

論 文

## Time Dependent Correlation Function 과

## 그의 應用에 關한 研究

Some Study on Time Dependent Correlation Function and Its Applications

安 秀 吉\*

(Ann, Souguil)

## 要 約

原因과 結果間의 位相과 work 사이의 關係를 correlation function 的 見地에서 檢討하였고 continuous signal에 包含되어 있는 redundancy 를 指摘하여 sampling 取扱의 根據를 auto correlation 面에서 보였다.

두 信號사이의 Correlation 의 時間變動을 보여줄 수 있는 Time Dependent Correlation Function 을 定義하여 PLL 回路에서 그 有用性을 보였다.

끝으로 多相包絡線檢波法에 依한 特性的 改善을 T.D.Correlation Function에 依한 Correlation Analysis를 通하여 立證하였다.

## Abstract

The phase relation between motive force and result is reviewed in view point of the correlation function as well as the redundancy in a continuous signal which permits the sampled treatment.

A new correlation function (to be named Time Dependent Correlation Function) which is a function of time, is defined in order to indicate the variation of the correlation between two signals.

As application a phase locked loop is analysed which shows the increase of correlation between input signal and output signal of the loop after the application of the input signal.

Finally again the T.D.Correlation Function method is used to show how the polyphase envelope detection-method is justifiable by this method.

## 序 論

二十世紀에 들어서면서부터 能動素子의 發達과 함께 電氣通信手段이 人類에 큰 寄與를 하게 되었는데 必然的인 歸結로서 通信의 能率의 問題와 通信能力의 限界問題에 研究者の 關心이 쓸리게 되었다. Morse 는 時代에 앞서서 Alphabet 的 使  
用빈도를 감안하여 가장 자주 나오는 “e”字에 dot 하나를 配當하여 能率의 向上을 도모하였고 1924

年에 美國의 Nyquist 와 獨逸의 Küpfmüller 는 情報傳達의 速度와 占有 Band 와의 關係를 밝혀냈는데 이는 이미 한 Medium 的 通信能力의 限界를 指摘한것과 같다.

1936年에 Armstrong 은 F.M. 를 實現하여 變調方法에 따라 Noise에 依한 교란이 달라지는 것을 보였고 한편 Noise에 依한 영향은 좀더 重要視되어야 한다는 것이 인식되기 시작하였다.

變調의 여려方法을 비교하기 위해서 Coding Theory 가 共通의 尺度를 提供하였고 주어진 Medium에 對해서 PCM 이 最善의 結果를 준다는 것을 알게 되었다.

\* 正會員, 서울大學校 工科大學 電子工學科  
Electronics Department, College of Engineering,  
Seoul National University

한편 한 Random한 과정이 전정 Random하기 위해서는 어느 한 Random Signal Source의 순간값과 다른 Random Signal Source의 같은 순간값과의 사이에 아무런 關聯이 없어서 한 Source의 순간값을 안다는 것은 또 하나의 Source의 순간값을 아는데 도움이 안되는 것과 마찬가지로 한 Source의 순간값과一瞬後의 瞬間值와는 아무런 관련이 없어야 하기 때문에 잡음에 파문쳐 있는 周期信號는 S/N 比가 아무리 적어도 긴 時間을 두고 原信號(雜音의 영향을 받지 않는)와의 사이에 관係성을 가졌다. 다시 말해 Correlation이 零이 아니라는 것을 알게되어 時間만充分히 있으면 어떤 Noisy Medium을 통해서라도 通信이 可能하다는 것을 알게되었다.

Norbert Wiener는 二次大戰中에 이러한 信號 사이의 Correlation에 關한 研究를 많이 行하여, Yellow Peril이라는 準暗號로 불리웠고 戰後에 Wiley 出版社로부터 "Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series"라는 書名으로 出版된 비밀報告에 그 結果를 실었다.

初期에 Energy Domain에서 計算되었던 Correlation Function은 週期函數에 適用시키기 위해서 Power domain에서의 定義를 거쳐 時間平均值를 取扱하게 되고 時間平均值로서의 Correlation Function은 그 Fourier Transform Power Spectrum과 一致한다는 것이 N. Wiener와 蘇聯의 Khinchine에 依해서 指摘된 後 더욱 더 많이 使用되게 되었다. 近來는 Correlation을 찾는 두函數(또는  $\tau$ 란 間隔을 두고 본同一函數) 사이의 時間間隔  $\tau$ 를 System을 信號가 경과하는 時間과 같게 놓거나 이것이 짧을 때는 無視하고 入力信號와 出力信號 사이의 Correlation Function을 찾는 方法이 많이 使用되고 있다.

System이 Time Varying이 되어서 入力信號와 出力信號 사이의 Correlation이 달라지는 것을 생각할 수 있는데 在來의 Correlation Function<sup>1)</sup>은 全 時間에 關한 平均으로서 定義되기 때문에 Correlation Function이 관찰時點  $t$ 에 無關係하여  $t$ 에 對해서는 常數가 되나 System의 時間的性質 等을 알기 위해서는 Correlation Function

이 時間의 函數로 나타나는 것이 必要하게 된다.

本論文에서는 이러한 Correlation의 時間變化를 보여줄 수 있는 Correlation Function 다시 말해서 時間函數로서의 Correlation Function을 定義하되 平均時間을 對象函數의 特性을 감안하여充分히 긴時間동안 平均하되 너무 긴時間동안 平均시키는 일은 없게 使用하여 Correlation의 起伏을 볼 수 있는 따라서 時間  $t$ , 平均區間  $T$  및 函數間의 時間差  $\tau$  等의 函數인 Time Dependent Correlation Function  $R(\tau, t, T)$ 을 定義하고 活用例를 通해서 利點을 살펴보았다. 쳐음 節에서 電力이나 Energy를 授受하기 為하여 電壓과 電流사이에 있어야 할 Correlation을 論하였고 第2節에서는 Correlation Function의 導入의 起源이 되어야 할 時間을 前後한 Redundancy의 介入을 指摘하여 時間面에 있어서의 Sampling 取扱의 根據를 보여주고 있다.

第3, 4節에서 Time Dependent Correlation Function을 定義하고 簡單한 函數에 이를 適用시켜 보았다. 第5節에서는 이 Time Dependent Correlation Function을 入力信號에 依해서 自體發振信號周波數를 바꿔가는 Phase Locked Loop(PLL)에 適用하여 보이기 위해서 먼저 PLL의 說明을 하고 第6節에서 그 Analysis를 行하였고 第7節에서 入力周波數와 出力周波數사이의 Time Dependent Correlation Function을 求하여 PLL System의 變遷에 依한 Correlation의 變遷을 보였다. 但, 第6節 및 第7節에서 PLL에 包含된 Filter는 no filter와 1st order low pass filter의 경우에 限定하였다. 第8節에서는 Time Dependent Correlation Function의 또하나의 適用例로서 多相包絡線檢波의 再生充實度가 改善됨을 Correlation의 增加로서 說明하였다. 그밖에도 適用할 곳이 많을 것으로 믿어진다.

## 1. 原因과 結果間의 Correlation

Work의 概念에는 우선 原因이 되는 量(例 힘)이 있고 그 結果로 나타나는 變化量(例 그結果變位)이 있어서 이 두個의 量사이의 關係에 따라서 Work가 行하여지기도 하고 Work를 當하기도하고 또한 結果가 나타나 있는데도 Work가 零

인 境遇가 있다. 이 두個의 量을 共軛量<sup>2)</sup>이라고 한다면 Work는 이 두量의 Scalar 積이기 때문에 그 方向들 사이의 關係가 重要하다. 이 共軛量은 自然界에 있어서 어느便이 原因이 되고 어느便이 結果가 되는지는 簡單히 말할 수 없어서 原因과 結果가 엉켜 있는 것이 元來의 狀態이다. 이러한 關係에 있는 共軛量은 힘과 變位以外에도 많이 있어서 電壓과 電氣量, 磁界와 磁力線密度, Torque와 回轉角等이 있고 Scalar 積이 工率이 되는 경 우로서는 電壓과 電流, Torque와 回轉速度, 힘과 速度가 있다.

이 두量 사이의 關係는 重要하다. 例를 들어서 電池가 抵抗에 電流를 供給하고 있을 때 電壓과 電流가抵抗에서 正電位로부터 負電位에 흐르는 것을 基準으로 할 때抵抗에서는 正의 電力이 消耗되고 電源에서는 이 Convention에 따라 負의 電力이 消耗(다시 말해서 正電力의 創造)되는 것이다. 正弦波의 電壓과 餘弦波의 電流에 依해서 電力은 電源과 負荷 어느 한편으로만 供給될 수가 없다. 어느 한瞬间에는 電源에서 負荷로 다음瞬间에는 負荷에서 電源으로 흐르는 方向을 바꿔서 平均的으로 電力의 흐름은 없다. 이는 어느瞬间에서도 이 共軛量들 사이의 位相差는 90°이고 어느瞬间에서나 그 Scalar 積은 零이다. 電力은 چん時間의 平均으로서 Phasor의 回轉에 關해서는 不變量이다.

이 共軛量들이 正弦波의 경우같이 周期的으로 變하는 量일 때 두量의 周波數가 完全히 一致하고 있어야 電力이 傳送된다는 것도 알려져 있는 事實이다. 限定된 時間內에서 어떠한 電力의 授受가 可能하더라도 چん時間사이를 平均하면 電壓 Phasor와 電流 Phasor가 相對的으로 움직이기 때문에 두量사이의 關係가 電力を 준만큼을 다시 찾아가게 되어서 平均이 零이 되기 때문이다. 다시 말해서 한 周波數의 電壓은 微小하게나마 他周波數의 어느 電流와의 사이에도 電力を (چん時間 平均해서) 一方으로 보낼 수 없고 따라서 Work는 行할 수가 없다. 따라서 電力의 見地에서 각 周波數는 獨立的으로 行動하기 때문에 直流電力과 交流電力 또는 周波數가 다른 두個의 現象이 同一한 回路에서 일어나 있어도 그 電力의 計算은 獨立의이다. 負抵抗의 概念이 一般的으로 交流에

對해서 成立한다면 반드시 그때 交流電力의 創造는 直流電力의 消耗가 뒷받침하고 直流交流 어느 한편에 對해서 負抵抗은 다른 한편에 對해서는 正抵抗(電力의 消耗)일 때가 많다.

두 共軛量 사이의 關係가 一定하지 않을 때 چん時間을 두고 그 傾向이 完全히 Random 할 때에는 역시 Work가 한쪽으로 行하여 질 수 없으나 原因量과 一致하는 方向(原因量의 Vector의 方向을 正의  $x$ -軸이라 하면 第 I 象限과 第 IV 象限)으로 結果量이 더 많이 나타나거나 또는 反對되는 方向(第 II, III 象限)일 때는 이들사이에 일을 行하게 할 수 있고 Correlation이 있다고 한다. 두個의 實函數  $f(t)$ 와  $g(t)$  사이의 Correlation  $R(\tau)$ 는 이들을 直接比較하느냐 한편을 一定時間 떨어트려서 比較하느냐에 따라 Correlation이 달라지기 때문에 다음과 같이 定義되고

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot g(t+\tau) dt \quad (1)$$

이는 delay time  $\tau$ 의 函數이다.

