〈韓國數學教育學會誌數學教育〉
1973. 9. Vol. XII No. 1

Journal of the Korean Society of Mathematical Education
Sept. 1973. Vol. XII No. 1

zf′(z)가 α-SPIRAL 함수가 되는 函數族에 대하여

李 錫 暎

§0. 序 論

함수 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$가 open unit disk $\Delta=\{z:|z|<1\}$에서 regular이고 어떤 실수 α, $|\alpha|<\frac{\pi}{2}$,에 대하여

$$\text{(0.1)} \qquad \operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0, \quad z\in\Delta$$

를 만족하면 우리는 그 함수를 α-spiral 함수라고 부른다. α-spiral 함수가 Univalent이 된다는 것은 1933년 Spacek[9]에 의해서 증명되었다. 지금 (0,1)을 만족하는 모든 α, $|\alpha|<\frac{\pi}{2}$에 대한 함수족을 F_α라고 나타내면 Spirallike 함수족 F는

$$F=\bigcup_\alpha F_\alpha, \quad |\alpha|<\frac{\pi}{2}$$

이 된다. 만일 $\alpha=0$이면 (0,1)은 Starlike 함수를 정의하게 되는데, S^*를 Δ에서 regular이고 원점에 관한 Starlike인 함수들을 나타낸다고 하자. 그러면 한 함수 f(z)가 함수족 F_α에 속하기 위한 필요충분조건은

$$\text{(0,2)} \qquad f(z)\in z\left[\frac{S(z)}{z}\right]^{\cos\alpha\cdot e^{-i\alpha}}, \quad z\in\Delta, \quad \text{단} \left[\frac{S(z)}{z}\right]^{\cos\alpha\cdot e^{-i\alpha}}\Bigg|_{z=0}=1$$

를 만족하는 함수 $S(z)\in S^*$가 존재하는 것이다.

최근에 M.S. Robertson[7]이 함수가 Δ에서 regular이고 $zf'(z)\in F_\alpha$를 만족하는 것의 mapping 성질을 연구하여 소개한바 있다. 지금 함수 f(z)가 $\Delta=\{z:|z|<1\}$에서 regular이고 $f(0)=0$, $f'(0)=1$을 만족할 때 함수족 M_α를 다음과 같이 정의 하자. 函數 f(z)가 함수족 M_α에 속하기 위한 필요충분조건은 $zf'(z)$가 함수족 F_α에 속하는 것이다. 이때 위의 성질을 만족하는 모든 함수족을 M이라고 하면

$$M=\bigcup_\alpha M_\alpha. \quad |\alpha|<\frac{\pi}{2}$$

가 된다. 물론 M_0는 Convex인 함수족(보통 K로 나타냄)을 나타냄을 알수 있고, 잘 알려진바와 같이 (Nehari[4]), 함수 f(z)가 S^*에 속하기 위한 필요충분조건은 $zf'(z)$가 K에 속하는 것이다.

만일 $g(z)\in K$ 일때 (0,2)로부터 다음과 같이 말할 수 있다.

f(z)가 함수족 M_α에 속하기 위한 필요충분 조건은

$$\text{(0,3)} \qquad f(z)=\int_0^z[g'(h)]^{\cos\alpha\cdot e^{-i\alpha}}dh, \quad z\in\Delta, \quad g(z)\in K$$

이다. M.S. Robertson[7]은 (0,3) 만족하는 함수들은 일반적으로 반드시는 Univalent이 아님을 증명하였다.

이 논문은 (0,3)을 만족하는 함수들 $f(z)\in M_\alpha$를 연구하면서, 함수 $f(z)\in M_\alpha$가 항상 Δ에서 Univalent이 될 수 있는 α의 범위를 구하였는데, 이 결과는 Robertson[7]이 얻은 결과 보다 약간 진보했고, 또한 증명도 전혀 다른 방법으로 하여 얻어진 것이다.

