논 문
23~1~3

벡터入力을 갖는 離散線型時不變 시스템의 피이드백 조정기의 해석적 설계

An Analytical Design of a Feedback Regulator with Vector Input in a Discrete Linear Time Invariant Systems

고 명 삼* · 양 해 원**
(Myoung Sam Ko · Hae Won Yang)

Abstract

This paper deals with an analytical design of a feedback regulator with vector input in discrete linear time-invariant systems.

We have derived some relations such that the eigenvalues of a system plant with vector input under the time-optimal control strategy can be arbitrarily changed by the characteristics of the minor loop compensator which is indroduced in the feedback path.

1. 서 론

현대 제어이론은 1950년대부터 널리 알려진 것으로 응용수학 및 콤퓨터의 활용에 역점을 두고 있는 해석적 방법이며, 복잡한 제어시스템의 설계에 있어서 대단한 가치가 있다는 것이 입증되고 있다.

주파수 영역 설계에서 설계조건(design criterion)을 圖式的 해석의 편의를 위하여 선정하는 것처럼 현대 제어시스템 설계에서의 기능판별법(performance criterion)은 수학적 편의를 위하여 정한다.

따라서 최적제어는 시스템의 실제 기능에 의해서 뿐만 아니라 시스템의 수학적 설계를 가능케 하는 어떤 기능판별법에 의하여도 최적으로 판단되어지는 것이다 최적제어 설계문제의 여러 형태 가운데 최적시간제어와 최소적분제어가 일반적이다. 최단시간제어란 시스템의 한 상태로부터 또다른 한 상태로 최단시간에 이동시키는 제어정책을 말한다.

본논문에서는 시스템이 단일入力[1]이 아닌 벡타入力을 가질 경우 일어나는 여러 문제점 중에서 몇가지 사항을 고찰하기로 한다.

2. 본 론

(1) 최단시간 피이드백 정책시에 보상기의 도입에 의해 시스템의 특성을 개선하는 방법.

$$X(k+1)=AX(k)+Bu(k) \qquad (1)$$

$X(k)$: $n\times 1$ vector $u(k)$: $r\times 1$ vector

A : $n\times n$ matrix B : $n\times r$ matrix

가정 : ① 식 (1)의 계수행렬 A는 正則행렬이다.

② $n=rp$ 단 p는 자연수.

③ 식 (1)의 system에서 초기 상태 $X(0)$는 p 샘플주기안에 원점으로 이동시킬 수 있다.

$$X(1)=AX(0)+Bu(0)=A[X(0)+A^{-1}Bu(0)]$$

$$X(2)=AX(1)+Bu(1)=A^2X(0)+ABu(0)+Bu(1)$$
$$=A^2[X(0)+A^{-1}Bu(0)+A^{-2}Bu(1)]$$
$$\vdots$$
$$X(p)=AX(p-1)+Bu(p-1)$$
$$=A^p[X(0)+\sum_{i=0}^{p-1}A^{-(i+1)}Bu(i)]$$

가정에 의하여 $x(p)=0$가 될 수 있을 것이며 A가 正則행렬인 것을 고려하면,

$$X(p)=0=A^p[X(0)+\sum_{i=0}^{p-1}A^{-(i+1)}Bu(i)]$$

$$X(0)=-\sum_{i=0}^{p-1}A^{-(i+1)}Bu(i)$$
$$=-[A^{-1}Bu(0)+A^{-2}Bu(1)+\cdots+A^{-p}Bu(p-1)]$$
$$=-[A^{-1}B\vdots A^{-2}B\vdots\cdots\vdots A^{-p}B]\begin{pmatrix} u(0) \\ \cdots\cdots \\ u(1) \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ u(p-1)\end{pmatrix}$$
$$=-DU$$

*정회원 : 서울工大 副教授(工學博士)
**정회원 : 陸軍士官學校 專任講師

단 $D_i \triangleq A^{-(i+1)}B$ $(i=0,1,2,\cdots, p-1)$

$$D=\begin{pmatrix} D_0 \\ \cdots\cdots \\ D_1 \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ D_{p-1}\end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} u(0)\\ \cdots\cdots \\ u(1) \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ u(p-1)\end{pmatrix}$$

따라서 $U=-D^{-1}X(0)\triangleq EX(0)$

$$\text{단 } E=-D^{-1}=\begin{pmatrix}E_1\\ \cdots\cdots\\ E_2 \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ E_p\end{pmatrix}$$

$u(0)=E_1X(0)$

$u(1)=E_2X(0)$

....