(1)式에서 定義되는 것은 두個의 函數  $f(t)$ ,  $g(t)$ 가 서로 다르기 때문에 Cross Correlation Function이라고 부르고  $f(t)=g(t)$ 일 때 即

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot f(t+\tau) dt \quad (2)$$

일 때는 Auto Correlation Function이라 하며 積分區間은  $(-\infty, +\infty)$ 이기 때문에  $t$ 와 無關하다.  $f(t)$ 와  $g(t)$ 가 複素數일 때 工率이 얻어지기 위해서 Correlation Function은 다음과 같이 定義된다.<sup>3)</sup>

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot g^*(t+\tau) dt \quad (3)$$

한 系에서의 瞬間瞬间의 電力이나 Work를 볼려면  $\tau=0$ 의 경우로서,

$$R(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot g^*(t) dt \quad (4)$$

가 되겠다. 以下 實函數의 경우에 限定해서 생각하겠다. 그러나 內容이 크게 限定되지 않는다.

週期現象일 때에는  $T$ 를 無限大로 하지 않고 當該現象의 週期 또는 그 整數倍와 一致시켜주면 된다.

## 2. 情報量과 Redundancy

情報傳達의 Medium인 線路等의 Channel Ca-

pacity 가 許容하는 가장 큰 速度로 情報를 보내 도 똑같은 情報가 다시 겹쳐 들어갈 때 全體의 情報傳達의 速度는 減少하고마는 것이다. 이와같 은 Redundancy 의 增加는  $n$ 個의 期待可能信號의 하나하나의 確率을  $P_j$  라고 할때

$$H_{av} = - \sum_{j=1}^n P_j \log P_j \quad (5)^{(4)}$$

로서 定義되는 Entropy 를 減少시키게 된다.  $H_{av}$  는 單位信號當 傳送되는 平均情報量인데  $n$ 個의 信號의 生起確率이 모두 같을때 Entropy 는 가장 높고 어느 一部信號가 더 잘일어난다거나 더드물게 일어난다는것이 알려져있을때 情報傳達量은 줄어든다.

한글이나 英語 其他 모든 現存 言語들의 경우 使用된 文字의 빈도가 고르지 못하여 文字마다 그 生起確率이相當히 다르기 때문에 最大可能 Entropy 에 比하여 實際言語의 Entropy 는相當히 낮다. 言語를 再組織하므로서 같은 字數를 보냈을때 傳達情報量을 增加시키는 것도 可能하다. 그러나 한편 最大 Entropy 를 갖지 못한다는 것은 반드시 損害를 보고있는 것만이라고는 할수는 없고 이로서 얻는 部分도 있다. 例를 들어 London 이란 地名이 쓰인 편지같봉이 더럽혀져서 이中의 二字程度가 보이지 않아도 우리는 그것이 London 인 것을 찾을 可望性이 많은데 그 理由는 London 이라는 單語에 Redundancy 가 많이 組込되어 있어서 情報의 一部를 잃어도 그것을 Restore 해주는데 도움이 되고 있다는 것이고 이는 音聲交信 때도 마찬가지이다. Redundancy 가 없고 보내진 情報의 Entropy 가 가장 높은 例로서는 略號로서 보낸 電報等이 있는데 이경우는 Redundancy 가 없어서 한字라도 상실되면 그 情報를 찾을 길이 없다. 우리들의 Communication System 과 Channel 은 항상 天然이나 人爲의 雜音의 위협을 받고 있으니 알맞은 Redundancy 의 組込은 꼭 必要한것이나 이는 모든 情報에 關해서 고르게 組込되어 있어야 하며 고르지 못하면 쓸모없이 Entropy 만 低下시키고 Code Correction 은 不可能하다. 따라서 우리는 보내고자 하는 情報에서 Redundancy 를 除去하고 다시 Code Correction 을 위한 Redundancy 를 組込하게 되는데 原形대로서 英語는 文章으로 할때의 文法上의 Redundancy 까

지 合하여 50%以上의 Redundancy 가 들어있다고 알려져있다.<sup>5)</sup>

情報は 時間的으로 變하여야만 傳達되는 것이기 때문에 그 信號는 時間의 函數이고 따라서 周波數空間에서의 對應表現(Spectrum)이 있는데 Spectrum 的 上限周波數의 2倍를<sup>6)</sup> Nyquist 的 Sampling Rate 라 하여 이러한 Rate로 Sampling 해서 보내면 原信號가 가지고 있는 모든 情報를 傳達하고 남음이 있으니 原信號의 大部分은 Redundancy 로 되어있다고 말할 수 있다.

다시 말해서 한瞬間의 波形이 새로운 情報를 傳達했다면 Nyquist 的 Sampling rate로서 다음 該當時間이 올때까지의 모든 波形에 依한 情報는 이미 傳達되어버린것, 즉 Redundancy로서 그一部가 壓失되어도 支障이 없다는것이 되고 이것은 각各의 瞬間의 信號는 서로 Correlation 이 어느程度 있다는 것을 말하고 있다. 따라서 (2)式에서 보는바 Auto Correlation Function 은 信號의 어느 瞬間에서의 値가  $\tau$ 만큼 떨어진 前 또는 後에서의 値사이의 關聯性을 나타내는 것이기 때문에

$$R(0) \geq R(\tau) \quad (6)$$

即, 어느 瞬間에서의 信號의 値와 가장 Auto Correlation 이 큰것은 바로 그 瞬間에서의 値以外의 것이 못된다는 式이 成立한다.

例) 無限히 繼續된 正弦波  $A \sin \omega t$  的 경우

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A \sin(\omega t) \cdot A \sin(\omega(t+\tau)) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (7)$$

임으로 보아  $\tau$ 가 0에 가까우면 Correlation 이 크나  $\tau$ 가  $\frac{\pi}{2}$ 에 가까이 가면 減少하는것을 알수 있다. 이경우에 있어서 Correlation Coefficient 는

$$\rho(\tau) = \frac{\frac{A^2}{2} \cos \omega \tau}{\frac{A^2}{2} \cos 0} = \cos \omega \tau \quad (8)$$

로서 時間差의 Cosine에만 關聯되며 振幅에는 關係없음을 알 수 있어서 우리가 알고자하는 Correlation 을 더 正確하게 나타내줄을 알 수 있다.

Correlation 은 信號의 電力分布와도 關係되어 있어서 Wiener-Khintchine Theorem 에 依하면

Correlation Function  $R(\tau)$ 의 Fourier Transform 은 信號電力의 周波數分布를 나타내는 Power Spectral Density  $g(f)$ 가 되고

$$g(f) = f[R(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (9)$$

따라서 週期波와 非週期波에 對해서는 Parseval의 定理<sup>7)</sup>와 Plancharel의 定理를 適用하여 Auto Correlation의 경우를 살펴보면

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (10)$$

임으로 周波數面에 分布된 總 Energy는 時間軸에 分布된 總 Energy와 같다는 事實을 再確認하게 되는데 (3)式을 再檢討하면 Correlation을 Power와 關聯시킬 수 있음을 알 수 있다.

### 3. Time Dependent Correlation Function 및 Time Dependent Correlation Coefficient

Correlation이란 두函數사이의 類似性을 定量하기 위한 것으로 (3)式에서 보는 바와 같이 時間面에서  $-\infty$ 로부터  $+\infty$ 까지 積分을 完了하여 오로지 두函數사이의 時間差(또는 delay)만의函數로 나타나지만 이 경우는 定常的인 事象을 取扱하기 때문에 時間に 無關係한것으로 定義될 수 있으나 非定常的인 경우에는 時間に 따르는 Correlation의 増減을 생각하여야 하며 時間의函數인 Time Dependent Correlation Function  $R(\tau, t, T)$ 을 다음과 같이 定義한다.<sup>8)</sup>

$$R(\tau, t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t_1) \cdot g^*(t_1 + \tau) dt_1 \quad (11)$$

이는  $t$ 를 中心으로 하여  $T$ 時間동안 서로  $\tau$ 만큼의 delay를 가지도록 한 두個의 時間函數  $f(t)$ 와  $g^*(t)$ 의 類似性을 나타내는函數인것이며 例를 들어 Time Varying System에 印加된 信號와 그로부터의 出力의 System의 Modification에 따라 그사이의 Correlation 變遷을 나타내는데 有効하게 쓰이며  $\tau=0$ 일 경우에는  $f(t)$ 를 電壓, 磁界 및 電界 그리고  $g(t)$ 를 電荷, 磁束 및 誘電束으로 생각하면 이 Time Dependent Correlation Function은 時間平均 Energy를 나타내게된다.

Time Dependent Correlation Function은 關

聯되는 두時間函數의 各各에 比例하므로 有限할 時間의 平均電力의 System의 變遷에 따라 變化 할때에도 Correlation 關係만을 살피기 위해서는 Time Dependent Correlation Coefficient  $\rho(\tau, t, T)$ 를 써야하는데 이는 다음式으로 주어진다.

$$\rho(\tau, t, T) = \frac{R(\tau, t, T)}{R(0, t, T)} \quad (12)$$

最適平均時間  $T$ 는 時間函數의 成分周波數가 높을수록 矮아도 됨으로 成分周波數의 下限의 週期以上으로 잡아야 한다.  $T$ 에 따라 Time Dependent Correlation Function의 値이 달라지는것이 原則이나 上記下限周波數週期( $T_{\text{opt}}$ )보다  $T$ 가 커갈때 그 Fluctuation은 徐徐이 줄어들고 週期波일 경우에는  $T$ 를 그波의 週期 또는 그 整數倍와一致시켜줌으로써一般的인 Correlation Function과一致하게 된다.

### 4. Time Dependent Correlation Function의 適用例

Time Dependent Correlation Function은 週期的現象에 對해서 適用할 경우보다 非週期現象에 適用하는것이 Correlation의 變遷을 볼 수 있어서 有利하며 對象 System이 時間에 따라 變하는 경우等에 不可缺한 適用分野가 있으며一般的인 Correlation Function의 경우는 非週期의이면 有効 Energy를 가지고 있는 경우에 對해서 平均區間이 無限大가 됨에 따라 Correlation이 零이 되어버리는 것에 比해서 Time Dependent Correlation는 信號가 있는 사이는 Correlation을 찾아 볼 수 있어서 有利하다.