△에서 regular인 함수 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$를 Close-to-convex 함수라고 하는 것은 다음과 같이 정의한다. (보통 이 함수족을 C로 나타냄). 한 함수 f(z)가 함수족 C에 속하기 위한 필요충분조건은

$$(0,4)\qquad \mathrm{Re}\left\{\varepsilon z\frac{f'(z)}{s(z)}\right\}>0,\quad z\in\triangle$$

를 만족하는 한 함수 $s(z)\in S^*$와 한 복소수 ε, $|\varepsilon|=1$, 가 존재하는 것이다.

Kaplan[1]은 함수족 C에 속하는 함수들은 Univalent이 된다는 것을 증명하였다.

본논문의 主結果는 각 函數族 M_α에 대한 sharp radius of close-to-convexity를 유도한 것인데 그것은 α에만 의존하는 r에 관한 방정식의 해로서 주어진다.

§1. 예비 Lemma 들

Lemma 1. 만일 f(z)가 함수족 F_α에 있고 a가 △에 있으면

$$(1,1)\qquad f_*(z)=\frac{azf[(z+a)/(1+\bar{a}z)]}{f(a)(z+a)(1+\bar{a}z)^{e^{-2i\alpha}}},\quad z\in\triangle$$

은 F_α에 속한다.

(증명) 실수 ρ, $0<\rho<1$, 에 대하여

$$(1,2)\qquad f_\rho(z)=\frac{azf\left[\dfrac{\rho(z+a)}{1+\bar{a}z}\right]}{f(\rho a)(z+a)(1+\bar{a}z)^{e^{-2i\alpha}}}$$

라고 하면

$$(1,3)\qquad \frac{zf_\rho'(z)}{f_\rho(z)}=1+\frac{\rho\left[\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right]\cdot f'\left[\dfrac{\rho(z+a)}{1+\bar{a}z}\right]}{f\left[\dfrac{\rho(z+a)}{1+\bar{a}z}\right]}\cdot\frac{z(1-|a|^2)}{(z+a)(1+\bar{a}z)}-\frac{z(1+\bar{a}z+\bar{a}ze^{-2i\alpha}+|a|^2e^{-2i\alpha})}{(z+a)(1+\bar{a}z)}$$

여기서 $z=e^{i\theta}$, $w=\dfrac{\rho(e^{i\theta}+a)}{1+\bar{a}e^{i\theta}}$라고 놓고, (1,3)에 $e^{i\alpha}$를 곱하면

$$(1,4)\qquad e^{i\alpha}\frac{zf_\rho'(z)}{f_\rho(z)}=e^{i\alpha}\frac{wf'(w)}{f(w)}\cdot\frac{1-|a|^2}{|1+ae^{-i\theta}|^2}+e^{i\alpha}\left[1-\frac{1+\bar{a}e^{i\alpha}+ae^{i\theta}\cdot e^{-2i\alpha}+|a|^2e^{-2i\alpha}}{|1+ae^{-i\theta}|^2}\right]$$

(1,4)의 우변의 둘째항은 순허수가 됨을 계산을 통하여 알수 있으므로, $|z|=1$에 대하여

$$(1,5)\qquad \mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha}\frac{zf_\rho'(z)}{f_\rho(z)}\right\}=\frac{1-|a|^2}{|1+ae^{-i\theta}|^2}\mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha}\frac{wf'(w)}{f(w)}\right\}\geq 0$$

따라서 모든 가능한 ρ에 대해서 $f_\rho(z)$가 函數族 F_α에 속하는 것을 알 수 있고, 또한 函數族 F_α가 Compact이므로 (1,5)로 부터

$$f_*(z)=\lim_{\rho\to 1} f_\rho(z)$$

도 함수족 F_α에 속한다는 것을 알 수 있다.

한 함수 f(z)가 $f(0)=0$, $f'(0)=1$인 조건에서 △안에서 Univalent인 함수족 S에 대한 radius of Convexity를 유도할 때에 Nehari[4]는 Univalence를 보존하는 transformation

$$\frac{f\left[\dfrac{z+h}{1+\bar{h}z}\right]-f(h)}{f'(h)(1-|h|^2)},\quad h\in\triangle$$

를 이용하였다. 마찬가지로 Lemma 1에서 정의한 transformation을 이용하면 함수족 F_α의 radius of starlikeness를 다음과 같이 구할 수 있다.

