狀態變數피이드백에 依한 線型多變數制御 시스템의 分割式設計에 관한 硏究

논 문
23~2~2

The Decoupling and Design of Linear Multivariable Control Systems by State Variable Feedback

黃 昶 善*
(Chang Sun Hwang)

Abstract

The purposes of this paper are to deal with the design of m-input, m-output linear systems by the state variable feedback, and to extend the design capability of the state variable feedback design. The design requirements are decoupling and the exact realigation of desired transfer functions.

Some methods are proposed to insert series compensators in the fixed plant in the cases when series compensators are needed to meet the input-output transfer matrix specification.

The method for adding series compensators to the input channels of the fixed plant is shown by examples to lead both to the loss of the ability to decouple the augmented plant by the state variable feedback, and to the loss of desired zeroes.

A method which avoids these two hazards is developed in which series compensators are put on the output channels of the fixed plant: it is proved that the augmented plant is **F**-invariant.

By treating each subsystem individually, the designer can apply some of the previous developed knowledge of the state variable design of single-input, single-output systems.

1. 序 論

一般的으로 多變數시스템(multivariable system)에는 入出力사이에 coupling 現象이 存在한다. 즉, 多變數시스템의 各入力은 하나以上의 出力에 영향을 주고 各出力은 하나以上의 入力에 의해서 영향을 받게된다. 이러한 現象때문에 多變數시스템을 制御하는 것이 매우 困難하다.

多變數시스템의 各入力은 한出力만을 制御하고 各出力은 한入力만에 依해서 制御되는 decoupling 方式이 提案[1,2,3,4]되었다. decoupling함으로서 多變數시스템을 여러개의 샤브시스템(subsystem)에 分割시켜 一入力, 一出力에 對한 設計技法을 適用할 수 있다.

* 正會員：釜山大學校 工科大學 敎授

線型多變數플란트(linear multivariable plant) $\boldsymbol{S}$의 狀態方程式은

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{1b}$$

$\boldsymbol{x}$；n次元狀態벡터　　$\boldsymbol{A}$；$n\times n$行列

$\boldsymbol{u}$；m次元制御벡터　　$\boldsymbol{B}$；$n\times m$行列

$\boldsymbol{y}$；m次元出力벡터　　$\boldsymbol{C}$；$m\times n$行列

$n\geq m$

와 같이 表示되고 $\boldsymbol{S}$의 傳達函數行列은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{P}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{2}$$

$\boldsymbol{I}$；單位行列

그림 1과 같이 Morgan에 依해서 導入된 制御法則[1] (Control law)을

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{r} \tag{3}$$

$\boldsymbol{F}$；$m\times n$行列　　$\boldsymbol{G}$；$m\times m$正規行列

r ; m次元入力벡터

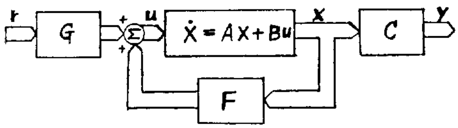

그림 1. 多變數피이드백시스템

Fig. 1. Multivariable feedback system.

라하면 이때의 閉루우프시스템 $S(F,G)$의 狀態方程式은

$$\dot{x}=(A+BF)x+BGr \tag{4a}$$

$$y=Cx \tag{4b}$$

와같이 되고 $S(F,G)$의 傳達函數行列은

$$H(s,F,G)=C(sI-A-BF)^{-1}BG \tag{5}$$

가 되고 $H(s,F,G)$가 對角, 正則行列이면 시스템 $S(F,G)$는 decoupling된다고 定義한다.

Falb와 Wolovich[3]는 식(3)의 制御法則을 使用하여 多變數시스템을 decoupling하는 必要充分條件을 提案하였고 Gilbert[4]는 이 必要充分條件을 기초로 하여 多變數시스템을 decoupling하는 行列F,G를 決定하는 方法을 提示하였다.

本 研究에서는 前記한 必要充分條件이 滿足되지 않은 경우 새로히 必要充分條件을 定義하여 augmented plant를 만드므로서 decoupling할 수 있는 方法을 提示하고 狀態變數피이드백만으로 設計條件을 滿足할 수 없는 경우 補償回路를 導入함으로서 要求되는 傳達函數를 正確히 實現할 수 있는 設計法을 提案한다. 또한 補償行列F,G의 計算方法에 對해서 言及한다.