例 1. 두個의 正弦波函數의 T. D. Cross Correlation Function

$$f(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (13)$$

$$g(t) = B \cos(\omega t + \phi) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} R(\tau, t, T) &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A \cos(\omega t + \phi) \cdot \\ &\quad B \cos(\omega t + \phi - \omega \tau) dt \\ &= \frac{AB}{2} \cos(-\phi + \phi - \omega \tau) + \frac{AB}{2\omega T} \\ &\quad \cos(2\omega t + 3\phi - \phi + \omega \tau) \cdot \sin \omega T \end{aligned} \quad (15)$$

$T \rightarrow \infty$ 이면一般的인 Correlation의 경우로서

$$R(\tau) = \frac{AB}{2} \cos(-\phi + \psi - \omega\tau)$$

$\omega T = 2n\pi$  の時

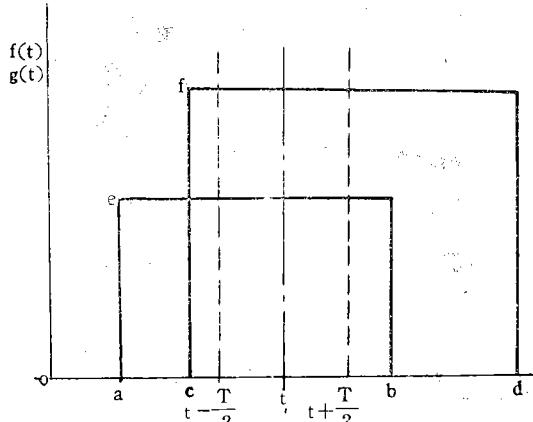
$$R(\tau, t, T) = \frac{AB}{2} \cos(-\phi + \psi - \omega\tau) \quad (16)$$

例 2. 兩個의 矩形波의 T.D. Cross Correlation  
( $\tau=0$  일 경우)

높이가 각각  $e$ ,  $f$ 이며 底邊이 각각  $[a, b]$ ,  $[c, d]$ 인 두개의 矩形波  $[c, d]$  사이에서 겹쳤다고 하면  $[c, d]$  사이의 Correlation이 가장 크다. 이 두函數는 다음式으로 주어진다.

$$f(t) = e \quad a \leq t \leq b \quad (17)$$

$$g(t) = f \quad c \leq t \leq d \quad (18)$$



第1圖 兩個의 矩形波

이때 T.D. Correlation Function은  $t$ 와  $T$ 에 따라 다음과 같은 여러 경우가 된다.

$$(a) c \leq t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2} \leq b \text{ 인 경우}$$

$$R(0, t, T) = \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} ef dt = ef \quad (19)$$

當然히 그範圍에서 T.D. Correlation은一定하다.

$$(b) t - \frac{T}{2} < c, t + \frac{T}{2} \leq b \text{ 인 경우}$$

$$R(0, t, T) = \frac{1}{T} \int_0^{t + \frac{T}{2}} ef dt = \frac{ef}{T} [t + \frac{T}{2} - c] \quad (20)$$

$$(c) c \leq t - \frac{T}{2}, t + \frac{T}{2} < b \text{ 인 경우}$$

$$\begin{aligned} R(0, t, T) &= \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^b ef dt \\ &= \frac{ef}{T} [b - t + \frac{T}{2}] \end{aligned} \quad (21)$$

$$(d) t - \frac{T}{2} < c, b < t + \frac{T}{2} \text{ 및 } c \leq t \leq b \text{ 인 경우}$$

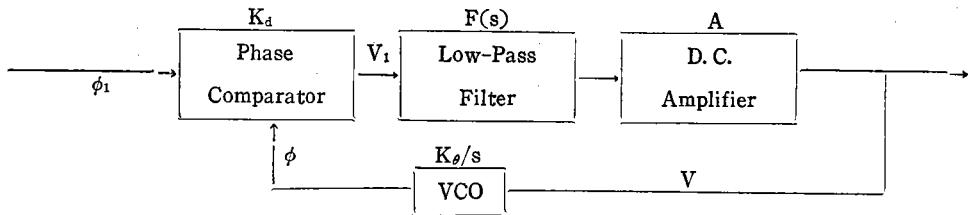
$$R(0, t, T) = \frac{1}{T} \int_c^b ef dt = -\frac{ef}{T} [b - c] \quad (22)$$

(b), (c) 및 (d)의 경우에서 共通部分의 限定되어 있어서  $T$ 가 클수록 平均區間이 커져서 T.D. Correlation은 減少됨을 알 수 있다.

## 5. Phase Locked Loop 解析에 對한 應用

Phase Locked Loop는 그 Loop가 lock-in 되어 있는 信號成分만을 通過시키고 其他周波數成分은一旦 그 Loop에서 阻止되며 入力信號에 따라 System의 共振周波數가 變하기 때문에 用途가 많다. Phase Locked Loop(以下 PLL이라 한다)는 Analogue와 Digital의 兩形態가 混在하는 複雜한 System이어서 解析이 거의 不可能하여 PLL의 設計는 主로 經驗的인 것이었다. PLL의 出力信號는 內藏된 VCO(Voltage Controlled Oscillator)의 發振周波數가 lock-in 됨에 따라 入力信號와의 Correlation이 時間의 經過와 더불어 過渡現象의 으로 增加하는데 그 變遷은 System의 動特性으로 決定되는 速度로서 이루어진다.

PLL의一般的인 構成은 第2圖와 같다. 振幅制限回路를 가진 矩形波인 入力과 VCO의 出力이 比較되어 그位相差에 比例하는 直流電壓이 位相檢出回路의 出力으로 나와( $K_\phi$  Volt/radian)이 位相信號가 VCO의 入力으로 들어가서 VCO의 出力周波數를 바꿔( $K_\phi$  radian/volt · sec) 두波形의 位相差를 줄이는 方向으로 VCO를 動作시킨다. VCO는 入力된 位相差信號에 따라 發振하고 있는 矩形波의 位相差를 줄이는 方向으로 動作하여 VCO는 自己가 發振하고 있는 矩形波의 Repetition Rate를 바꿔준다. 結局 VCO는 PLL入力信號의 周波數에 lock-in 되어 入力信號周波數와 같은 周波數로 發振(또는 再生)하여 入力個號周波數(및 矩形波이므로 不可避하게 생기는 高調波)以外의 모든 信號를 除去하여 주는 Filter가 될 수 있다.



第2圖 PLL 의 linear model

## 6. PLL 回路解析

位相検出器와 VCO 의 入力사이에 Low Pass Filter 및 D.C. Amplifier 를 두어 그 傳達函數 와 增幅率을 각각  $F(s)$ 와  $A$ 라고 하면 Open loop 傳達函數  $T(s)$ 는

$$T(s) = \frac{K_\theta K_d A F(s)}{s} \quad (23)$$

loop 를 닫았을때의 PLL 의 傳達函數  $H(s)$ 는

$$H(s) = \frac{K_\theta \cdot K_d \cdot A \cdot F(s)}{s + K_\theta \cdot K_d \cdot A \cdot F(s)} \quad (24)$$

入力信號과 VCO 出力信號의 振幅은 PLL 的 動作에 影響을 주지 않으므로 位相角만을 重視하여 入力信號의 位相을  $\phi_1$ , VCO 出力波의 位相을  $\phi$ , Phase Comparator 的 出力電壓을  $V_1$ , 增幅 및 Filter 된 信號電壓을  $V$ 라고 하면

$$\phi = \int_0^t K_\theta \cdot V(\tau) d\tau + c_1 \quad (25)$$

Laplace 變換하면

$$\phi(s) = \frac{K_\theta}{s} V(s) + \frac{c_1}{s} \quad (26)$$

$$V(s) = A \cdot F(s) \cdot V_1(s)$$

$$V_1(s) = K_d (\phi_1(s) - \phi(s))$$

임으로

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \frac{K_\theta}{A} \cdot A \cdot F(s) \cdot V_1(s) + \frac{c_1}{s} \\ &= \frac{A \cdot K_\theta \cdot K_d \cdot F(s) \cdot \phi_1(s) + C_1}{s + A \cdot K_\theta \cdot K_d \cdot F(s)} \end{aligned} \quad (27)$$

Filter 가 없는 경우에는  $F(s) = 1$

따라서

$$\phi(s) = \frac{A \cdot K_\theta \cdot K_d \cdot \phi_1(s) + C_1}{s + A \cdot K_\theta \cdot K_d} \quad (28)$$

實例

入力에 一定周波數의 信號가 걸렸을 경우

(1) Filter 가 없을 때

$$\phi_1(t) = \omega_1 t$$

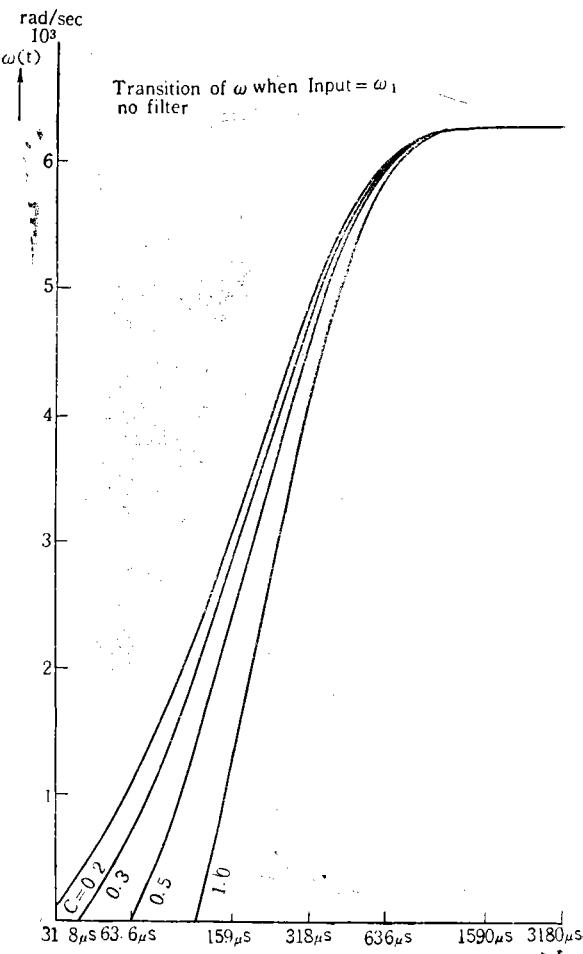
$$\phi_1(s) = \frac{\omega_1}{s^2}$$

가 되며  $G = A \cdot K_\theta \cdot K_d$  라고 놓으면

$$\phi(s) = \frac{\frac{\omega_1 G}{s^2} + C_1}{s + G}$$

$$= \frac{\omega_1}{s^2} - \frac{\omega_1}{Gs} + \left( \frac{\omega_1}{G} + C_1 \right) \frac{1}{s + G} \quad (29)$$

$$\phi(t) = \omega_1 \left( t - \frac{1}{G} \right) + \left( \frac{\omega_1}{G} + C_1 \right) e^{-Gt} \quad (30)$$

第3圖 入力이  $\omega_1$ 이고 Filter 가 없을 때의  $\omega$ 의 變動

$$\omega(t) = \omega_1 - (\omega_1 + C_1 G) e^{-Gt} \quad (31)$$

따라서 位相角은  $C_1 G$  로부터 시작하여  $\omega_1(t - \frac{1}{G})$  을 向하여 收斂한다.