$u(p-1)=E_pX(0)$

그런데 시스템이 초기상태 $X(0)$에서 p 샘플 주기 안에 원점에 도달될 수 있다면 $X(1)$에서는 $(p-1)$ 샘플 주기안에 원점으로 갈 수 있을 것이다.[4]

즉 $X(2)=AX(1)+Bu(1)$

$X(3)=AX(2)+Bu(2)$

$=A^2[X(1)+A^{-1}Bu(1)+A^{-2}Bu(2)]$

....

$X(p)=AX(p-1)+Bu(p-1)$

$=A^{p-1}[X(1)+\sum_{i=1}^{p-1}A^{-i}Bu(i)]$

$$\therefore\ X(1)=-\sum_{i=1}^{p-1}A^{-i}Bu(i)=-D\begin{pmatrix}u(1)\\ \cdots\cdots \\ u(2) \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ u(p)\end{pmatrix}$$

$(\because\ X(p)=0)$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}u(1)\\ \cdots\cdots \\ u(2) \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ u(p)\end{pmatrix}=E_1X(1) \qquad \therefore\ u(1)-E_1X(1)$$

같은 방법으로 $u(k)=E_1X(k)$ $k=0,\ 1,\cdots,\ p-1$

따라서 $E_1\triangleq F$라 하면 F는 $r\times n$ 행렬이며

$u(k)=FX(k)$ $k=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1$

한편 F는 D^{-1}의 처음 r row의 negative에 해당하는 행렬이므로

$FD_0=-I$

$FD_i=0$ $i=1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$

다음에 피이드백 제어정책을 수반하는 최단시간 제어시스템을 위한 조정기의 해석적 구조에 관하여 고찰한다.

$X(k+1)=AX(k)+Bu(k)=AX(k)+BFX(k)$

$=(A+BF)D(k)$ $\qquad Q\triangleq A+BF$

$QD_0=(A+BF)D_0=A(I=A^{-1}BF)D_0$

$=A[D_0-D_0]=0$

$QD_i=(A+BF)D_i=A(D_i+A^{-1}BFD_i)=AD_i=D_{i-1}$

$i=1,\ \cdots,\ p-1$

$$\therefore\ QD=Q\begin{pmatrix}D_0\\ \cdots\cdots\\ D_1\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ D_{p-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \cdots\cdots\\ D_0\\ \cdots\cdots\\ D_1\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ D_{p-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_0\\ \cdots\cdots\\ D_1\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ D_{p-1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overset{r\times r}{0} & \overset{r\times r}{I} & & \\ & & & 0 \\ & & I & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & I \\ & & & 0 \end{pmatrix}\triangleq DH$$

$\therefore\ H=D^{-1}QD$ 즉 Q는 H에 similar이다.

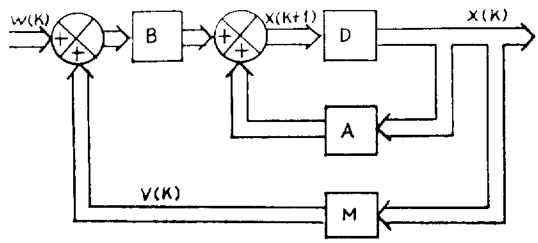

그림. 국부회로 보상기를 도입한 시스템

Fig. System with a minor loop compensator.