2. 狀態變數피이드백에 依한 decoupling原理 및 그 限界

1) 必要充分條件

多變數플란트가 狀態變數피이드백에 依해서 decoupling될 수 있는 條件을 求하기 위해서 Nonnegative integer di를 다음과 같이 定義한다.

$$di \triangleq \min[j\,;\,C_iA^{di}B\neq 0,\ j=0,1,\cdots n-1] \tag{6a}$$

$$di \triangleq n-1,\ \text{모든}j\text{에 對해서 } C_iA^jB\neq 0\text{이면} \tag{6b}$$

C_i ; 行列C의 i行

di의 定義에 依해서 어떤$(m\times n)$行列F에 對해서 다음 關係式을 얻을 수 있다.

$$C_i(A+BF)^k=C_iA^k \quad k=0,1,\cdots,\ di \tag{7a}$$

$$C_i(A+BF)^{di+1}=C_iA^{di+1}+C_iA^{di}BF \tag{7b}$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,m$$

식(4)의 i번째出力을 $(di+1)$次까지 微分하여 식(7)을 適用하면

$$y_i^{(k)}=C_iA^kx \quad k=0,1,\cdots,di \tag{8a}$$

$$y_i^{(di+1)}=[C_iA^{di+1}+C_iA^{di}BF]x+C_iA^{di}BGr \tag{8b}$$

y^*를 m次元벡터, B^*를 $m\times m$行列, A^*를 $m\times n$行列이라 定義하여

$$y^*=\begin{pmatrix} y_1^{(d1+1)} \\ y_2^{(d2+1)} \\ \vdots \\ y_m^{(dm+1)} \end{pmatrix}\quad B^*=\begin{pmatrix} C_1A^{d1}B \\ C_2A^{d2}B \\ \vdots \\ C_mA^{dm}B \end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix} C_1A^{d1+1} \\ C_2A^{d2+1} \\ \vdots \\ C_mA^{dm+1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

라 놓으면 식(8)은

$$y^*=(A^*+B^*F)x+B^*Gr \tag{10}$$

未知의 補償行列F,G를 使用하여 플란트를 decoupling할려고 함으로

$$F=F^*=-B^{*-1}A^* \tag{11}$$

$$G=G^*=B^{*-1} \tag{12}$$

와 같이 두면 식(10)은

$$Y^*=r \tag{13}$$

F^*,G^*는 플란트를 decoupling하게 된다. 따라서 식(9)에서 定義한 行列B^*가 正則,

즉 $\det.\ B^*\neq 0$ (14)

이면 식(1)로 表示되는 플란트를 decoupling하는 한쌍의 行列F,G가 存在한다.

2) Integrator Decoupled시스템(ID시스템)

식(11),(12)를 식(4)에 代入하면

$$x=(A+BF^*)x+BG^*r \tag{15a}$$

$$y=yx \tag{15b}$$

$y(s)$와 $r(s)$에 法係되는 傳達函數行列$H(s,F^*,G^*)$는

$$H(s,\ F^*,G^*)=\begin{pmatrix} \frac{1}{s^{d1+1}} & 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{d2+1}} & 0\cdots\cdots 0 \\ \vdots & 0 & \ddots\ \ \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{s^{dm+1}} \\ 0 & 0\cdots\cdots & \end{pmatrix} \tag{16}$$

가 되며 $y_i(s)/r_i(s)$의 모든 零點은 極點에 依해서 消去되며 原點에 s^{di+1}개의 極點을 가지게 된다. 이와같이 行列F^*,G^*에 依해서 얻어지는 시스템을 ID시스템이라 定義한다. 지금 식(15)를 ID플란트라 假定하여 식(11),(12)를 代入하면

$$x=(A-BB^{*-1}A^*)x+BB^{*-1}u \tag{17a}$$

$$y=Cx \tag{17b}$$

ID플란트의 制御法則을

$$u=F_1x+G_1r \tag{18}$$

라 하면 식(17)은

$$x=(A-BB^{*-1}A^*+BB^{*-1}F_1)x+BB^{*-1}G_1r \tag{19a}$$

$$y=Cx \tag{19b}$$

가 되고 식(19)와 식(4)가 等價이면 원플란트(original plant)와 ID플란트는 等價應答(identical response)을

갖일 것이므로

$$F=B^{*-1}(F_1-A^*)=F^*+B^{*-1}F_1 \tag{20}$$

$$G=B^{*-1}G_1 \tag{21}$$

가 成立하여야 한다.

