다. (10)식에서 Gauss-Jordan 소거법을 이용하기 위하여 Gauss-Jordan 형으로 바꾸고 계산해 버리던 任意마디들 사이의 관계를 보다쉽게 구할 수 있다.

예제 2) 그림 3에서 사다리(Ladder)회로망에서 I_1/V_1 , V_0/V_1 , I_2/V_1 , V_2/V_1 을 구하라.



(a) (henry, farad)



(b)

그림 3. (a) 사다리 회로망과 (b) 신호 흐름 그래프

Fig. 3. (a) Ladder network and (b) Its signal flow graph

신호 흐름 그래프에서 신호 흐름 행렬을 구하면

$$\begin{pmatrix} V_1/s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & -1/s & 0 & 0 \\ 1/s & -1 & -1/s & 0 \\ 0 & 1/s & -1 & -1/s \\ 0 & 0 & 1/s & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_0 \\ I_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

이를 Gauss-Jordan 형으로 바꾸면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/s & 0 & 0 & V_1/s \\ -1/s & 1 & 1/s & 0 & 0 \\ 0 & -1/s & 1 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & -1/s & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이 되고 여기 Gauss-Jordan 소거법을 사용하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{s^3+2s}{s^4+3s^2+1} V_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{s^2+1}{s^4+3s^2+1} V_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{s}{s^4+3s^2+1} V_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{s^4+3s^2+1} V_1 \end{pmatrix}$$

이 된다. 이를 다시 원식으로 환원하면

$$\begin{pmatrix} \frac{s^3+2s}{s^4+3s^2+1} V_1 \\ \frac{s^2+1}{s^4+3s^2+1} V_1 \\ \frac{s}{s^4+3s^2+1} V_1 \\ \frac{1}{s^4+3s^2+1} V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_0 \\ I_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

의 관계가 나온다. 따라서

$$I_1/V_1 = \frac{s^3+2s}{s^4+3s^2+1}$$

$$V_0/V_1 = \frac{s^2+1}{s^4+3s^2+1}$$

$$I_2/V_1 = \frac{s}{s^4+3s^2+1}$$

$$V_2/V_1 = \frac{1}{s^4+3s^2+1}$$

이 얻어 지고 기타 함수들도 구할 수가 있다.

5. 行列 信號 흐름 그래프(Matrix Signal Flow Graph)와 信號 흐름 行列

信號 흐름 그래프의 마디와 트랜스미션스는 스칼라 양이므로 스칼라 신호 흐름 그래프이다. 그러나 행렬

신호 흐름 그래프는 同次線型方程式의 集合인 행렬 양으로서 일반적으로 Mason의 이득공식을 이용할 수가 없다. 이 행렬 신호 흐름 그래프는 Watson¹¹⁾에 의해 소개되었으며, Mason¹²⁾, Robichaud¹³⁾에 의하여 명백해졌고 최근에 線型系의 해석과 설계에 많이 이용되고 있다.

행렬 신호 흐름 그래프의 이득을 얻는 방법에는 기초적인 감소법과 Return loop method, Optimum Topological Method⁶⁾ 등이 있으나 처음 두가지는 그래프를 조작할때 혼란을 일으키기 쉬우며, 마지막 것은 Optimum topological method routes와 삽입 마디 선택이 어렵고 복잡하다.

그러므로 행렬 신호 흐름 그래프를 신호 흐름 행렬로 나타내면 (3)식에서 [X], [Y]의 X, Y가 행렬이고 [T]의 T 또한 행렬일 것이다. 그리고 主對角線上的 것은 $I - T_{ii}$ 로서 I는 unit matrix임을 알 수 있다.

만약 K가 3일때 (3)식을 쓰보면

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -I + T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & -I + T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & -I + T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

이다.

여기서 행렬 Y_2 를 소거하면

$$\begin{pmatrix} X_1 + T_{21} (I - T_{22})^{-1} \\ X_3 + T_{23} (I - T_{22})^{-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -I + T_{11} + T_{12} (I - T_{22})^{-1} T_{21} \\ T_{13} + T_{12} (I - T_{22})^{-1} T_{23} \\ T_{31} + T_{32} (I - T_{22})^{-1} T_{21} \\ -I + T_{33} + T_{32} (I - T_{22})^{-1} T_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

이 나온다. 따라서 행렬 신호 흐름 그래프로 신호 흐름 행렬로 표시하면 마디들을 소거할 수가 있다. 특히 여기서 신호 흐름 그래프의 계산시 각 요소들의 곱의 순서에 주의해야 한다.

예제 3) 그림 4에서 y_1', y_2' 마디들을 소거하라.

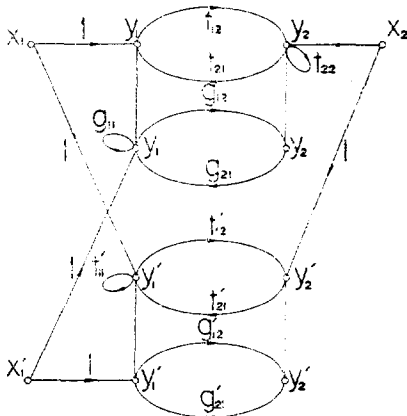


그림 4. 행렬 신호 흐름 그래프

Fig. 4. Matrix signal flow graph.