第3圖는 (31)式을 IBM1130 電子計算機로 Plot 한 曲線이다. 但,  $K_g = \frac{50 \times 10^3}{6}$  rad/sec/volt,  $K_d = 0.45$  volt/rad,  $A = 1.4$ ,  $\omega_1 = 2\pi \times 1000$  rad/sec  $C_1$  을 1.0, 0.5, 0.3, 0.2로 바꾸었다.

(2) 1st order 의 filter 가 있을 때

$$F(s) = \frac{1}{1+s\tau}$$

(27)式으로부터

(a)  $4G\tau < 1$  일 때

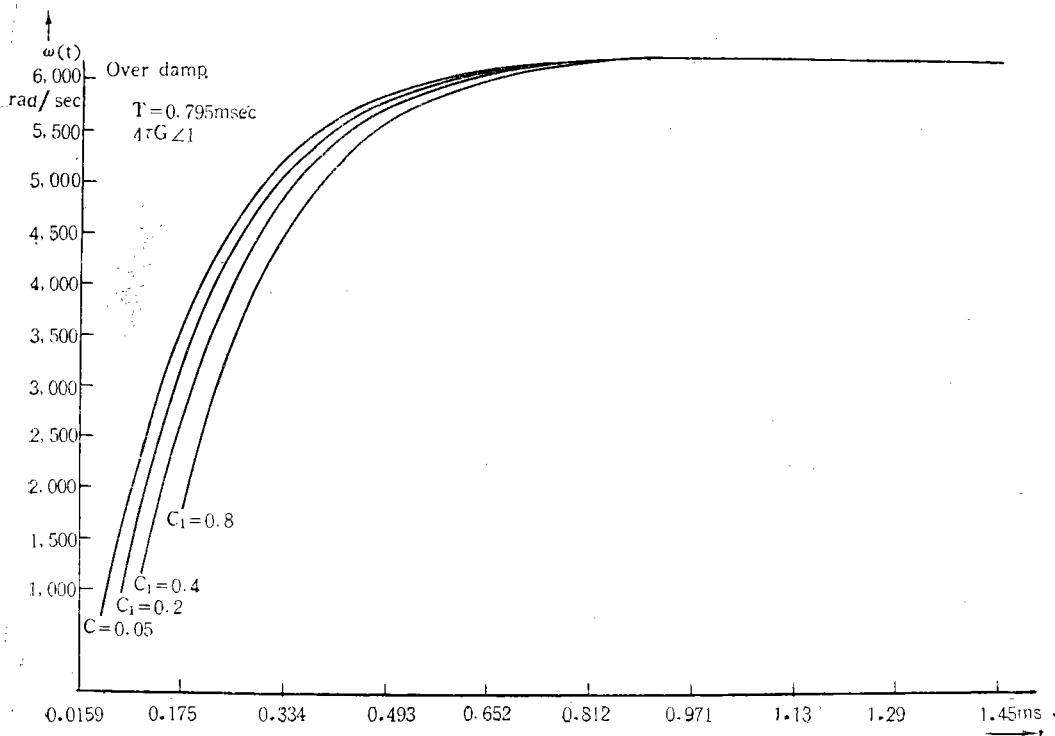
$$\Phi(s) = \frac{\frac{1}{1+s\tau} \Phi_1(s) + C_1}{s + G \frac{1}{1+s\tau}} \quad (32)$$

周波數가  $\omega_1$  으로 一定한 入力信號일 때

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= \omega_1 / s^2 \\ \Phi(s) &= \frac{\frac{G}{\tau} \frac{\omega_1}{s^2} + C_1 s + \frac{C_1}{\tau}}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{G}{\tau}} \\ &= \frac{\frac{\omega_1 G}{\tau} + C_1 s^3 + \frac{C_1 s^2}{\tau}}{s^2(s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{G}{\tau})} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_1}{s^2} - \frac{\omega_1}{s} + \frac{(C_1 + \frac{1}{G})s + \frac{C_1}{\tau} + \frac{\omega_1}{G\tau} - \omega_1}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{G}{\tau}}$$

$$= \frac{\omega_1}{s^2} - \frac{\omega_1}{sG} + \frac{(C_1 + \frac{\omega_1}{G})s + \frac{C_1}{\tau} + \frac{\omega_1}{G\tau} - \omega_1}{(s + \frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}})(s + \frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}})}$$



第4圖  $4G\tau < 1$  때의  $\omega$  的 變動

$$= \frac{\omega_1}{s^2} - \frac{\omega_1}{Gs} + \frac{A+B}{s + \frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}} - \frac{A-B}{s + \frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}} \quad (34)$$

但,  $A = \frac{C_1 + \frac{\omega_1}{G} - \omega_1 \tau}{\sqrt{1-4\tau G}}$        $B = \frac{C_1 + \frac{\omega_1}{G}}{2}$

$$\phi(t) = \omega_1 t - \frac{\omega_1}{G} + (A+B)e^{-(\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}})t} - (A-B)e^{-(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}})t} \quad (35)$$

$C_1$ 의 位相差로부터 시작하여  $\omega_1 t - \frac{\omega_1}{G}$ 으로 收斂한다. 따라서 位相에는 恒常  $\frac{\omega_1}{G}$ 이라는 差가 있음을 안다.

(35)式을 微分해서 周波數를 求하면

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_1 - (A+B)\left(\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right)e^{-(\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}})t} \\ &\quad + (A-B)\left(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right)e^{-(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}})t} \end{aligned} \quad (36)$$

第4圖에  $C_1$ 을 바꾸었을 때의  $\omega$ 의 時間變動을 plot하였다.

(b)  $4\tau G = 1$  일 때

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \frac{\omega_1}{s^2} - \frac{\omega_1}{Gs} + \frac{(C_1 + \frac{\omega_1}{G})s + \frac{C_1}{\tau} + \frac{\omega_1}{G\tau} - \omega_1}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{G}{\tau}} \\ &= \frac{\omega_1}{s^2} - \frac{\omega_1}{Gs} + \frac{C_1 + \frac{\omega_1}{G}}{s + \frac{1}{2\tau}} + \frac{\frac{C_1}{2\tau} + \frac{\omega_1}{2G\tau} - \omega_1}{(s + \frac{1}{2\tau})^2} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\phi(t) = \omega_1 t - \frac{\omega_1}{G} + (C_1 + \frac{\omega_1}{G})e^{-\frac{t}{2\tau}} + (\frac{C_1}{2\tau} + \frac{\omega_1}{2G\tau} - \omega_1)t \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad (38)$$

$t=0$ 에서는  $C_1$ ,  $t \rightarrow \infty$ 에 따라서  $\omega_1 t - \frac{\omega_1}{G}$ 로 接近함을 알 수 있다.

$$\omega(t) = \omega_1 - \omega_1 e^{-\frac{t}{2\tau}} - \left( \frac{C_1}{4\tau^2} + \frac{\omega_1}{4\tau^2 G} - \frac{\omega_1}{2\tau} \right) t \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad (39)$$

$\omega(t)$ 는  $t=0$ 에서 零이 되고  $t \rightarrow \infty$ 에 따라  $\omega_1$ 에 限敘이接近한다.

第5圖에 여러 가지  $C_1$ 의 값에 對한  $\omega$ 의 時間變動을 plot하였다.

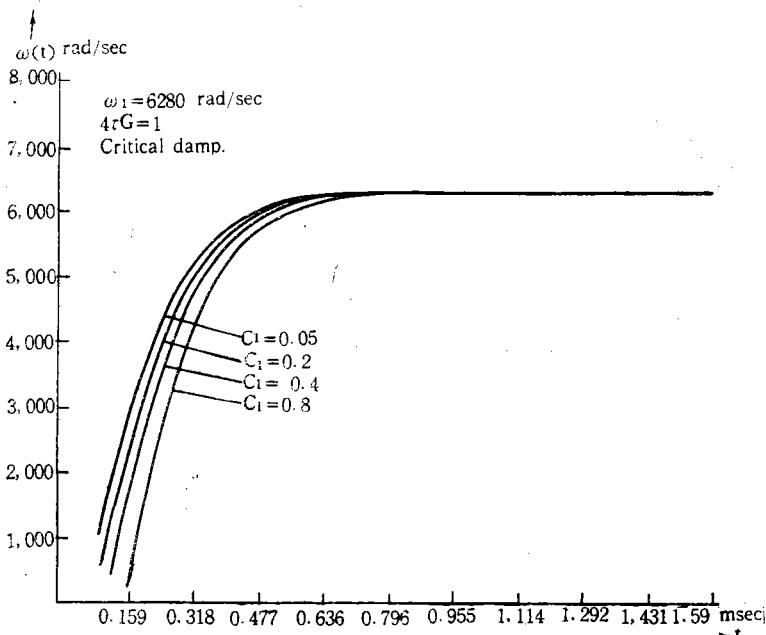
(c)  $4\tau G > 1$  일 때

$$\phi(s) = \frac{\omega_1}{s^2} - \frac{\omega_1}{Gs} + \frac{(C_1 + \frac{\omega_1}{G})s + \frac{C_1}{\tau} + \frac{\omega_1}{\tau G} - \omega_1}{(s + \frac{1}{2\tau})^2 + \frac{4\tau G - 1}{4\tau^2}} \quad (40)$$

$$\phi(t) = \omega_1 t - \frac{\omega_1}{G} + (C_1 + \frac{\omega_1}{G})e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t + \frac{(\frac{C_1}{2\tau} + \frac{\omega_1}{2\tau G} - \omega_1)}{\sqrt{4\tau G - 1}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \sin \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t \quad (41)$$

$t=0$ 에서  $\phi(t)$ 은  $C_1$ 이 되며  $t \rightarrow \infty$ 에 따라서  $\omega_1 t - \frac{\omega_1}{G}$ 을 中心으로 振動하는데 그 振幅이

$$\sqrt{\left(C_1 + \frac{\omega_1}{G}\right)^2 + \frac{(C_1 + \frac{\omega_1}{G} - 2\tau\omega_1)^2}{4\tau G - 1}} \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

第5圖  $4\tau G=1$  때의  $\omega$ 의 變動

이기 때문에 結局은  $\omega_1 t - \frac{\omega_1}{G}$ 에 無限히 接近한다.