3) Canonically Decoupled시스템(CD시스템)

ID시스템에 선형연산자 Q를 導入함으로서 CD시스템으로 變換시켜 보자. 지금 x와 $\hat{x}$를 各各 狀態變數라 하여 다음과 같이 定義하면

$$\hat{x}=Qx \qquad Q\text{ ; 正則行列} \tag{22}$$

식 (15)는

$$\dot{\hat{x}}=\hat{A}\hat{x}+\hat{B}r=Q(A+BF^*)Q^{-1}\hat{x}+QBG^*r \tag{23a}$$

$$y=\hat{C}\hat{x}=CQ^{-1}\hat{x} \tag{23b}$$

가 되고 식 (23)은 식 (15)와 Similar하며 Similar시스템은 制御法則等價(control law equivalence)이다. Q에 依해서 求해진 $Q(A+BF^*)Q^{-1}$, QBG^* 및 CQ^{-1}는 CD型을 가지므로 CD시스템이라 定義한다.

CD시스템이란 行列 A, B, C가 다음과 같은 型을 가진다.

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & A_{22}\ \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0\ \cdots A_{mm} & 0 \\ A^c{}_1 & A^c{}_2\cdots A^c{}_m & A^c{}_{m+1} \end{pmatrix} \qquad A_{ii}=\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ & \\ \gamma_i & \Phi_i \end{pmatrix} \tag{24}$$

A_{ii} ; $n_i\times n_i$　　　　I ; $d_i\times d_i$

$A^c{}_i$; $n_{m+}\times n_i$　　　　γ_i ; $l_i\times(d_i+1)$

Φ_i ; $l\times l_i$

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & B_{22}\ \cdots 0 \\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots \\ 0 & 0\cdots\cdots B_{nm} \\ B_1{}^c & B_2{}^c\ \cdots B_m{}^c \end{pmatrix} \qquad B_{ii}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \beta_i \end{pmatrix} \tag{25}$$

B_{ii} ; $n_i\times 1$　　　　β_i ; $l_i\times 1$

$B_i{}^c$; $n_{m+1}\times 1$

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & C_{22}\ \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0\ \cdots C_{mm} & 0 \end{pmatrix} \qquad C_{ii}=[1\quad 0\cdots 0] \tag{26}$$

C_{ii} ; $1\times n_i$

이 때 Q는

$$Q=\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{m+1} \end{pmatrix} \tag{27}$$

로서 表示되며 Q_i는 $n_i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n_{m+1})$行으로 構成되며 첫行부터 (d_i+1)行은 各各 C_i, $C_i(A+BF^*)$, $\cdots\cdots$, $C_i(A+BF^*)^{di}$이며 남어지 (n_i-d_i-1)行은 식 (28)에 定義되는 n_i次元 벡터 空間 o_i의 基(basis)를 形成하는 어떤行 벡터이다.

$$o_i=\Big[\eta\ ;\ \eta(A+BF^*)^k(BG^*)_j=0 \qquad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1 \quad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m \quad j\neq i\Big] \tag{28}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$$

η ; n次元벡터

$(BG^*)_j$; BG^*의 j번째의 列벡터

여기서

$$n_i=\dim o_i \tag{29}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$$

$$l_i=n_i-d_i-1 \tag{30}$$

로 定義되며 n_i는 狀態變數 피이드백에 依해서 制御되는 사브시스템 i의 極點의 數이고 l_i는 狀態變數 피이드백에 依해서 영향을 받지 않은 固定된 零點의 數를 表示한다. $\sum_{i=1}^{m} n_i<n$이면 o_i의 基벡터는 n次元空間의 行벡터들을 形成하지 못한다. Q의 나머지 行은 o의 基를 形成하는데 必要한 벡터를 表示하는 n-tuple을 行으로 선택할 수 있으며 이러한 벡터는 唯一하지 않다.