系 1. 函數族 F_α의 radius of starlikeness는

$$(1,6)\qquad [|\sin\alpha|+\cos\alpha]^{-1}$$

이다. 이 결과는 Sharp이다.

(증명) 만일 $f(z)\in F_\alpha$ 이고 $f_*(z)=z+b_2^*z^2+\cdots\cdots$가 (1,1)과 같이 주어졌다고 하면

$$(1,7)\qquad b_2^*=\frac{f_*''(0)}{2}=(1-|a|^2)\frac{f'(a)}{f(a)}-(1+e^{-2i\alpha}|a|^2)/a$$

(1,7)에서 a를 z로 바꾸고 $|z|=r$로 놓으면 〔3〕에서 얻은 $|b_2^*|\leq 2\cos\alpha$를 이용하여

$$(1,8)\qquad \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-\frac{1+e^{-2i\alpha}r^2}{1-r^2}\right|\leq\frac{2r\cos\alpha}{1-r^2},\quad z\in\Delta$$

를 얻는데 이것을 사용하여 다음을 얻는다.

$$(1,9)\qquad \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geq\frac{(1-2r\cos\alpha+r^2\cos^2\alpha)}{1-r^2}$$

(1,9)로부터 우리는 함수족 F_α의 radius of starlikeness는

$$(1,10)\qquad 1-2r\cos\alpha+r^2\cos\alpha$$

의 가장 작은 양의 근이 됨을 알수 있는데, 그것이 바로 (1,6)에 주어진 것임을 계산으로 알수 있다.

이 결과가 Sharp하다는 것을 증명하기 위하여 함수

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^{2\cos\alpha e^{-i\alpha}}}$$

와 $h=\dfrac{r(r-e^{i\alpha})}{1-re^{i\alpha}}$를 생각하자. 그러면

$$\frac{hf'(h)}{f(h)}=\frac{1-2\cos\alpha\cdot r+e^{-2i\alpha}\cdot r^2}{1-r^2}$$

는 $r=(|\sin\alpha|+\cos\alpha)^{-1}$에서 실수값이 0이 됨을 알수 있다.

위의 결과는 Robertson〔5〕과 Libera〔3〕에 의하여 각각 다른 방법으로 독립적으로 얻어진 결과를 더 쉬운 방법으로 증명해 본 것이다. (1,6)이나 (1,10)을 α의 함수로 생각하고 최소치를 구하면 〔6〕에서 얻은 결과와 똑같은 다음의 系2를 얻을 수 있다.

系 2. 函數族 F의 radius of starlikeness는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

函數族 F_α과 M_α의 관계를 사용하면 系1과 系2로 부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

系 3. 함수족 M_α의 radius of convexity는

$$(|\sin\alpha|+\cos\alpha)^{-1}$$

이고 함수족 M의 radius of convexity는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다. 이 결과는 Sharp이다.

Lemma 2. 만일 g(z)가 함수족 M_α에 있고, a가 △안의 임의 점이라 하고 또한 $g_*(z)$를 정의할 때

$$(1,11)\qquad g_*'(z)=\frac{g'\left(\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)}{g'(a)(1+\bar{a}z)e^{-2i\alpha}+1},\quad z\in\Delta,\quad g_*(0)=0$$

가 되도록 하면 $g_*(z)$는 함수족 M_α에 속한다.

(증명) 함수족 F_α에 있는 함수 f(z)를 택할 때 $zg'(z)=f(z)$를 만족시키도록 하고, $f_*(z)$를 (1,1)에 의해서 정의 되었다고 하자. 함수 $g_*(z)$를 $zg_*'(z)=f_*(z)$가 되도록 정의하면 곧 (1,11)을 얻는다.