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_1 - \frac{1}{2\tau} \left( C_1 + \frac{\omega_1}{G} \right) e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \cos \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t - \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} \left( C_1 + \frac{\omega_1}{G} \right) e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \sin \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t \\ &\quad - \frac{\frac{C_1}{2\tau} + \frac{\omega_1}{2\tau G} - \omega_1}{\sqrt{4\tau G - 1}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \sin \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t + \left( \frac{C_1}{2\tau} + \frac{\omega_1}{2\tau G} - \omega_1 \right) e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \cos \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t \\ &= \omega_1 - \omega_1 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \cos \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t - \frac{(2GC_1 + \omega_1)}{\sqrt{4\tau G - 1}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \sin \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t \\ &= \omega_1 - e^{-\frac{t}{2\tau}} \sqrt{\frac{4\omega_1^2 G \tau + 4G^2 C_1^2 + 4G\omega_1 C_1}{4\tau G - 1}} \sin \left( \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t + \theta \right) \end{aligned}$$

$$\text{但 } \theta = \sin^{-1} \left( \frac{\omega_1 \sqrt{4\tau G - 1}}{2\sqrt{\omega_1^2 G \tau + G^2 C_1^2 + G\omega_1 C_1}} \right)$$

上限包絡線은

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \frac{\sqrt{4\omega_1^2 G \tau + 4C_1^2 G^2 + 4\omega_1 C_1 G}}{4\tau G - 1} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

下限包絡線은

$$\underline{\omega}_1 = \omega_1 - \frac{\sqrt{4\omega_1^2 G \tau + 4C_1^2 G^2 + 4\omega_1 C_1 G}}{4\tau G - 1} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

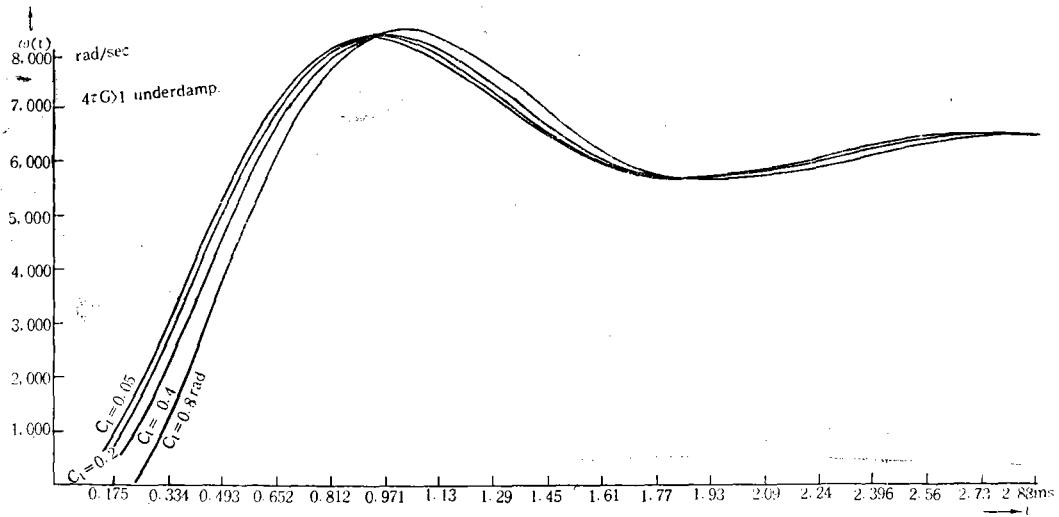
第6圖에 여러가지  $C_1$ 의 值에 對한  $\omega$ 의 時間變動을 plot 하였다.

## 7. PLL에서의 Correlation의 變動

$$\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \cos \phi_1(t_1) \cdot \cos \phi(t_1 + \tau) dt_1$$
 的 形式으로

取扱하여야 할 것이나 入力信號와 出力信號의 周波數사이의 Correlation 을 觀察하고  $\tau = 0$ 로 두고.

$$R(0, t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \omega_1(t) \cdot \omega(t) dt \quad (43)$$

第6圖  $4\pi G > 1$  때의  $\omega$ 의 變動

의 形式으로 解析한다.

(1) Filter 가 없을 경우

(31)을 利用하여

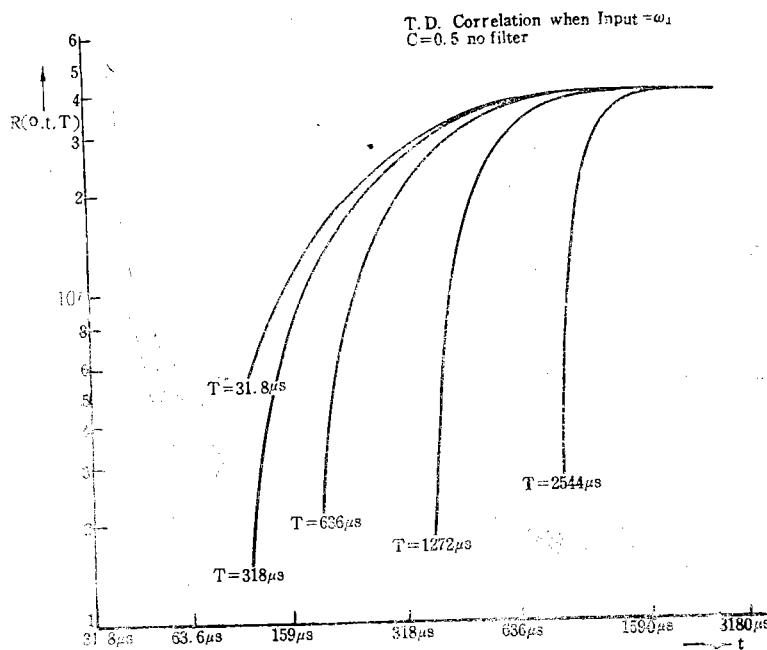
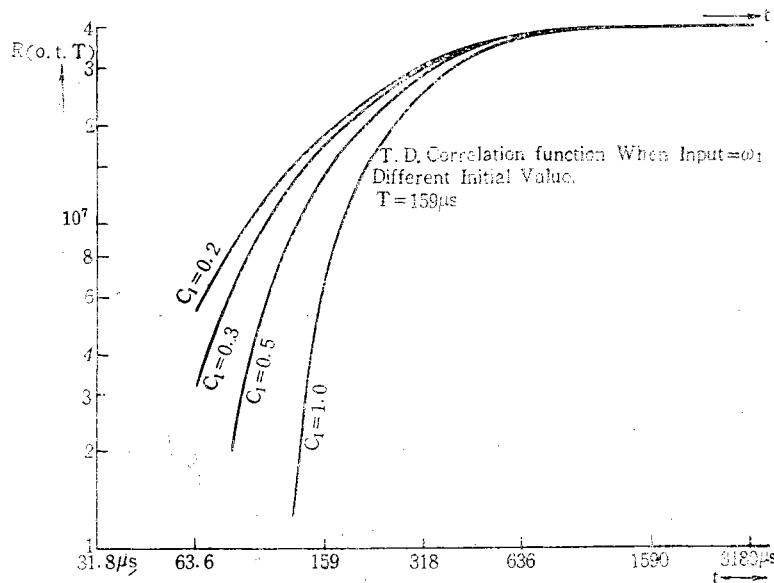
$$\begin{aligned}
 R(0, t, T) &= -\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \omega_1 \{ \omega_1 - (\omega_1 + C_1 G) e^{-\sigma t'} \} dt' \\
 &= \frac{1}{T} \left[ \omega_1^2 T + \frac{\omega_1}{G} (\omega_1 + C_1 G) \{ e^{-\sigma(t'+\frac{T}{2})} - e^{-\sigma(t'-\frac{T}{2})} \} \right] \\
 &= \frac{1}{T} \left[ \omega_1^2 T - \frac{2\omega_1}{G} (\omega_1 + C_1 G) e^{-\sigma t} \cdot \sinh \frac{GT}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{44}$$

時間的變化를 살피면

$$\frac{\partial}{\partial t} R(0, t, T) = \frac{2\omega_1}{T} (\omega_1 + C_1 G) e^{-\sigma t} \sinh \frac{GT}{2} \tag{45}$$

이는 恒常 正이면서  $t \rightarrow \infty$ 에 따라 零을 向함을 나타내고 있다. 即 이 System 은  $\frac{1}{G}$ 이란 時定數로서 指數函數的으로 Correlation 을 增加시킴을 알 수 있다.

第7圖와 第8圖에  $R$  的 時間에 따른 變動을 plot 하였다.

第7圖  $C_1$ 을 固定하고  $T$ 를 바꾸었을 때의  $R$ 의 時間變化第8圖  $T$ 를 固定하고  $C_1$ 을 바꾸었을 때의  $R$ 의 時間變化

(2) 1st order filter가 있을 경우

(a)  $4\tau G < 1$  일 때

(36)式에 依해서

$$R(0, t, T) = \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} \omega_1 \{ \omega_1 - (A+B) \left( \frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}} \right) e^{-\left(\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right)t_1} \}$$

$$\begin{aligned}
 & + (A-B) \left( \frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}} \right) e^{-\left(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right)t_1} dt_1 \\
 & = w_1^2 - 2\omega_1(A+B)e^{-\left(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right)t_1} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right) \frac{T}{2}}{T} \right\} \\
 & + 2\omega_1(A-B)e^{-\left(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right)t_1} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right) \frac{T}{2}}{T} \right\} \quad (46)
 \end{aligned}$$

c) time dependent correlation function 의 時間變化를 살펴보면

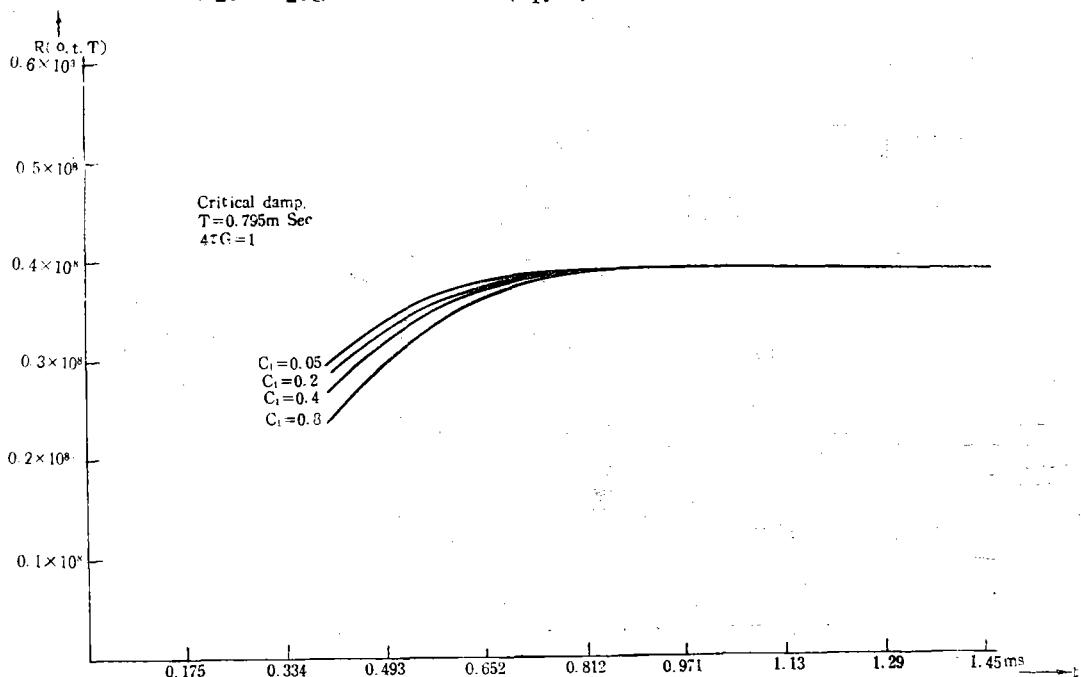
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} R(0, t, T) &= 2\omega_1(A+B)\left(\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right) \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right) \frac{T}{2}}{T} \right\} \times \\
 & e^{-\left(\frac{1}{2\tau} - \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right)t} - 2\omega_1(A-B)\left(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right) \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right) \frac{T}{2}}{T} \right\} \times \\
 & e^{-\left(\frac{1}{2\tau} + \sqrt{\frac{1-4\tau G}{4\tau^2}}\right)t} \quad (42)
 \end{aligned}$$

第9圖와 第10圖에 時間に 따른  $\omega(t)$ 과  $R$ 의 變動을 plot하였다.

