◎ 講 座

Tellegen의 定理에 대하여

高 明 三*

──차 례──

1. 緖 論

회로망定理에는 Kirchhoff의 法則을 바탕으로 한 Tellegen의 定理[T-1]를 비롯하여 置換定理, 重疊定理, Thevenin-Norton의 定理 및 相反定理 등이 있다. 이들 諸定理들은 실제 우리 電氣工學者 및 技術者들이 실제문제 또는 현장에서 작업하는 과정에서 자주 부딛치게 되는 각종 回路網에 광범위하게 적용될 수 있을 뿐만 아니라, 그 結論이 매우 간단하므로 그 有用性은 매우 크다. 그러나 이들 諸定理들이 지니고 있는 一般性과 簡易性을 잘못 인식하여, 실제 應用에서 맛볼 수 있는 통쾌감을 제대로 느끼지 못하는 사람들이 비교적 많다.

본 해설에서는 上記한 諸定理중 비교적 최근에 발표된(1952년) Tellegen의 定理에 대하여 설명하며, 이 定理가 어떻게 有用하게 이용될 수 있는가를 보기를 통해서 설명하고저 한다.

2. Tellegen의 定理

e개의 가지와 v개의 마디들로 구성된 한 집중회로 N에 있어서, 각 루우프를 형성하는 가지들의 가지전압 $v_1, v_2 \cdots, v_e$가 KVL(킬르히호프의 전압法則)을 만족하며, 모든 마디에서의 가지전류 $i_1, i_2 \cdots i_e$가 KCL(킬르히호프의 전류法則)을 만족한다면

$$\sum_{k=1}^{e} v_k(t) i_k(t) = 0 \tag{1}$$

가 성립한다. 단 전류 $i_k(t)$와 전류 $v_k(t)$의 正方向은 다음과 같이 정해짐을 원칙으로 한다.

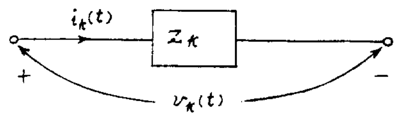


그림 1. 가지전류 및 가지전압의 방향
Fig 1. Orientation of branch current and branch-voltage.

증명

이 定理의 증명에는 여러가지 방법이 있겠으나 여기서는 回路網 topology에 의한 方法을 이용한다.

지금 가지 전류 벡터 및 가지 전압 벡터를 각각 I_e, V_e라 하면

$$\sum v_k i_k = I_e^T V_e \tag{2}$$

으로 주어진다.

단

$$I_e = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_e(t) \end{pmatrix}, \qquad V_e = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_e(t) \end{pmatrix}$$

다음 (n×e) 回路行列(circuit matrix)을 B, $(v-1)\times e$ 접속行列(incidence matrix)을 A, $(n\times 1)$ 루우프 전류벡터(loop current vector)를 I_m, $(v-1)\times 1$ 마디간 전압벡터(node-pair voltage vector)을 V_n라하면

$$I_e = B^T I_m \tag{3}$$

$$V_e = A^T V_n \tag{4}$$

인 관계식이 성립한다.

식 (3), (4)를 (2)에 대입하여 정리하면

$$\sum_{k=1}^{e} v_k i_k = I_e^T V_e = (B^T I_m)^T (A^T V_n)$$

$$= I_m^T B A^T V_n = I_m^T (A \cdot B_T)^T V_n = 0$$

단, $A \cdot B^T = 0$

따라서 Tellegen의 정리가 성립됨을 증명하였다.

*정회원 : 서울大工大 副敎授(工學博士)

3. Tellegen의 定理의 뜻과 그 應用

Tellegen의 定理를 증명하는 과정에서의 제약조건으로는 Kirchhoff의 法則만을 이용하였을 뿐 가지 소자들의 특성 및 종류에 대하여는 전혀 언급되지 않았다. 이러한 조건으로 부터 다음과 같은 중요한 사실을 얻을 수 있다.

(1) Tellegen의 定理는 임의의 회로망, 즉 선형 혹은 비선형, 수동 혹은 능동, 시변 혹은 시불변회로망에 있어서 Kirchhoff의 法則이 성립하는 모든 집중회로에서 성립된다.