系3은 系1의 방법을 써서 Lemma 2로부터 직접 얻을 수도 있다.

다음의 두 Lemma들은 이미 알려진 사실이나, 뒤 증명에서 필요하므로 적어둔다.

Lemma 3. 만일 함수 $g(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$가 함수족 M_α에 속하고 μ를 임의의 복소수라고 하면

$$(1,12)\qquad |a_3-\mu a_2^2|\leq\frac{1}{3}\cos\alpha\cdot\max\{1,\ |1-\cos\alpha\cdot e^{-i\alpha}(3\mu-2)|\}$$

이고, 이 부등호는 각 μ에 대해서 sharp이다.

(증명) 만일 $f(z)=z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots\cdots$를 $zg'(z)=f(z)$가 되도록 함수족 F_α에서 택하면, Keogh와 Merkes〔2〕에 의해서 증명된바와 같이 임의의 복소수 ν에 대하여

(1, 13) $$|b_3-\nu b_2^2|\leq\cos\alpha\cdot\max\{1,\ |1-2\cos\alpha\cdot e^{-i\alpha}(2\nu-1)|\}$$

이 부등호는 Sharp 이다. 따라서 (1, 12)는 (1, 13)으로 부터 곧 얻어짐을 알 수 있다.

Lemma 4. 만일 함수 $g(z)$가 함수족 M_α에 있으면

(1, 14) $$\begin{aligned}&-2\cos^2\alpha\cdot\arcsin(r\cos\alpha)+\sin 2\alpha\cdot\ln[(1-r^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}-r\sin\alpha]\\&\leq\arg[g'(z)]\\&\leq 2\cos^2\alpha\cdot\arcsin(r\cos\alpha)+\sin 2\alpha\cdot\ln[(1-r^2\cdot\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}+r\sin\alpha]\end{aligned}$$

Lemma 4는 Singh[9]의 정리 2와 유사한 것이다.

§2. 主定理와 證明

函數 $f(z)$가 $\triangle$에서 regular 이고, $\{f, z\}$를 함수 $f(z)$의 Schwarzian derivative 라고 하면

$$\{f, z\}=[f''(z)/f'(z)]'-\frac{1}{2}[f''(z)/f'(z)]^2$$

이다.

Nehari[5]는 함수 $f(z)$가 $\triangle$에서 univalent 이 되는 필요조건으로

$$|\{f, z\}|\leq\frac{2}{(1-|z|^2)^2},\quad z\in\triangle$$

임을 증명하였다. 이것을 이용하여 함수족 M_α에 속하는 함수 $f(z)$가 $\triangle$에서 univalent 가 되기 위한 α의 범위를 구하여 보자.

정리 1. 만일 $g(z)$가 M_α에 속하고 $|z|=r<1$이라면

(2, 1) $$|\{g, z\}|\leq\frac{(6|\sin\alpha|\cos\alpha+2\cos\alpha)}{(1-r^2)^2}$$

이고 $g(z)$는 $\triangle$에서 $0<\cos\alpha\leq x_0$에 대해서 univalent 이 된다. 단 x_0는 $9x^3+9x^2+x-1=0$, 의 양의 단일근으로 $.256<x_0<.257$이다.

(증명) 만일 $g(z)\in M_\alpha$이고 $g_*(z)=z+a_2^*z^2+a_3^*z^3+\cdots\cdots$가 (1, 11)를 만족시키도록 정의하면

$$a_2^*=\frac{1}{2}\left\{(1-|a|^2)\frac{g''(a)}{g'(a)}-\bar{a}(e^{-2i\alpha}+1)\right\}$$

이고

$$\begin{aligned}a_3^*=\frac{1}{6}\{&(1-|a|^2)^2\cdot g''(a)/g'(a)-2\bar{a}(1-|a|^2)(e^{-2i\alpha}+2)g''(a)/g'(a)'\\&+\bar{a}^2(e^{-2i\alpha}+1)(e^{-2i\alpha}+2)\}\end{aligned}$$