시스템 (1)에 $V(k)=MX(k)$로 주어지는 보상기를 그림과 같이 피이드백 path에 도입한다면 이 보상된 시스템의 상태 방정식은

$$X(k+1)=(A+BM)X(k)+BW(k) \tag{2}$$

최단시간 제어정책을 위의 시스템에 도입한다면

$U(k)=W(k)+V(k)+\alpha(k)$ 단 $\alpha(k)=FX(k)$

$X(k+1)=AX(k)+Bu(k)$

$=AX(k)+B[W(k)+V(k)+FX(k)]$

$=(A+BF)X(k)+B[W(k)+V(k)]$

이제 $X(k)=D\hat{X}(k)$의 변환을 하면

$\hat{X}(k+1)=D^{-1}QD\hat{X}(k)+D^{-1}B[W(k)+(V(k)]$

$=H\hat{X}(k)+D^{-1}B[W(k)+V(k)]$

다시 $\hat{X}(k)=T\check{X}(k)$의 변환을 통하여

$\check{X}(k+1)T^{-1}HT\check{X}(k)+T^{-1}D^{-1}B[W(k)+V(k)]$

여기에서 만일 $T^{-1}HT=H$

$$T^{-1}D^{-1}B=R\triangleq\begin{pmatrix}0\\ \cdots\cdots\\ 0\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ I\end{pmatrix} \quad V(k)=\check{M}\check{X}(k)$$

로 될 수 있다면

$\check{X}(k+1)=H\check{X}(k)+R[W(k)-\check{M}\check{X}(k)]$

$=(H+R\check{X})\check{M}(k)+RW(k)$

와 같이 될 것이다.

그러면

$$H+R\check{M}=\begin{pmatrix}0 & I & & \\ & & 0 & \\ & & I & \\ & 0 & & I \\ & & & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \cdots\\ 0\\ \cdots\\ \vdots\\ \cdots\\ I\end{pmatrix}[\check{M}_1 \vdots \check{M}_2 \vdots \cdots \vdots \check{M}_p]$$

$$=\begin{pmatrix}0 & I & & \\ & & I & \\ & & & I \\ \check{M}_1 & \check{M}_2 & \cdots & \check{M}_p\end{pmatrix}$$

$H+R\check{M}$ 의 특성방정식은

$$\det(-\lambda^p I+\lambda^{p-1}\check{M}_p+\lambda^{p-2}\check{M}_{p-1}+\cdots+\check{M}_1)=0 \qquad (3)$$

따라서 국부회로 보상기를 도입한 시스템 (2)의 계수행렬 $A+BM$의 고유치의 크기는 식 (3)에서 알 수 있는 바와 같이 보상기에 따라 달라지므로 임의의 원하는 고유치를 시스템 자체가 가질 수 있도록 할 수 있다. 즉 시스템 플랜트가 불안정한 경우 국부회로 보상기를 이용하여 최단시간 정책하에 시스템의 고유특성을 개선할 수 있다.

한편 선형연산자 T 는

$$D^{-1}B=\begin{pmatrix}G_p\\ \cdots\cdots\\ G_{p-1}\\ \cdots\cdots\\ \vdots\\ \cdots\cdots\\ G_1\end{pmatrix}\text{의 경우}\qquad T=\begin{pmatrix}G_1 & G_2\cdots & P_p\\ & G_1 & G_{p-1}\\ & 0 & G_1\end{pmatrix}$$

으로 정하면 $TH=HT$, $D^{-1}B=TR$ 을 만족시킴을 알 수 있다.

보기

$$X(k+1)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 2 & & 0\\ & & 3 & \\ & 0 & & 4\end{pmatrix}X(k)+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}u(k)\quad X(0)=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 4\\ 5\end{pmatrix}$$

$$D_0=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & \frac{4}{3}\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\quad D_1=A^{-1}D_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9}\\ \frac{1}{16} & 0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0\end{pmatrix}\quad D^{-1}=-24\begin{pmatrix}\frac{1}{72} & 0 & 0 & -\frac{2}{9}\\ \frac{1}{96} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{18} & 0 & 0 & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{48} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$F=F_1=24\begin{pmatrix}\frac{1}{72} & 0 & 0 & -\frac{2}{9}\\ \frac{1}{96} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$u_0=FX(0)=24\begin{pmatrix}\frac{1}{72} & 0 & 0 & -\frac{2}{9}\\ \frac{1}{96} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 4\\ 5\end{pmatrix}$$