한편 ID시스템의 CD表示에 依해서 decoupling된 사브시스템은 多項式 $\det(s\mathrm{I}-\Phi_i)$의 根에 固定된 (n_i-d_i-1)개의 零點을 가지며 狀態變數 피이드백에 依해서 任意로 位置할 수 있는 n_i개의 極點을 가진다. $\sum_{i=1}^{m} n_i<n$이면 $n_{m+1}\neq 0$, $o_{m1}\neq 0$ 및 $A^c{}_{m+1}\neq 0$이고 特性多項式은 $\det(s\mathrm{I}-A^c{}_{m+1})$의 要素를 包含하게 되고 이 要素는 狀態變數 피이드백에 依해서 制御할 수 없으며 이 要素의 根이 s-平面의 R.H.S에 位置하면 unstable하게 된다.

4) 補償行列 F, G

ID시스템의 CD表示에 依해서 사브시스템 i의 傳達函數는

$$P_{ii}(s,F^*,G^*)=C_{ii}(s\mathrm{I}-A_{ii})^{-1}B_{ii} \tag{31}$$

가 된다. $P_{ii}(s,F^*,G^*)$는 正則, 對角傳達函數行列 $P(s,F^*,G^*)$의 對角元素이다. 이러한 開루우프시스템 즉, CD플란트가 다시 制御法則 $u=\hat{F}\hat{X}+Gr$에 依해서 補償되여야 하며 $\hat{F}, \hat{G}$의 형태가

$$\hat{F}=\begin{pmatrix} \theta_1 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & \theta_2\cdots\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0\cdots\cdots\theta_m & 0 \end{pmatrix} \theta_i\ ;\ 1\times n_i \tag{32}$$

$$\hat{G}=\mathrm{diag}\ [g_{11}, g_{22}\cdots\cdots g_{mm}] \tag{33}$$

이면 補償行列 $\hat{F}, \hat{G}$는 CD플란트를 decoupling하게 되고 식 (1)에 對한 補償行列 F, G는

$$F=F^*+B^{*-1}\hat{F}Q \tag{34}$$

$$G=B^{*-10}\hat{G} \tag{35}$$

가 成立한다.

보기 1. 그림 2와 같은 多變數 플란트를 생각한다.

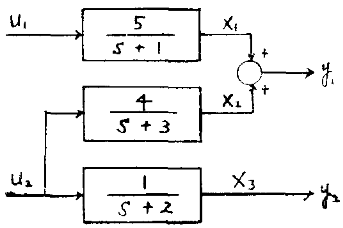

그림 2. 多變數 플란트의 블록線圖
Fig. 2. Block diagram of multivariable plant.

狀態方程式 :

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}5&0\\0&4\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{u} \tag{36a}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \tag{36b}$$

$$\boldsymbol{B}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\0&1\end{pmatrix} \tag{37}$$

$\boldsymbol{B}^*$가 正則임으로 decoupling될 수 있다.
$d_1=d_2=0$임으로

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}-1&-3&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{F}^*=-\boldsymbol{B}^{*-1}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{8}{5}\\0&0&2\end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{G}^*=\boldsymbol{B}^{*-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}\\0&1\end{pmatrix} \tag{40}$$

ID表示 :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^*)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}^*\boldsymbol{u}\\&=\begin{pmatrix}0&3&-8\\0&-3&8\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}1&-4\\0&4\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{41a}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \tag{41b}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{42}$$

CD表示 :

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^*)\boldsymbol{Q}^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}^*\boldsymbol{u}\\&=\left(\begin{array}{c|cc}0&0&0\\\hline 0&0&0\\0&3&-3\end{array}\right)\hat{\boldsymbol{x}}+\left(\begin{array}{c|c}1&0\\\hline 0&1\\0&4\end{array}\right)\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{43a}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1&0\end{array}\right) \tag{43b}$$

사브시스템 1 ;

$$\hat{x}^1=[0]\hat{x}^1+[1]u^1 \tag{44a}$$

$$y^1=[1]\hat{x}^1 \tag{44b}$$

사브시스템 2 ;

$$\hat{x}^2=\begin{pmatrix}0&0\\8&-3\end{pmatrix}\hat{x}^2+\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}u^2 \tag{45a}$$

$$y^2=[1\quad 0]\hat{x}^2 \tag{45b}$$

식 (31)에 依해서 두 사브시스템의 傳達函數는

$$P_{11}(s,\ \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{G}^*)=\frac{1}{s} \tag{46}$$

$$P_{22}(s,\ \boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{G}^*)=\frac{s+3}{s(s+3)} \tag{47}$$

補償行列 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$의 計算은 第4章의 보기 7에서 說明한다.