따라서

(2, 2) $$a_3^*-(a_2^*)^2=(1-|a|^2)^2\{g, a\}/6-(1-e^{-2i\alpha})(1-|a|^2)\bar{a}W/6-(1-e^{-4i\alpha})\bar{a}^2/12$$

단 $$W=g''(a)/g'(a)-\bar{a}(1+e^{-2i\alpha})/(1-|a|^2)=2a_2^*/(1-|a|^2)$$

函數族 M_α와 F_α의 관계로 부터

$$|W|\leq(2\cos\alpha)/1-|a|^2)$$

를 얻고 Lemma 3을 이용하여

$$|a_3^*-(a_2^*)^2|\leq\frac{1}{3}\cos\alpha$$

를 얻는다. (2, 2)에다 위의 두 부등식을 적용하고 a를 z로 바꾸고 $|z|=r$로 놓으면 다음을 얻는다.

$$|\{g, z\}|\leq\frac{4r|\sin\alpha|\cdot\cos\alpha+2r^2|\sin\alpha|\cos\alpha+2\cos\alpha}{(1-r^2)^2}\leq\frac{6|\sin\alpha|\cos\alpha+2\cos\alpha}{(1-r^2)^2}$$

따라서 Nehari의 방법에 의하여 $g(z)$가 univalent 가 되는 것은

$$3|\sin\alpha|\cos\alpha+\cos\alpha\leq 1$$

일때이고, 다시 말해서

$$9\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\leq(1-\cos\alpha)^2$$

일때이다. 즉 $\alpha=0$일 때 또는

$$9\cos^3\alpha+9\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\leq0$$

일때 $g(z)$가 univalent가 되는데 $\alpha=0$일 때는 $g(z)$가 함수족 K에 속하고, 따라서 Univalent이고, 또한 $9x^3+9x^2+x-1=0$는 다만 하나의 양의 근 x_0를 가지므로 $g(z)$는 $0<\cos\alpha\leq x_0$에 대해서 Univalent이 된다. 단, 계산에 의해서 $.256<x_0<.257$이 된다.

Robertson[7]은 함수족 M_α에 속하는 $g(z)$가 Univalent가 되는 것은 $0<\cos\alpha\leq x_1$ 단 $.231<x_1<.232$임을 증명하였다.

다음의 계는 정리 1에서 즉시 나오는 결과인데 역시 Robertson[7]의 논문에서도 볼 수 있다.

系 4. 만일 $g(z)\in K$이고 $|z|=r<1$이면

$$|\{g,z\}|\leq\frac{2}{(1-r^2)^2}$$

이다.

Kaplan[1]은 $g(z)$가 $\triangle$에서 regular이고 $g'(z)\neq0$, $z\in\triangle$이면 $g(z)$이 $|z|=r<1$을 close-to-Convex curve로 mapping하는 필요충분조건은 $z_2=e^{i\theta}z_1$, $0<\theta<2\pi$, $|z_2|=|z_1|=r$를 만족하는 모든 z_1, $z_2\in\triangle$에 대해서

$$\arg[z_2\cdot g_2'(z_2)]-\arg[z_1g'(z_1)]\leq-\pi \tag{2,3}$$

이라는 것을 보여 주었다. 지금 우리는 (2,3)을 이용하여 각 α에 대한 함수족 M_α의 radius of close-to-convexity를 결정해 보자.

정리 2. 만일 $\alpha\neq0$이고, r_0를 함수족 M_α의 radius of convexity라고 하자. 또한

$$x_0=(1-r^2\cos2\alpha)/2r|\sin\alpha|,\quad r\in(r_0,1)$$

$$\theta_0=2\arccos x_0,\quad 0<\theta_0<\pi$$

그리고

$$\begin{aligned}\triangle(r)=&\theta_0+2\cos^2\alpha\cdot\arctan\left\{\frac{r^2\sin\theta_0}{1-r^2\cos\theta_0}\right\}\\&-2\cos^2\alpha\cdot\arcsin\left\{r\cos\alpha\cdot\left[\frac{2(1-\cos\theta_0)}{1-2r^2\cos\theta_0+r^4}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\\&+\sin2\alpha\cdot\ln\{[1-2r^2(\sin^2\alpha\cdot\cos\theta_0+\cos^2\alpha)+r^4]^{\frac{1}{2}}-r\sin\alpha[2(1-\cos\theta_0)]^{\frac{1}{2}}\}\\&-\sin2\alpha\cdot\ln[1-r^2]\end{aligned}$$