그림 4에서 scattering matrix¹⁴⁾로 나타내면

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & t_{21} \\ t_{12} & -1 + t_{22} \\ -1 + t'_{11} & t'_{21} \\ t'_{12} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & -1 \\ -1 & g'_{31} \\ g'_{12} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

으로 2행2열을 소거해 버리면

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1' \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & g'_{21} \\ g'_{12} & -1 \end{pmatrix}^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & t_{21} \\ t_{12} & -1 + t_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 + t'_{11} & t'_{21} \\ t'_{12} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & g_{21} \\ g_{12} & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 + g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

이 나온다. 즉 종속마디인 y_1', y_2' 가 소거되었다.

上記 예제에서 알 수 있는 바와 같이 행렬 신호 흐름 그래프도 마디들을 기계적으로 소거해 나갈 수 있다. 따라서 系의 구하고자 하는 함수들도 마디들을 소거함으로써 얻어진다.

일반적으로 신호 흐름 행렬이 주어졌을때 필요한 마디들과 불필요한 마디들에 재배열을 행한후 分割하여 불필요한 마디들을 한꺼번에 소거해 버릴 수 있다. 따라서 복잡한 系를 電子計算機로 해석하고자할 때 보다 빠르게 결과를 얻을 수 있다.

6. 結 論

信號 흐름 그래프에서 도입한 信號 흐름 行列은 1對 1의 對應관계가 있으므로 信號 흐름 行列로서 解析하면 다음과 같은 結論을 얻는다.

(1) 信號 흐름 그래프는 topological한 성질이 있기 때문에 原型대로 두고 信號 흐름 행렬에서 불필요한 任意의 마디들을 소거해 나감으로써 이득을 보다 편리하고 精確히 구할 수 있다.

(2) 回路網函數들을 구하는데 있어 Gauss-Jordan의 방법을 이용할 수 있으므로 그래프의 새로운 變型을 하지 않고도 가능하며 電子計算機의 應用度를 높였다.

(3) 行列 信號 흐름 그래프에서는 Mason의 이득공식을 일반적으로 사용할 수 없으나 信號 흐름 行列에서는 그 이득계산이 가능하다.

(4) 信號 흐름 行列에서 마디들을 적당히 재배열하여 불필요한 마디들을 分割하여 소거하여 버리면 한꺼번에 필요한 마디들 사이의 關係를 얻을 수가 있다.

참 고 문 헌

- 1) S.J. Mason, "Feedback Theory; Some Properties of Signal Flow Graphs," Proc. IRE, Vol. 41, pp. 1144~1156, Sept, 1953.

- 2) S.J. Mason, "Feedback Theory; Further Properties of Signal Flow Graphs," Proc. IRE, Vol. 44, pp. 920~926, July 1956
- 3) S.J. Mason and H.J. Zimmerman, *Electronic Circuits, Signals, and Systems*, New York, Wiley, 1960.
- 4) 金炯甲, "Signal Flow Graph에 의한 回路分析", 대한전기학지, Vol. 17 No. 4 1968, 7.
- 5) M.S. Vasudeva, "Signal Flow Matrix-A New Approach to Signal Flow Graphs," IEEE Trans. Circuit Theory. Vol. CT-14, March 1967.
- 6) D.E. Riegle and D.M.Lin, "Matrix Signal Flow Graphs and Optimum Topological Method for Evaluating Their Gains" IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, Sept 1972.
- 7) W.H.Kim, *Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks*, New York Columbia University Press 1962 pp. 1~112
- 8) Louis Weinberg, *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1962, pp. 95 ~105, pp. 140~144.
- 9) D.E.Riegle, "Topological Properties of Matrix Signal Flow Graphs," Ph.D. Dissertation, Purdue Univ., Lafayette, Ind., June 1971.
- 10) L.P. Huelsman, *Digital Computations in Basic Circuit Theory*, McGraw-Mill, New York, 1968 pp. 100~107
- 11) P.C.Watson, "Sampled-data Feedback Systems and Iteration Procedure for Simultaneous Equations," M.S. Thesis, Dep. Elec. Eng., M. I.T., Cambridge, Mass., May 1955.
- 12) S.J.Mason, "About such things as Unistors, Flow Graphs, Probability, Partial Factoring, and Matrices," IRE Trans, Circuit Theory, Vol, CT-4 pp. 90~97, Sept. 1957.
- 13) L.Robichaud, M. Boisvert, and J. Robert, *Signal Flow Graphs and Applications*. Englewood Cliff, N., J. Prentice-Hall, 1962 pp. 181~195.
- 14) K.L. Su, *Active Network Synthesis*, McGraw Hill, New York, 1965, pp. 334~344.