3. 直列補償 및 狀態變數 피이드백

前章에서 decoupling의 限界에 對해서 記述하였다. 零點이란 플란트에 固有한 것으로서 보통 不必要한 位置에 있다. 이러한 零點은 사브시스템의 極點에 依해서 消去되어야 하며 要求되는 零點이 補償回路에 依해서 導入되어야 한다.

行列 $\boldsymbol{B}^*$가 非正則일 경우와 사브시스템의 應答을 要求되는 $\boldsymbol{H}(s,\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$에 符合시키기 위하여 補償回路를 導入하여 設計條件을 滿足하도록 하는 方法을 提示한다.

플란트 傳達函數行列 $\boldsymbol{P}(S)$가 주어졌을 때 必要充分條件인 식 (14)를 다음과 같이 定義한다.

Nonnegative integer di 및 $\boldsymbol{B}_i^*$를

$d_i \triangleq \min[\boldsymbol{P}_i(s)$의 各元素의 分母와 分子의 S의 次數의 差$]-1$ (48)

$$\boldsymbol{B}_i^* \triangleq \lim_{S\to\infty} S^{d_i+1}\boldsymbol{P}_i(s) \tag{49}$$

$\boldsymbol{B}_i^*$; $1\times m$行벡터
$\boldsymbol{P}_i(s)$; $\boldsymbol{P}(s)$의 i行

와 같이 定義하면

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_i(s)&=\boldsymbol{C}_i(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\\&=\frac{1}{\triangle(s)}[\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{B}s^{n-1}+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{B}s^{n-2}+\cdots\cdots\\&\quad+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{R}_{di}\boldsymbol{B}s^{n-di}+\cdots\cdots+\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{R}_{n-1}\boldsymbol{B}]\end{aligned} \tag{50}$$

여기서

$$\begin{aligned}&\triangle(s)\triangleq\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\triangleq s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots\cdots+\alpha_n\\&\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{A}+\alpha_1\boldsymbol{I}\\&\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_1-\alpha_2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^2+\alpha_1\boldsymbol{A}+d_2\boldsymbol{I}\\&\quad\vdots\\&\boldsymbol{R}_{n-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{n-2}+\alpha_{n-1}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{n-1}+\alpha_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots\cdots\\&\qquad+\alpha_{n-1}\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{51}$$

d_i와 $\boldsymbol{B}^*_i$의 定義에 依해서

$$C_iB=0,\ C_iR_1B=0,\ \cdots\cdots,\ C_iR_{d_i-1}B=0 \tag{52}$$

$$B_i{}^*=C_iR_{d_i}B\neq 0 \tag{53}$$

식 (51)에 依해서 식 (52), (53)은

$$C_iB=0,\ C_iAB=0,\ \cdots\cdots,\ C_iA^{d_i-1}B=0 \tag{54}$$

$$B_i{}^*=C_iA^{d_i}B\neq 0 \tag{55}$$

가 되고 식 (55)의 結果는 식 (14)와 一致한다. 고로

$$B^*=\begin{pmatrix} B_1{}^* \\ B_2{}^* \\ \vdots \\ B_m{}^* \end{pmatrix} \tag{56}$$

가 正則, 즉 $\det B^*\neq 0$이면 decoupling될 수 있다.

1) 行列 B^*가 非正則인 경우

傳達函數行列 $P(s)$가 주어질 때 行列 B^*가 非正則이면 식 (56)을 利用하여 플란트의 入力 찬넬(input channel)에 補償回路를 挿入하여 augmented plant를 만드므로서 正則行列을 만들 수 있다.