(2) 가지특성 혹은 電壓—電流관계를 이 定理의 유도과정에서 이용하지 않았으므로 식(1)은 전압 및 전류집합들이 서로 다른 시간 t_1, t_2($t_1 \neq t_2$)에서 얻어진 경우에도 성립한다. 즉

$$\sum_{k=1}^{e} v_k(t_1) v_k(t_2) = 0 \tag{5}$$

(3) e을 가지와 v개의 마디로 구성된 同一한 有同性그래프(oriented gpaph) G를 갖는 두 개의 회로망을 각각 N, $\hat{N}$라 한다. 지금 N 및 $\hat{N}$의 가지전압을 각각

$$v_1, v_2, \cdots, v_e \text{ 및 } \hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_e$$

라 하고, 가지전류를 각각

$$i_1, i_2, \cdots, i_e \text{ 및 } \hat{i}_2, \hat{i}_e, \cdots, \hat{i}_e$$

라 하면 Tellegen의 정리에 의하여

$$\sum_{k=1}^{e} v_k(t_1) \hat{i}_k(t_2) = 0$$

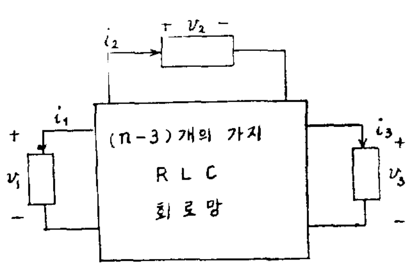
$$\text{및} \quad \sum_{k=1}^{e} \hat{v}_k(t_1) i_k(t_2) = 0$$

인 관계가 성립한다.

이상의 제사실을 이용하면 다음과 같은 재미있는 문제를 풀 수 있게 된다.

보기 : 1

지금 침착성이 없는 어떤 기술자가 선형시불변 RLC 회로망(그림 참조)의 正弦波 定常狀態에서의 가지전압과 전류를 측정한 결과를 위상자(phasor)로 다음과 같이 표시하였다. 단 측정각주파수는 ω_1이다.



$$V_1 = 10_e{}^{j5^\circ} \qquad I_1 = 5_e{}^{j40^\circ}$$
$$V_2 = 5_e{}^{j15^\circ} \qquad I_2 = 7_e{}^{j45^\circ}$$
$$V_3 = 17_e{}^{-j10^\circ} \qquad I_3 = 5_e{}^{-j50^\circ}$$

다음 이 기술자는 전원전압을 변화시킨 후(단 각 주파수는 동일한 ω_1임) 上記한 실험을 반복하여 다음과 같은 측정치를 기록하였다.

$$\hat{V}_1 = 7e^{-10^\circ}$$
$$\hat{V}_2 = 3e^{j5^\circ}$$
$$\hat{I}_1 = 15e^{-j35^\circ}$$
$$\hat{I}_2 = 5e^{-j35^\circ}$$
$$\hat{I}_3 = 10e^{j30^\circ}$$

즉 이 기술자는 부주의한 실험결과로 인하여 $\hat{V}_3$의 기록을 하지 못하였다. 이 경우 과연 우리들은 이 전압 $\hat{V}_3$을 구할 수 있을 것인가?

해 : 이 문제는 본 Tellegen의 정리의 사용으로 쉽게 그 해를 구할 수 있게 된다.

주어진 회로망은 RLC 시불변소자로 주어졌음으로 임의의 k번째 가지(예를 들면 R_k라고 하자)에서의 가지전압과 가지전류를 V_k, I_k 혹은 $\hat{V}_k$, $\hat{i}_k$라 하면

$$V_k = R_k I_k \tag{6}$$

$$\text{및} \quad \hat{V}_k = \hat{R}_k \hat{I}_k = R_k \hat{I}_k \tag{7}$$

인 관계가 성립한다.