라고 표시하면 함수족 M_α의 radius of close-to-convexity는 방정식

$$\triangle(r)=-\pi,\ \text{단}\ r\in(r_0,1)$$

의 단일근이다.

(증명) $\triangle$안에서 z_1, z_2를

$$z_2=e^{i\theta}z_1,\quad 0<\theta<2\pi,\quad |z_1|=r$$

를 만족하는 임의의 두점이라고 하고,

$$\triangle(r,\theta)=\inf_{g(z)\in M_\alpha}\arg\left\{\frac{z_2g'(z_2)}{z_1g'(z_1)}\right\}$$

로 놓자, 여기서 argument는 최초의 값 zero로 부터 계속 변하도록 취해진 것이다. 만일 $g(z)$가 함수족 M_α에 있을 때 Cr을 mapping $g(z)$아래 $|z|=r$의 像이라고 하면 (2,3)으로 부터 Cr은 close-to-convex curve가 될 것이다.

만일 $h=\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$, $h_0=\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}$ 라 하고

$g_*(h)$를

$$g'_*(h)=\frac{g'\left[\frac{h+z_1}{1+z_1 h}\right]}{g'(z_1)(1+\bar{z}_1 h)^{e^{-2i\alpha}+1}},\quad g_*(0)=0$$

로 정의하면, Lemma 2로 부터 $g_*(h)$는 함수족 M_α에 속하는 것을 알 수 있다. 따라서

$$g'_*(h_0)=\frac{g'(z_2)}{g'(z_1)}\cdot\left\{\frac{1-\bar{z}_1 z_2}{1-|z_1|^2}\right\}^{e^{-i\alpha}+1}$$

이고, 결과적으로, 우리는 다음을 얻는다.

$$(2,5)\qquad \triangle(r,\theta)=\arg\left\{\frac{z_2}{z_1}\left[\frac{1-|z_2|^2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right]^{e^{-2i\alpha}+1}\right\}+\inf_{g_*(h)\in M_\alpha}\operatorname{ang}\{g_*'(h_0)\}$$

$$(2,6)\qquad |h_0|=r\{2(1-\cos\theta)/(1-2r^2\cos\theta+r^4)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(2,7)\qquad \arg\left\{\left[\frac{1-|z_1|^2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right]^{e^{-2i\alpha}+1}\right\}=2\cos^2\alpha\cdot\arc\tan\frac{r^2\sin\theta}{1-r^2\cos\theta}$$
$$-\sin 2\alpha\cdot\ln\left[\frac{1-r^2}{(1-2r^2\cos\theta+r^4)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

(1,14), (2,6) 그리고 (2,7)을 (2,5)에 적용하면

$$(2,8)\qquad \triangle(r,\theta)=\theta+2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{arc}\tan\left[\frac{r^2\sin\theta}{1-r^2\cos\theta}\right]$$
$$-2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{arc}\sin\left\{r\cos\alpha\left[\frac{2(1-\cos\theta)}{1-2r^2\cos\theta+r^4}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$+\sin 2\alpha\cdot\ln\{[1-2r^2(\cos\theta\cdot\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+r^4]^{\frac{1}{2}}-r\sin\alpha[21-\cos\theta)]^{\frac{1}{2}}\}$$
$$-\sin 2\alpha\cdot\ln(1-r^2)$$

