VES 生産函數 推定을 위한 模型設定

朴 鍾 久*

1. 머 리 말

本稿에서는 單一方程式에 의하여 VES(Variable Elasticity of Substitution: 可變投入代替彈力性)生産函數의 「파라미터」를 偏奇없이 推定할 수 있는 한가지 模型定式化(model specification)를 試圖하려고 한다.

2. 몇 가지 生産函數의 檢討

一般的으로 生産函數는 投入物(生産要素)과 産出量(生産量)사이의 關係式이라 定義되는데 흔히 利用되는 生産函數는 다음과 같은 것을 들 수 있다.

(1) Leontief 類의 固定投入比率生産函數

$$X=\min\left(\frac{L}{l},\ \frac{K}{k}\right)e^{u},\quad l=\frac{L}{X}>0,\quad k=\frac{K}{X}>0$$

(2) 「콥·다그라스」(Cobb-Douglas)生産函數

$$X=AL^{\alpha_1}K^{\alpha_2}e^{u},\quad \alpha_1>0,\quad \alpha_2>0$$

(3) CES(Constant Elasticity of Substitution: 固定投入代替彈力性)生産函數

$$X=\gamma[\delta L^{-\rho}+(1-\delta)K^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}e^{u},\quad \rho>-1,\quad 1>\delta>0$$

(4) VES 生産函數(Revankar, 1971)

$$X=\gamma K^{\alpha(1-\delta\rho)}[L+(\rho-1)K]^{\alpha\delta\rho}e^{u},\ \gamma>0,\ \alpha>0,\ 0<\delta<1,\ 0\leq\delta\rho\leq1$$

$$\frac{L}{K}>\frac{1-\rho}{1-\delta\rho}$$

여기에서 X는 生産量, L은 勞動投入量, K는 資本投入量, 그리고 $A, \alpha_1, \alpha_2, \gamma, \rho, \delta, \alpha$는 「파라메터」이다. u는 天候條件 혹은 企業家가 예상할 수 없는 生産에 영향을 줄 餘他의 要因으로서 平均値 零 그리고 一定한 크기의 分散을 가진 正規分布를 하는 變數로 假定한다.

* 韓國銀行 調査役

上記와 같이 生產函數가 各各 다르게 定式化된 것은 결국 投入代替彈力性(σ)에 관하여 各各 相異한 假定을 두기 때문이다. 즉 固定投入比率模型에서는 $\sigma=0$, 「콥·다그라스」模型에서는 $\sigma=1$, CES 模型에서는 $\sigma=(1+\rho)^{-1}$로서 이들 세가지 모형에서 投入代替彈力性 σ가 投入物構成$\left(\frac{K}{L}\right)$에 關係없이 一定한데 對하여 VES 모형에서는 $\sigma=1+(\rho-1)(1-\delta\rho)^{-1}\frac{K}{L}$로서 σ가 投入物構成에 따라 變動하는 것을 알 수 있다.

3. 生產函數 推定上의 한가지 문제점

經濟理論에서는 前述한 生產函數를 단순한 技術的인 關係로서 把握하지 않고 生產量決定과 그에 따른 生產要素所要量決定에 있어 企業家가 特定目的函數를 極大化하는 과정에서 나타나는 關係式으로 理解된다. 이 目的函數의 極大化는 具體的으로 表現하면 흔히 企業家利潤의 極大化가 되며 따라서 生產量 및 生產要素 投入量은 이같은 利潤極大化 과정에서 決定된다고 본다.

即 生產函數를 다음과 같은 一般式으로 定義하면

$$X=f(L,K,u) \qquad (2.1)$$

完全競爭下에서의 利潤極大化 條件에서

$$\frac{\partial X}{\partial L}=w \qquad (2.2a)$$

$$\frac{\partial X}{\partial K}=r \qquad (2.2b)$$

(w=實質賃金, r=實質利子率)

式(2.2a)와 (2.2b)에서

勞動投入量 $L=f_1[X(L,K,u)w]$ (2.3a)

資本投入量 $K=f_2[X(L,K,u),r]$ (2.3b)

를 求할 수 있다.

生產函數(2.1)과 投入物所要量式(2.3a)와 (2.3b)에 의하여

$$\mathrm{cov}(L,u)\neq 0$$

$$\mathrm{cov}(K,u)\neq 0$$

따라서 單一方程式에 依하여 代變數(instrumental variables)를 쓰지 않고 生產函數(2.1)을 推定하게 되면 「파라메터」의 推定量이 標本크기에 關係없이 偏奇를 갖게 된다[1].

Zellner, Kmenta, Dreze 等[4]이 「콥·다글라스」生產函數에 대하여 確率的(stochastic)인 利潤極大化 假定을 도입함으로써 前述한 生產函數 推定上의 문제점을 解決하였고 Hodges[2]는 Zellner 等의 結果를 CES 生產函數에까지 延長하였다. 다음에서는 Hodges의 結果를

VES 生産函數에 延長하려고 한다.

4. VES 生産函數 推定을 위한 定式化

위에서 紹介한 VES 生産函數를 다시 써 보면

$$X=\gamma K^{\alpha(1-\delta\rho)}[L+(\rho-1)K]^{\alpha\delta\rho}e^{u} \tag{3.1}$$

實際에 있어 企業의 利潤은 生産活動이 일어난 結果로서 나타나기 때문에 生産要素를 投入하는 단계에 있어서는 企業家가 利潤에 對한 豫想値를 極大化하리라 假定할 수 있다.