$$=24\begin{pmatrix}-\frac{79}{72}\\ \frac{149}{96}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{79}{3}\\ \frac{149}{4}\end{pmatrix}$$

$$X(1)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 2 & & 0\\ & & 3 & \\ & 0 & & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 4\\ 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{79}{3}\\ \frac{149}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{76}{3}\\ \frac{161}{2}\\ 82\\ -\frac{19}{3}\end{pmatrix}$$

$$u_1=24\begin{pmatrix}\frac{1}{72} & 0 & 0 & -\frac{2}{9}\\ \frac{1}{96} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{76}{3}\\ \frac{161}{2}\\ 82\\ -\frac{19}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{76}{3}\\ -\frac{161}{2}\end{pmatrix}$$

$$X(2)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 2 & & 0\\ & & 3 & \\ & 0 & & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{76}{3}\\ \frac{161}{2}\\ 82\\ -\frac{19}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{76}{3}\\ -\frac{161}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Q=A+BF=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 2 & & 0\\ & & 3 & \\ & 0 & & 4\end{pmatrix}+24\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{72} & 0 & 0 & -\frac{2}{9}\\ \frac{1}{96} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 0 & 0 & -\frac{16}{3}\\ \frac{1}{2} & 6 & -\frac{9}{2} & 16\\ 2 & 8 & -6 & 16\\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$D^{-1}Q\,D=-24\begin{pmatrix}\frac{1}{72} & 0 & 0 & -\frac{2}{9}\\ \frac{1}{96} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{18} & 0 & 0 & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{48} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 0 & 0 & -\frac{16}{3}\\ \frac{1}{2} & 6 & -\frac{9}{2} & 16\\ 2 & 8 & -6 & 16\\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}D$$

$$
=-24\begin{pmatrix} -\frac{1}{18} & 0 & 0 & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{48} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=-24\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{24} & 0 \\ & & 0 & -\frac{1}{24} \\ & 0 & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \vdots I \\ \cdots\cdots \\ 0 \vdots 0 \end{pmatrix}=H
$$

따라서 Q가 H에 similar임을 알 수 있다.

$\check{M}=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$라 가정하면

$$
H+R\check{M}=\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&0 \\ 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ a&b&c&d \\ e&f&g&h \end{pmatrix}
$$

따라서 $H+R\check{M}$의 특성방정식 $P(\lambda)$는

$$
P(\lambda)=\det(H+R\check{M}-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & b & c-\lambda & d \\ e & f & g & h-\lambda \end{pmatrix}
$$

$$
=\lambda^4-(h+c)\lambda^3+(ch-f-a-dg)\lambda^2
$$

$$
+(cf-ha-ed-bg)\lambda+af-be
$$

즉 고유치를 임의로 선정할 수 있게 되는 것이다.

3. 결 론

벡타 入力을 갖는 이산 선형 제어시스템의 최단시간 제어를 위한 피이드백 조정기의 제어정책은 스칼라 입력의 경우와 만찬가지로 $u(k)=FX(k)$로 주어지며 이때의 $Q=A+BF$가 H에 similar함을 증명하였으며 국부회로 보상기를 갖는 이산 시스템의 고유치는 $HT=TH$, $TR=D^{-1}B$를 만족시키는 선형 연산자 T의 도입으로 원하는 값을 갖게 할 수 있음을 보였다.

참 고 문 헌

1) 고명삼, "이산 선형 시스템에서의 조정기 및 추정기의 해석적 설계", 대한전기학회지, vol. 21, No. 3, 1972년 5월 pp. 19~30.

2) J.T. Tou, "Modern Control Theory", Mc-Graw-Hill. New York, 1964, pp. 168~170.