(2,8)에서 주어진 $\triangle(r,\theta)$의 표현은 Sharp 인데, 왜냐하면, 만일 함수족 M_α에 있는 함수 $f_*(z)$가 (1,14)에서의 등호로 주어진다고 하고, 고정된 z_1, z_2에 대해서 함수족 M_α에 있는 다른 함수를

$$f'(z)=\frac{f_*'\left[\frac{z-\bar{z}_1}{1-\bar{z}_1 z}\right]}{f_*'(-z)(1-z_1 z)^{e^{-2i\alpha}+1}},\quad f(0)=0$$

로 정의하면 거기에서 다음 사실을 얻는다.

$$\arg\left\{\frac{z_2 f'(z_2)}{z_1 f'(z_1)}\right\}=\triangle(r,\theta)$$

만일 $\triangle(r)=\inf_{0<\theta<2\pi}\triangle(r,\theta)$이면 분명히 $\triangle(r)$ 은 r의 감소함수가 되고 만일 해가 존재하면, 함수족 M_α의 radius of close-to-convexity는 방정식

$$\triangle(r)=-\pi$$

의 해 r_1이 된다.

나머지 증명은 r_1이 존재한다는 것을 밝히고 그 r_1이 α에만 의존하는 방정식의 근이 된다는 것을 증명하면 된다.

만일 r_0를 함수족 M_α이 radius of convexity라고 하면 $r\leq r_0$에 대해서 $\triangle(r)\geq 0$이고 따라서 $r_1>r_0$이다. 그래서 우리는 나머지 증명을 통하여 $r\in(r_0, 1)$로 가정하자.

(2,8)을 θ에 관해서 미분하면

$$(2,9)\qquad \frac{\partial\triangle(r,\theta)}{\partial\theta}=1+\frac{2\cos^2\alpha\cdot r^2(\cos\theta-r^2)}{1-2r^2\cos\theta+r^4}$$

$$-\frac{2r\cos\alpha\cdot\sin\theta[1-2r^2(\cos\theta\cdot\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+r^4]^{\frac{1}{2}}}{[2(1-\cos\theta)]^{\frac{1}{2}}(1-2r^2\cos\theta+r^4)}$$

를 얻는다. 만일 $x=\cos\frac{\theta}{2}$, $0<\theta<2\pi$라고 하면

$$\cos\theta=2x^2-1,$$

$$\frac{\sin\theta}{[2(1-\cos\theta)]^{\frac{1}{2}}}=x$$

이므로 (2,9)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial\triangle(r,\theta)}{\partial\theta}=\frac{p(x)-2rx\cos\alpha\cdot k(x)}{g(x)}$$

단

$$p(x)=(1+r^2)(1+r^2-2r^2\cos^2\alpha)-4r^2x^2\sin^2\alpha$$

$$k(x)=[1-2r^2\cos2\alpha+r^4-4r^2x^2\cdot\sin^2\alpha]^{\frac{1}{2}}$$

$$g(x)=(1+r^2)^2-4r^2x^2$$

여기서 $r\in(0,1)$, 그리고 $x\in(-1,1)$ 에 대해서 $g(x)>0$ 이므로 $\frac{\partial\triangle(r,\theta)}{\partial\theta}$ 의 근들은

$$p_1(x)=p(x)-2rx\cos\alpha K(x)$$

의 근들과 같게 된다.

$x\in(-1,1)$ 에 대해서

$$p(x)\geq(1-r^4)-(1-r^2)2r^2\sin^2\alpha\leq(1-r^2)>0$$

$$k(x)>0$$

이므로 $p_1(x)$ 는 $(-1,0)$ 에서 근을 갖지 않는다.

x를 주간 $(0,1)$ 에 국한시키면 즉 θ를 $(0,\pi)$ 에 제한한다면 $p_1(x)$ 의 근은

$$p_2(x)=p(x)^2-4r^2x^2\cdot\cos^2\alpha\cdot k(x)^2=a_0-a_1x^2+a_2x^4$$

단, 여기서

$$a_0=(1+r^2)^2(1-r^2\cos2\alpha)^2$$

$$a_1=4r^2[(1-r^2\cos2\alpha)^2+(1+r^2)^2\cdot\sin^2\alpha]$$

$$a_2=16r^4\sin^2\alpha,$$

의 근과 같게 되고, 따라서 $p_2(x)$ 의 양의 근은

$$x_0=\frac{1-r^2\cos2\alpha}{2r|\sin\alpha|},\qquad x_1=\frac{1+r^2}{2r}$$

이 된다.