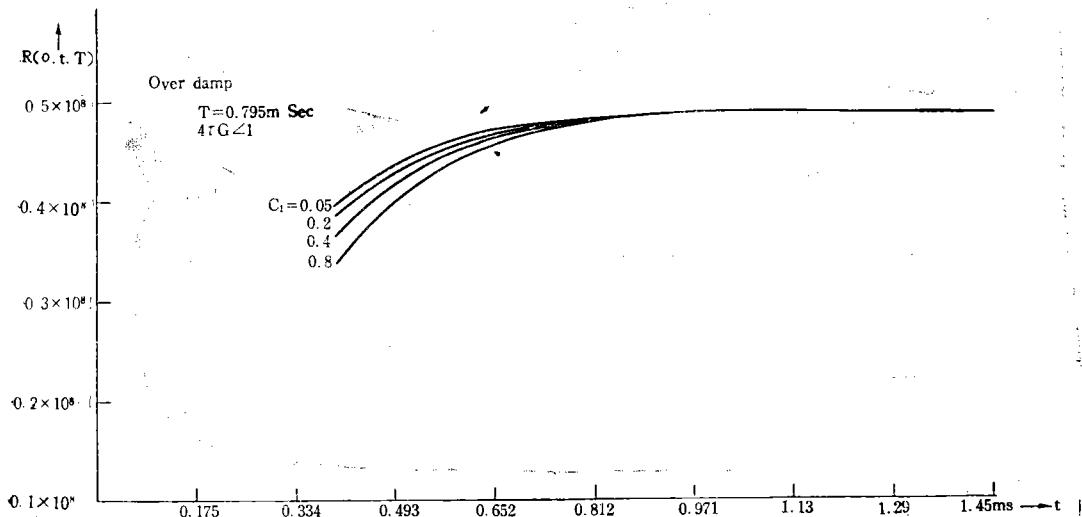
(b)  $4\tau G=1$  일 때

(39)式에서부터

$$\begin{aligned}
 R(0, t, T) &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \omega_1 \left\{ \omega_1 - \omega_1 e^{-\frac{t}{2\tau}} - \left( \frac{C_1}{4\tau^2} + \frac{\omega_1}{4\tau^2 G} - \frac{\omega_1}{2\tau} \right) t e^{-\frac{t}{2\tau}} \right\} dt \\
 &= \frac{\omega_1}{T} \left\{ \omega_1 T - \left( \frac{C_1}{\tau} t + \frac{\omega_1}{\tau G} t - 2\omega_1 t + 2C_1 + \frac{2\omega_1}{G} \right) e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \sinh\left(\frac{T}{4\tau}\right) \right. \\
 &\quad \left. + T \left( \frac{C_1}{2\tau} + \frac{\omega_1}{2\tau G} - \omega_1 \right) e^{-\frac{t}{2\tau}} \cosh\left(\frac{T}{4\tau}\right) \right\} \quad (48)
 \end{aligned}$$



第9圖  $C_1$ 을 固定하고  $T$ 를 바꾸었을 때의  $R$ 의 時間變化

第10圖  $T$  를 固定하고  $C_1$  을 바꾸었을 때의  $R$  의 時間變化

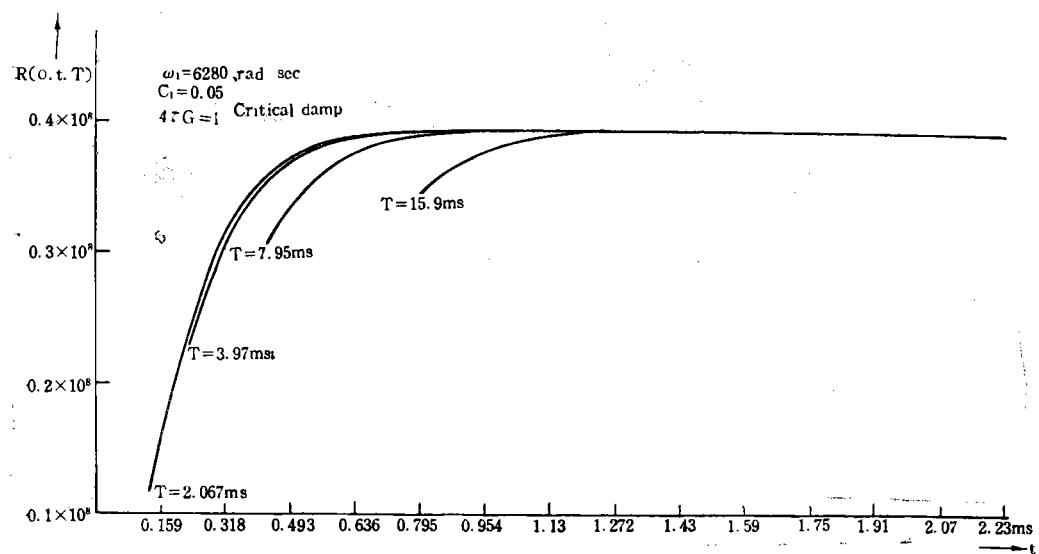
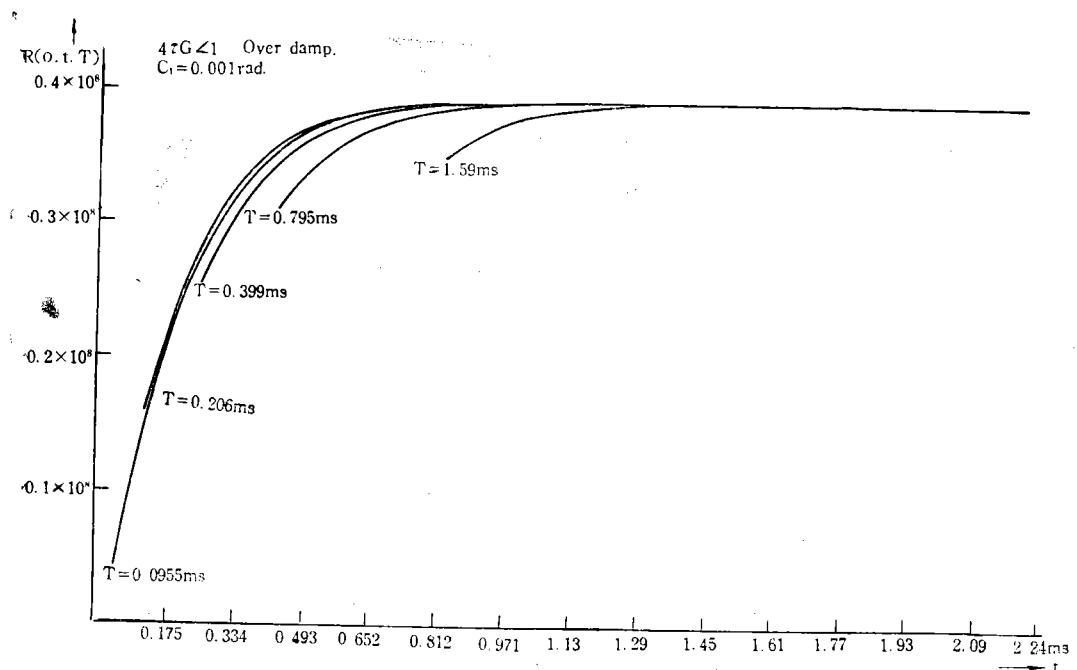
$$\frac{\partial}{\partial t} R(0, t, T) = \frac{\omega_1}{T} \left[ e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ \left( \frac{C_1}{2\tau^2} t + \frac{\omega_1}{4\tau G} t - \frac{\omega_1}{\tau} t + 2\omega_1 \right) \sinh \frac{T}{4\tau} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{T}{2\tau} \left( \frac{C_1}{2\tau} + \frac{\omega_1}{2\tau G} - \omega_1 \right) \cosh \frac{T}{4\tau} \right] \right] \quad (49)$$

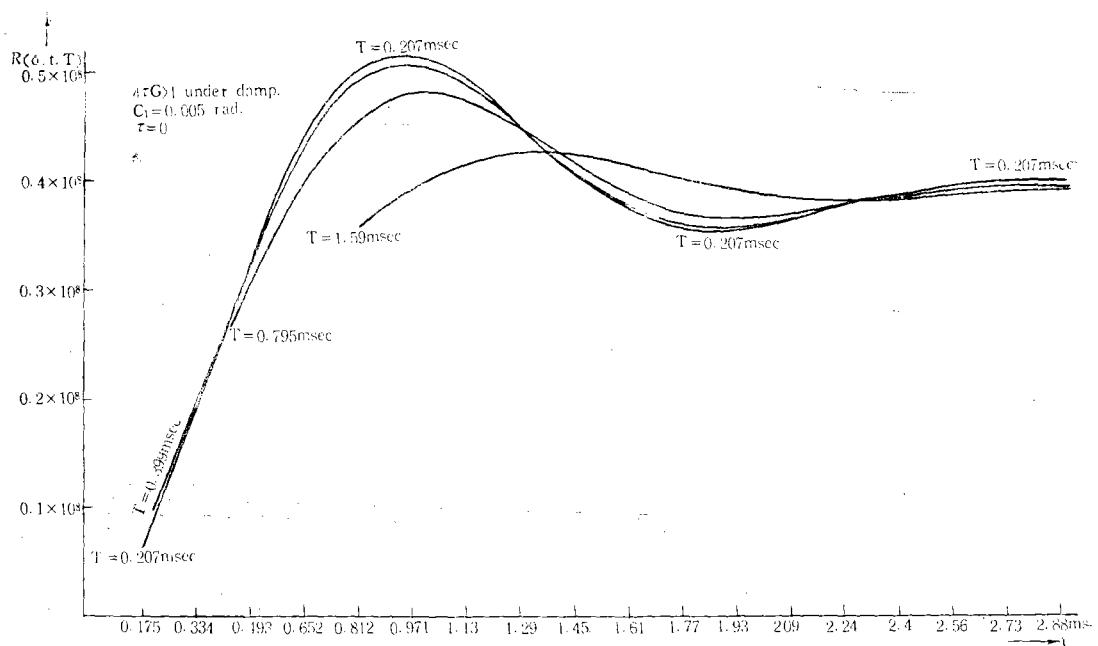
第11圖와 第12圖에  $R$  的 時間變動을 plot 하였다.