完全경쟁을 想定하면 製品價格 p, 賃金率 w 및 利子率 r은 特定企業家의 生産活動정도에 따라 변동하리라 생각될 수 없으므로 企業家利潤(π)에 對한 數學的 期待値는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E(\pi)=p^{*}E(X)-w^{*}L-r^{*}K \tag{3.2}$$

$$E(X)=\gamma K^{\alpha(1-\delta\rho)}[L+(\rho-1)K]^{\alpha\delta\rho}e^{\frac{\sigma^2}{2}} \tag{3.3}$$

p^{*}, w^{*}, r^{*}는 利潤이 實現되는 時點에서 豫想되는 p, w, r의 값을 表示하며 여기에서 σ^2은 u의 分散을 말한다.

$$\frac{w^{*}}{p^{*}}=\frac{w}{p}+\varepsilon_1 \tag{3.4a}$$

$$\frac{r^{*}}{p^{*}}=\frac{r}{p}+\varepsilon_2 \tag{3.4b}$$

ε_1과 ε_2는 豫想했던 物價指標(賃金, 利子率을 包含)와 實現된 그것이 어긋나게 되는 誤差要因을 나타내는 確率變數이다.

이 경우 企業家들의 "期待利潤"極大化條件

$$\frac{\partial E(\pi)}{\partial L}=0$$

$$\frac{\partial E(\pi)}{\partial K}=0$$

에 의하여 다음의 式이 얻어진다.

$$Xe^{-u}\alpha\delta\rho[L+(\rho-1)K]^{-1}e^{\frac{\sigma^2}{2}}=\frac{w}{p}+\varepsilon_1+\varepsilon_1^{*} \tag{3.5a}$$

$$Xe^{-u}e^{\frac{\sigma^2}{2}}[\alpha(1-\delta\rho)K^{-1}+\alpha\delta\rho(\rho-1)(L+(\rho-1)K^{-1}]=\frac{r}{p}+\varepsilon_2+\varepsilon_2^{*} \tag{3.5b}$$

式(3.5a)와 (3.5b)에서 ε_1^{*}와 ε_2^{*}는 企業家들의 利潤極大化條件이 企業家들의 타성等에 의하여 정확히 充足되지 못하는 것을 나타내는 確率變數를 表示한다(Zellner 等 1966).

上記式 (3.5a)와 (3.6b)를 정리하면

$$\gamma K^{\alpha(1-\delta\rho)}[L+(\rho-1)K]^{\alpha\delta\rho}\alpha\delta\rho[L+(\rho-1)K]^{-1}e^{\frac{\sigma^2}{2}}=\frac{w}{p}+\varepsilon_1+\varepsilon_1{}^* \quad (3.6a)$$

$$\gamma K^{\alpha(1-\delta\rho)}[L+(\rho-1)K]^{\alpha\delta\rho}He^{\frac{\sigma^2}{2}}=\frac{r}{p}+\varepsilon_2+\varepsilon_2{}^* \quad (3.6b)$$

$$H=\alpha(1-\delta\rho)K^{-1}+\alpha\delta\rho(\rho-1)[L+(\rho-1)K]^{-1}$$

上記 두 식(3.6a)와 (3.6b)에 의하여 生產에 所要되는 勞動投入量 L과 資本投入量 K가 정해지는데 聯立方程式體系(3.6a)와 (3.6b)에는 產出量에 直接 영향을 미치는 確率變數 u가 包含되지 않은 것을 注目할 필요가 있다.

式(3.6a)와 (3.6b)에 包含된 確率變數 ε_i, $\varepsilon_i{}^*$ $(i=1,2)$는 주로 企業家의 主觀에 따라 左右되는데 대하여 生產函數(3.1)에 包含된 確率變數 u는 企業家들에겐 外生的인 要因임을 생각하면

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_i, u)=0$$
$$\mathrm{cov}(\varepsilon_i{}^*, u)=0, \quad i=1,2$$

를 주장할 수 있다.

따라서 "期待利潤"을 極大化하여 式(3.6a)와 (3.6b)에서 얻은 L과 K는 u와 相關關係를 가지고 있지 않고 그 결과 2에서 提起된 單一方程式에 의한 VES 推定上의 문제점은 除去된다.

參考文獻

1. Hoch, I., "Estimation of Production Function Parameters Combining Time-Series and Cross-Section Data," *Econometrica*, Vol. 30, No. 1, Jan. 1962, pp. 34-53.
2. Hodges, D. J., "A Note on Estimation of Cobb-Douglas and CES Production Function Models," *Econometrica*, Vol. 37, No. 4, Oct. 1969, pp. 721-25.
3. Revankar, N. S., "A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions," *Econometrica*, Vol. 39, No. 1, Jan. 1971, pp. 61-72.
4. Zellner, A., J. Kmenta, and J. Dreze, "Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Function Models," *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, Oct. 1966, pp. 784-95.

〈ABSTRACT〉

A Specification of VES Production Function Model

J. K. Park*

Zellner, Kmenta, Dreze (1966) and later Hodges (1969) showed that consistent estimates of the parameters of Cobb-Douglas or CES production functions can be obtained by the single equation estimation methods if the models incorporate the assumption that firms maximize the mathematical expectation of profits.

This note demonstrates that the results of the above-cited works can be extended to a class of VES production function models.

*Researcher, Bank of Korea.