한편 Tellegen의 정리에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{V}_k \hat{I}_k = \sum_{k=1}^{n} V_k \hat{I}_k = 0$$

따라서

$$\hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 + \hat{V}_3 I_3 + \sum_{k=4}^{n} \hat{V}_k \hat{I}_k = V_1 \hat{I}_1 + V_2 \hat{I}_2 + V_3 \hat{I}_3 + \sum_{k=4}^{n} V_k \hat{i}_k \tag{8}$$

식 (6), (7)에 의하여

$$\hat{V}_k \hat{I}_k = R_k \hat{I}_k I_k = R_k I_k \hat{I}_k = V_k \hat{I}_k \tag{9}$$

$$\text{단} \quad k = 4, 5, \cdots, n$$

식 (9)와 (8)에 의하여

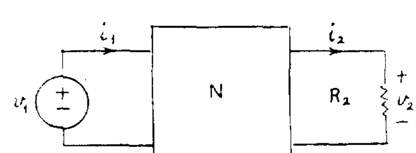
$$\hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 - \hat{V}_3 I_3 = V_1 \hat{I}_1 + V_2 \hat{I}_2 + V_3 \hat{I}_3$$

$$\therefore \hat{V}_3 I_3 = V_1 \hat{I}_1 + V_2 \hat{I}_2 + V_3 \hat{I}_3 - \hat{V}_1 I_1 - \hat{V}_2 I_2$$
$$= 150e^{j-30^\circ} + 25e^{-j20^\circ} + 170e^{j20^\circ} - 35e^{j30^\circ} + 21e^{j50^\circ}$$
$$= 27.6e^{-j12.5^\circ}$$

$$\therefore \hat{V}_3 (5e^{-j50^\circ}) = 27.6e^{-j12.5^\circ}$$

$$\therefore \hat{V}_3 = 5.52e^{j37.5^\circ}$$

보기 2.



$(n-2)$개의 선형시불변저항으로 구성된 회로망 N에서의 入力 出力 전류전압을 측정한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

$R_2=1\Omega$ 인 경우 $V_1=4V$, $V_2=1V$, $I_1=1A$

$\hat{R}_2=2\Omega$ 인 경우 $\hat{V}_1=6V$, $\hat{V}_2=?$ $\hat{I}_1=1.2A$

전압 $\hat{V}_2$를 구하라.

해 : 이 문제 역시 보기 1과 마찬가지로 Tellegen의 정리가 적용될 수 있는 대표적인 문제임과 동시에 우리들 전기기술자들의 주위에서 흔히 있을 수 있는 문제라 볼 수 있다.

Tellegen의 정리에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n} V_k \hat{I}_k = \sum_{k=1}^{n} \hat{V}_k I_K$$

$$\therefore\ V_1\hat{I}_1 + V_2\hat{I}_2 + \sum_{k=3}^{n} V_k\hat{I}_k = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 + \sum_{k=3}^{n} \hat{V}_k I_k$$

그런데 보기 1의 식 (6)(7)의 관계로부터

$$V_1\hat{I}_1 + V_2\hat{I}_2 + \sum_{k=3}^{n} R_k I_k \hat{I}_k = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2 + \sum_{k=3}^{n} R_k \hat{I}_k I_k$$

$$\therefore\ V_1\hat{i}_1 + V_2\hat{i}_2 = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2$$

주어진 측정치를 윗식에 대입하면

$$4(-1.2) + 1\left(\frac{\hat{V}_2}{2}\right) = 6(-1) + \hat{V}_2\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\frac{\hat{V}_2}{2} - \hat{V}_2 = -6 + 4.8 = -1.2$$

$$\therefore\ \hat{V}_2 = 2.4[V]$$

4. 結　論

이상의 응용 례를 통하여 우리들은 Tellegen의 정리가 전기회로에 어떻게 이용할 수 있는가를 알게 되였다. 이 정리는 Tellegen 氏에 의하여 1952년에

[T-1] : B.D.H. Tellegen, "A General Nework Theoren, With Application," Philips Research Reports, 7, 1952, pp. 259~269.

인 잡지를 통하여 처음 발표된 비교적 새로운 정리이다.

끝으로 여기 기술된 내용을 통해서 특히 현장에 계신 전기기술자들에게 다소나마 새로운 전기회로이론의 일부를 이해하는데 도움이 되었으면 하는 마음 간절하다.

註 : 位相子(phasor)란 만일 $i(t)$가 $i(t)=Ae^{j(\omega t+\theta)}$로 주어지는 경우 전류의 위상자 I는 $Ae^{j\theta}$를 의미한다.