(c)  $4\tau G > 1$  일 때

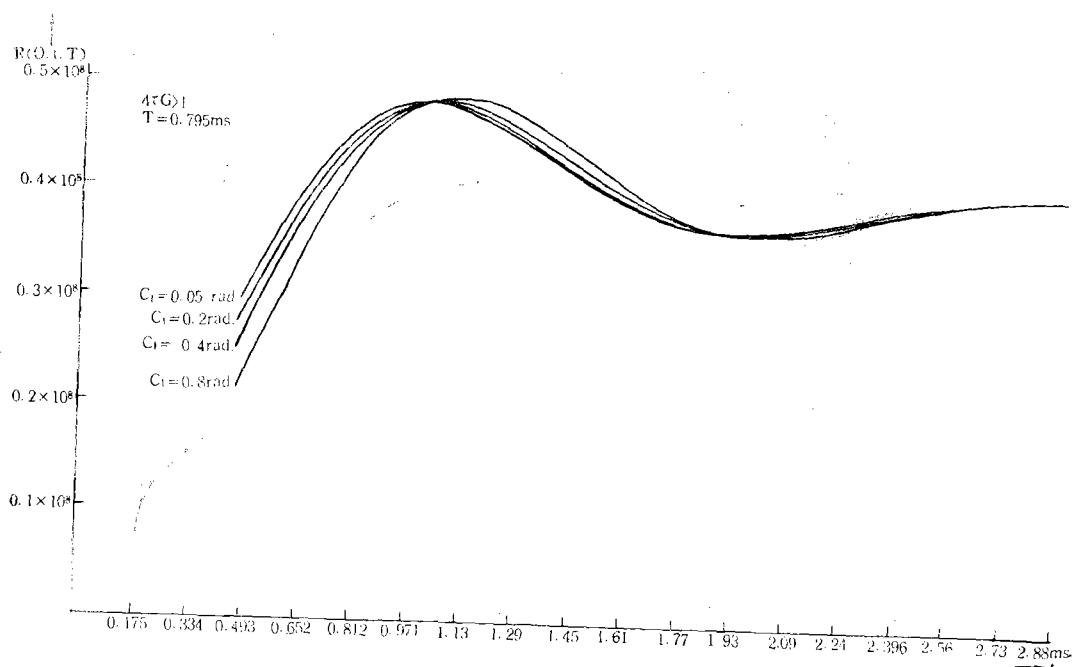
(42)式을 써서

$$R(0, t, T) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \omega_1 \left\{ \omega_1 - \omega_1 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t - \frac{(2C_1 G + \omega_1)}{\sqrt{4\tau G - 1}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \sin \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t \right\} dt \\ = \frac{\omega_1}{T} \left[ \omega_1 T + \frac{C_1 G + \omega_1 - 2\tau G \omega_1}{G \sqrt{4\tau G - 1}} e^{-\frac{1}{2\tau}(t+\frac{T}{2})} \cdot \sin \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} (t+\frac{T}{2}) \right. \\ \left. + \frac{C_1 G + \omega_1}{G} e^{-\frac{1}{2\tau}(t+\frac{T}{2})} \cdot \cos \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} (t+\frac{T}{2}) \right. \\ \left. - \frac{C_1 G + \omega_1 - 2\tau G \omega_1}{G \sqrt{4\tau G - 1}} e^{-\frac{1}{2\tau}(t-\frac{T}{2})} \cdot \sin \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} (t-\frac{T}{2}) \right. \\ \left. - \frac{C_1 G + \omega_1}{G} e^{-\frac{1}{2\tau}(t-\frac{T}{2})} \cdot \cos \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} (t-\frac{T}{2}) \right] \\ = \frac{\omega_1}{T} \left[ \omega_1 T + \left\{ \frac{2(C_1 + \frac{\omega_1}{G} - 2\omega_1 \tau)}{\sqrt{4\tau G - 1}} \sin \frac{\omega_0 T}{2} \cosh \frac{T}{4\tau} \right. \right. \\ \left. \left. - 2(C_1 + \frac{\omega_1}{G}) \cos \frac{\omega_0 T}{2} \sinh \frac{T}{4\tau} \right\} e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t \right. \\ \left. - \left[ \frac{2(C_1 + \frac{\omega_1}{G} - 2\omega_1 \tau)}{\sqrt{4\tau G - 1}} \cos \frac{\omega_0 T}{2} \sinh \frac{T}{4\tau} + 2(C_1 + \frac{\omega_1}{G}) \right. \right. \\ \left. \left. \sin \frac{\omega_0 T}{2} \cosh \frac{T}{4\tau} \right\} e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t \right] \quad (50)$$

第11圖  $C_1$ 을 固定하고  $T$ 를 바꾸었을 때의  $R$ 의 時間變動第12圖  $T$ 를 固定하고  $C_1$ 을 바꾸었을 때의  $R$ 의 時間變動



第13圖  $C_1$ 를 固定하고  $T$ 를 바꾸었을 때의  $R$ 의 時間變動



第14圖  $T$ 를 固定하고  $C_1$ 은 바꾸었을 때의  $R$ 의 時間變動

$$\text{但 } \omega_0 = \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau}$$

$t = n\pi \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau G - 1}}$  이고  $T = \pi \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau G - 1}}$  이며  $n \geq 1$  일 때

$$\frac{\omega_0 T}{2} = \pi \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau G - 1}} \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

따라서

$$R(0, t, T) = \frac{\omega_1 \sqrt{4\tau G - 1}}{2\pi\tau} \left[ \omega_1 \frac{2\pi\tau}{\sqrt{4\tau G - 1}} + \left( \frac{2(C_1 + \frac{\omega_1}{G} - 2\omega_1\tau)}{\sqrt{4\tau G - 1}} \cosh \frac{2\pi\tau}{4\tau\sqrt{4\tau G - 1}} \right) e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t \right. \\ \left. - \left( \frac{2(C_1 + \frac{\omega_1}{G} - 2\omega_1\tau)}{\sqrt{4\tau G - 1}} \sinh \frac{\pi}{2\sqrt{4\tau G - 1}} \right) e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin \frac{\sqrt{4\tau G - 1}}{2\tau} t \right] = \omega_1^2 \quad (51)$$

이 경우 T. D. Correlation Function 은 Oscillate 하고  $T$  를 週期에 맞추었을 때 常數가 되어버리므로 T. D. Correlation Function 이 別로 有力하지 않다. 第13圖와 第14圖에  $4\tau G > 1$  의 경우의  $R$  的 時間變動을 plot 했다.

## 8. 多相包絡線檢波의 Time Dependent Correlation 解析

$\tau$  만큼의 時間差를 가지고 角周波數가  $\omega$  인 두 正弦波間의 Correlation 이

$$R = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \quad (51)$$

但  $A$  는 振幅

임은 알려져 있는 事實이다. 따라서  $E_m \cos \omega_m t$  라는 情報를 보냈을 때 被變調波인

$$e_m = E_m (1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_m t \quad (52)$$

但  $m$  : 變調指數

$\omega_m$  : 變調波의 角周波數

$$e_0(t) = \eta E_m \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \left[ 1 + m \cos \omega_m t - \sum_{v=n, 2n, 3n} \left( \frac{2 \cos v \omega t}{(\nu+1)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m[\cos(v\omega - \omega_m) + \cos(v\omega + \omega_m)t]}{(\nu+1)(\nu-1)} \right) \right] \quad (53)$$

으로 나타난다. 우리가 求하는 바 傳送된 情報와 多相包絡線檢波出力사이의 T. D. Correlation Function  $R_{TR,n}(0, t, T)$  는

$$R_{TR,n}(0, t, T) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} E_m \cos \omega_m t \left[ \eta E_m \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \left[ 1 + m \cos \omega_m t \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{v=n, 2n, 3n} \left( \frac{2 \cos v \omega t}{(\nu+1)(\nu-1)} + \frac{m[\cos(v\omega - \omega_m)t + \cos(v\omega + \omega_m)t]}{(\nu+1)(\nu-1)} \right) \right] \right] dt \\ = \frac{\eta E_m^2}{T} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \left[ \frac{2 \cos \omega_m t}{\omega_m} \sin \frac{\omega_m T}{2} + \frac{mT}{2} + \frac{m}{2\omega_m} \cos 2\omega_m t \cdot \sin \omega_m T \right]$$

를 複調하여 얻는  $E_m m \cos \omega_m t$  에 該當되는 情報단이 아니고 이와 位相이 前後한, 即 Correlation 이 相當히 있는 信號를 出力에 加算하여 얻을 수 있다는 것은 檢波의 能率 및 充實度의 改善을 意味하는 것이다.

電子工學會誌에 나타난 바<sup>10)</sup> C. W. Lee의 論文에서 提案된 多相包絡線檢波 system은 移相包絡信號 역시 우리가 求하는 바 出力과 Correlation 이 相當히 큰 ( $\tau$  秒差면  $\cos \omega \tau$ ) 出力を 주어 AM 通信 Channel의 本質의 缺點 即 半週期波形(半波)들이 Quantum이 되어 있어서 撰送波가 連續體가 아니고 따라서  $\omega$  와  $\omega_m$  이 서로 가까워질 수록  $\omega$ 에 依해서 傳送되어 再生된 複調出力이 原信號에 完全히 一致할 수 없다는 點을 是正할 수 있다.