$r\in(0,1)$ 에 대해서 $x_1>1$ 이므로 $p_2(x)$ 는 단지 $x_0<1$ 일 때에 한하여 구간 $(0,1)$ 에서 한 근을 갖게 되며

$$p_2(0)=(1+r^2)^2(1-r^2\cos2\alpha)^2>0$$

$$p_1(1)=(1-r^2)^2(1-2r^2+r^4\cdot\cos^22\alpha)$$

$$=(1-r^2)^2(1-2r\cos\alpha+r^2\cos2\alpha)(1+2r\cos\alpha+r^2\cos2\alpha)$$

이다.

(1,10) 과 함수족 M_α 와 F_α 의 관계로 부터 $r>r_0$ 이면

$$1-2r\cos\alpha+r^2\cos2\alpha<0$$

이 된다.

또한 $|\alpha|<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$1+2r\cos\alpha+r^2\cdot\cos2\alpha\cdot\geq1-r^2>0$$

이다. 그러므로 $p_1(1)<0$, $p_2(0)>0$ 에 의해서 $r\in(r_0,1)$ 일 때 $x_0<1$ 이 된다.

이와 같이 우리는 $x\in(-1,1)$ 일 때 x_0 가 $p_1(x)$ 의 유일한 근임을 증명했고, 결과적으로 $\theta_0=2\ \mathrm{arc}\cos x_0$ 라고 놓으로서 θ_0 가 $0<\theta<2\pi$ 에 대해서 $\frac{\partial}{\partial\theta}\triangle(r,\theta)$ 의 유일한 근임을 증명하였다. θ 가 θ_0 에 가까울 때에 $\frac{\partial}{\partial\theta}\triangle(r,\theta)$ 의부호를 따저보면 $\triangle(r,\theta)$ 는 θ_0 에서 최소치를 가지므로

$$\triangle(r)=\inf_{\theta}\triangle(r,\theta)=\triangle(r,\theta_0)$$

이고 (2,8) 에서 $\theta=\theta_0$ 로 놓으면 (2,4) 를 얻는다.

간단한 계산에 의해서 우리는 $r\to1$ 일 때 $\triangle(r)\to-\infty$ 임을 알 수 있다. $\triangle(r)$ 는 아래로 막히지 않은 연속감소함수이고 또한 $\triangle(r_0)=0$ 이므로 방정식

$$\triangle(r)=-\pi$$

에 대한 유일한 解 r_1 이 存在함을 알 수 있고, 이 값 r_1 이 함수족 M_α 의 radius of close-to-convexity 가 된다.

REFERENCES

[1] W. Kaplan, Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math J. 1(1952), 169—185 MR 14, 966

[2] F.R. Keogh and E.P. Merkes, A coefficient ineguality for certain classes of analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969), 8—12. MR 38—1249

[3] R.J. Libera, Univalent α-spiral functions, Canad. J. Math. 19 (1967), 449—456. MR35 5599

[4] Z. Nehari, Conformal mapping, McGraw-Hill,New York, 1952 MR 13, 640

[5] Z. Nehari, The Schwarzian derivative and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 545—551. MR. 10, 696

[6] M.S. Robertson, Radii of star-likeness and close-to-convexity, Proc. Amer. Math. Soc. 16(1965), 847—852. MR 31—5971

[7] M.S. Robertson, Univalent functions f(z) for which zf′(z) is spirallike, Michigan Math. J. 16 (1969), 97—101, MR 39 5785

[8] R. Singh, A note on spiral-like functions. J. Indian Math. Soc.33 (1969), 49—55. MR 41 454

[9] L. Spacek. K. teorii funkci prostych, CasopisTPest. Mat. Fys. 62(1933), 12—19.