撰送波의 한 週期를  $n$  等分하여 移相시킨 信號들의 合成出力  $e_0(t)$  는  $n \geq 2$ 에 對해서

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\nu=n, 2n, 3n} \left( \frac{2\cos(\nu\omega - \omega_m)t \cdot \sin\left(\frac{\nu\omega - \omega_m}{2}\right)T}{(\nu+1)(\nu-1)(\nu\omega - \omega_m)} + \frac{2\cos(\nu\omega + \omega_m)t \cdot \sin\left(\frac{\nu\omega + \omega_m}{2}\right)T}{(\nu+1)(\nu-1)(\nu\omega + \omega_m)} \right. \\
 & + \frac{m\cos(\nu\omega - 2\omega_m)t \cdot \sin\left(\frac{\nu\omega - 2\omega_m}{2}\right)T}{(\nu+1)(\nu-1)(\nu\omega - 2\omega_m)} + \frac{2m\cos\nu\omega t \cdot \sin\left(\frac{\nu\omega}{2}\right)T}{(\nu+1)(\nu-1)\nu\omega} \\
 & \left. + \frac{m\cos(\nu\omega + 2\omega_m)t \cdot \sin\left(\frac{\nu\omega + 2\omega_m}{2}\right)T}{(\nu+1)(\nu-1)(\nu\omega + 2\omega_m)} \right] \quad (54)
 \end{aligned}$$

이곳에서 比較的 큰  $(\nu+1)(\nu-1)\nu\omega$  等을 分母에 가지고 있는 第四項以後를 省略하면 이것은

$$R_{TR_n}(0, t, T) = \frac{\eta E_m^2}{T} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \left[ \frac{2\cos\omega_m t}{\omega_m} \sin\frac{\omega_m T}{2} + \frac{m T}{2} + \frac{m}{2\omega_m} \cos 2\omega_m t \cdot \sin \omega_m T \right] \quad (55)$$

이 된다. 한편 入力  $E_m \cos\omega_m t$  와 理想檢波 出力인  $E_m \eta(1+m \cos\omega_m t)$  와의 사이의 T. D. Correlation Function 은 撥送波의 半波 Quantum 이 無限히 微小할 때의 極限值로서

$$\begin{aligned}
 R_{RT_\infty}(0, t, T) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} E_m \cos\omega_m t \cdot E_m \eta(1+m \cos\omega_m t) dt \\
 &= \frac{\eta E_m^2}{T} \left[ \frac{2\cos\omega_m t}{\omega_m} \sin\frac{\omega_m T}{2} + \frac{m T}{2} + \frac{m}{2\omega_m} \cos 2\omega_m t \cdot \sin \omega_m T \right] \quad (56)
 \end{aligned}$$

(55)式의 多相包絡線檢波法에서의 T. D. Correlation o]  $n$ 에 關해서 어떻게 變하는가를 살피기 위해서 그 微分係數를 求하면

$$\frac{\partial R_{TR_n}(0, t, T)}{\partial n} = A \frac{\sin\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{n}}{\pi} \quad (57)$$

$$\text{但 } A = \frac{\eta E_m^2}{T} \left[ \frac{2\cos\omega_m t}{\omega_m} \sin\frac{\omega_m T}{2} + \frac{m T}{2} + \frac{m}{2\omega_m} \cos 2\omega_m t \cdot \sin \omega_m T \right]$$

이는 週期波이어서  $T \rightarrow \infty$ 로 해도 結果에 差가 없는데 이 경우  $A \rightarrow \frac{m}{2} \eta E_m^2$ 로서 이는 正이며 나머지 因數를 展開하면

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi} &= \frac{1}{\pi} \left[ \left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^5 - \dots - \left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 - \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^5 + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \left\{ \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 - \dots \right\} \quad (58)
 \end{aligned}$$

가 되는데 이 交番級數의 收斂如否를 Cauchy의 方法에 依해서 判定하면

$$\frac{a_m+1}{a_m} = \frac{\frac{1}{(2m+2)!} - \frac{1}{(2m+3)!}}{\frac{1}{2m!} - \frac{1}{(2m+1)!}} \cdot \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2m(2m+3)} \quad (59)$$

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m+1}{a_m} = 0$  이것은  $1 \leq n$  인 어느  $n$ 의 值에 對해서나 收斂하고 다시  $2m(2m+3) > \left(\frac{\pi}{n}\right)^2$  임을 보면 어떤  $m$ 의 值에 對해서도 絶對值가 收斂하는 交番級數이기 때문에 (57)式은  $n \geq 1$ 인 어떤 경우에도 正의 值이된다. 即 多相包絡線檢波法에서 T. D. Correlation Function 은  $n$ 에 따라 增加함을 보여주고 있다. 다시 말해서 撥送波의 半週波

形이 Quantum 이 되는 것에 因한 Distortion 을 줄이는데 多相包絡線檢波法이 有利한 것을 T. D. Correlation Analysis에 依해서 立證하였다.

## 9. 結 論

Correlation Function 은 두 時間函數사이의 類似性을 나타내는 것이므로 두 函數가 一致할 수록 Correlation Coefficient 는 增加하여 1에 가까워

진다. 한 System 이 Time Invariant 이고 入力, 出力이 Stationary 인 경우 Correlation function 은 두 시점의 차이만의 함수이고 위치에는 무관하다. 즉  $R(\tau, t, T) = R(\tau)$ . 그러나 System 的 特性과 入力信號가 時間에 따라서 變遷할 경우에는 時間函數로서 Correlation Function 즉, T. D. Correlation Function 的 概念은 매우 有用할 수가 있다. 但 이를 使用할 경우에 取扱信號의 低周波端의 週期보다 더 긴 時間을 平均區間으로 잡아 주어야 한다는 것과 被變調搬送波와 같이 複雜한 樣相을 띠우고 있으면서 週期的인 경우에는  $T$ 를 變調波의 週期의 整數倍로 잡아주면 Time Independent 한 結果를 얻을 수 있다는 等의 比較的 複雜하다는 難點이 있기는 하나 T. D. Correlation Function 을 活用해서 有利한 것은 몇個의 例를 通해서 보아온 바이다.

$\tau=0$ 인 경우를 主로 하였으나 이것은 兩函數(入力과 出力)사이의 瞬間마다의 T. D. Correlation 을 取扱한 것으로 考慮한 System에서의 信號의 經過時間은 零이 아닌 有限值( $\tau$ )로 잡아  $R$

$(\tau, t, T)$ 로 取扱하는 것이 옳으나 이는 情報로서의 信號의 Redundancy 와는 無關係하다.

또한 取扱하는 信號가 入出力 共히 直流成分을 가지고 있을때에 Correlation 的 增加는 반드시 交流信號사이의 Correlation 的 增加로 말할 수는 없으므로 入力信號와 出力信號는 Incoherent 한 경우로 限定하여야 하는데 이것 역시 一般的으로 많은 System 들이 그 入力과 出力이 Incoherent 한 것인가 때문에 適用範圍가 크다. PLL의 경우에 있어서  $\omega_1$ 이라는 一定周波數의 入力에 對한 System 的 自動修正作用을 T. D. Correlation Analysis Method에 依해서 定量的으로 밝혀 指數函數의 變遷이 일어남을 볼 수 있고 多相包絡線檢波法에서 相數의 增加가 같은 Correlation Function 項들에 對해서 Multiplier 가  $n$ 와 함께 增加함을 볼 수 있었다. 搬送波 Quantum 이 거칠어짐에 따른 Distortion 을 計算하는데에도 각項을 定量的으로 比較해서 實驗式에 依存하였던 것을 理論化할 수도 있다.

## 附 錄

(54)式의  $R_{TRn}(0, t, T)$ 의 誘導

$$\begin{aligned}
 R_{TRn}(0, t, T) &= \frac{\eta E_m^2}{T} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\pi/n} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} [\cos \omega_m t + m \cos 2\omega_m t - \sum_{\nu=n, 2n, 3n} \left\{ \frac{2 \cos \omega_m t \cdot \cos \nu \omega t}{(\nu+1)(\nu-1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m \cos \omega_m t \cdot \cos(\nu \omega - \omega_m)t + m \cos \omega_m t \cos(\nu \omega + \omega_m)t}{(\nu+1)(\nu-1)} \right] dt \\
 &= \frac{\eta E_m^2}{T} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\pi/n} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \left[ \cos \omega_m t + \frac{m(1 + \cos 2\omega_m t)}{2} - \sum_{\nu=n, 2n, 3n} \left\{ \frac{\cos(\nu \omega - \omega_m)t + \cos(\nu \omega + \omega_m)t}{(\nu+1)(\nu-1)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{m}{2} \{ \cos(\nu \omega - 2\omega_m)t + \cos \nu \omega t \} + \frac{m}{2} \{ \cos \nu \omega t + \cos(\nu \omega + 2\omega_m)t \} \right\} \right] dt \\
 &= \frac{\eta E_m^2}{T} \left[ \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \left[ \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m} + \frac{mt}{2} + \frac{m}{4\omega_m} \sin 2\omega_m t \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_{\nu=n, 2n, 3n} \left\{ \frac{\sin(\nu \omega - \omega_m)t}{(\nu+1)(\nu-1)(\nu \omega - \omega_m)} + \frac{\sin(\nu \omega + \omega_m)t}{(\nu+1)(\nu-1)(\nu \omega + \omega_m)} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{m \sin(\nu \omega - 2\omega_m)t}{2(\nu+1)(\nu-1)(\nu \omega - 2\omega_m)} + \frac{m \sin \nu \omega t}{(\nu+1)(\nu-1)\nu \omega} + \frac{m \sin(\nu \omega + 2\omega_m)t}{2(\nu+1)(\nu-1)(\nu \omega + 2\omega_m)} \right\} \right]_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\left[ \sin At \right]_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} = \sin At\left(+\frac{T}{2}\right) - \sin At\left(-\frac{T}{2}\right) = 2$$

$\cos At \cdot \sin \frac{AT}{2}$  를 利用하면 (54)式을 얻을 수 있다.

### 感 謝

本研究의 全體過程에서 꾸준히 指導하여 주신 崔桂根教授님과 平常時 많은 機會를 通해서 鞭達하여 주신 李嚴漢, 朴麒洙教授님 그리고 모든 面에서 指導와 後援을 하여주신 李鍾珏教授님에게 마음속 깊은 感謝를 올립니다. 또한 더운 여름放學을 通해서 討論과 檢算 및 電算을 하여준 李太遠同門에게 謝意를 表합니다.

### 參 考 文 獻

1. SCLODONIKOV V. V., *Introduction to the Statistical Dynamics of Automation Control Systems*. New York: Dover publication, 1960.
2. ROHRER R. A., *Circuit Theory-An Introduction to the State Variable Approach*. New York: McGraw-Hill, 1970.
3. MASON S. J. & H. J. ZIMMERMANN, *Electronic Circuits, Signals and Systems*. New York: John-Wiley, 1960.
4. ABRAMSON, *Information Theory and Coding*, New York: McGraw-Hill, 1963.
5. SCHWARTZ M., *Information Transmation, Modulation and Noise*. New York: McGraw-Hill, 1970.
6. MARCUS J., *Echantillonage et Quantification*. Paris: Gauthier-Villars, 1967.
7. BLACKMAN R. B. & J. W. TUKEY, *The Measurement of Power Spectra*. New York: Dover publication, 1959.
8. PAPOULIS A., *A Probability, Random Variables and Stochastic Process*. New York: McGraw-Hill, 1965.
9. DAVENPORT W. B. & W. I. ROOT, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*. New York: McGraw-Hill, 1958.
10. 李忠雄: 多相包絡線檢波法에 關한 研究. 電子工學會誌 第10卷 第1號 1973年 3月
11. 朴相疇 崔京三: M系列信號에 의한 프로세스의 動特性推定. 電子工學會誌 第9卷 第1號 1972年 2月
12. 高炳俊: 相互關係函數法에 依한 原子爐 動特性에 關한 研究. 電子工學會誌 第10卷 第4號 1973年 8月
13. 安秀桔: 패턴同期에 依한 디지탈데이터 通信方式. 電子工學會誌 第9卷 第1號 1972年 2月
14. 北川敏男: 確率論及び推計學の進歩. 岩波書店 Tokyo 1954