보기 2. Decoupling 可能한 경우

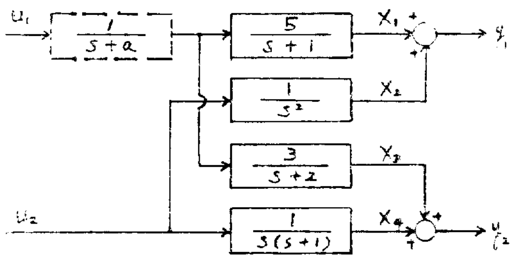

그림 3. 多變數 플란트의 블록 線圖
Fig. 3. Block diagram of multivariable plant.

$$P(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{5}{s+1} & \dfrac{1}{s^2} \\ \dfrac{3}{s+2} & \dfrac{1}{s(s+1)} \end{pmatrix}\quad B^*=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$P(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{5}{(s+1)(s+a)} & \dfrac{1}{s^2} \\ \dfrac{3}{(s+2)(s+a)} & \dfrac{1}{s(s+1)} \end{pmatrix}\quad B^*=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

식 (58)과 같이 플란트의 入力 찬넬 u_1에 一次直列補償回路를 導入한 augmented plant는 B^*가 正則임으로 decoupling 可能하다.

보기 3. Decoupling 不可能한 경우

$$P(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{s+1} & \dfrac{1}{s(s+3)} \\ \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{1}{s(s+1)} \end{pmatrix}\quad B^*=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{59}$$

2) 直列補償

一次直列 補償器는 그림 4와 같으며 入出力關係式은 다음과 같다.

$$\frac{O}{I}=\frac{\bar{e}s-\bar{e}\bar{a}+\bar{b}}{s-\bar{a}} \tag{60}$$

i) $\bar{e}\neq 0,\ \bar{b}\neq 0$; 零點

ii) $\bar{e}=0$; 極點

iii) $\bar{b}=0$; 利得

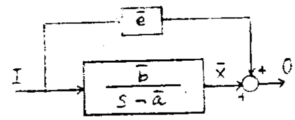

그림 4. 一次直列補償器
Fig. 4. First-Order series compensator.

그림 4의 一次直列補償器를 導入하여 decoupling을 保存하는 方法은 다음 定理 1에서 말하는 두 경우이다.

定理 1 :

多變數 플란트 $\dot{x}=Ax+Bu\ Y=Cy$가 그림 4와 같은 一次直列補償器

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}\bar{u} \tag{61}$$

$$u=\bar{x}+\bar{E}\bar{u} \tag{62}$$

$\bar{A}$; $m\times m$ 對角行列, 對角元素 $\bar{a}_{ii}$

$\bar{B}$; $m\times m$ 對角行列, 對角元素 $\bar{b}_{ii}$

$\bar{E}$; $m\times m$ 對角行列, 對角元素 $\bar{e}_{ii}$

에 依해서 入力 찬넬에 補償될 때 원플란트가 decoupling되고 $\bar{B}$가 正則이면 augmented plant는

i) $\bar{E}=0$

ii) $\bar{E}$가 正則

이면 decoupling될 수 있다.

證明 : i) $\bar{E}=0$일 경우

直列補償器를 導入한 augmented plant의 狀態變數를

$$\tilde{x}=\begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix} \tag{63}$$

라 하면 狀態方程式은

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}\tilde{x}+\begin{pmatrix} B\bar{E} \\ \bar{B} \end{pmatrix}\bar{u} \tag{64a}$$

$$y=[C\quad 0]\tilde{x} \tag{64b}$$

B^*를 求하기 위하여 $\tilde{C}_i$, $\tilde{C}_i\tilde{B}$, ……, $\tilde{C}_i\tilde{A}^{d_i}\tilde{B}$를 形成하면

$$\tilde{C}_i\tilde{B}=0$$

$$\tilde{C}_i\tilde{A}\tilde{B}=C_iB\bar{B}$$

$$\vdots$$

$$\tilde{C}_i\tilde{A}^{d_i+1}\tilde{B}=(C_iA^{d_i}B+C_iA^{d_i-1}E+\cdots\cdots+C_iB)\bar{B} \tag{65}$$

假定에 依해서 $\bar{B}$는 正則, 對角임으로 d_i의 定義에 依해서

$$\tilde{C}_i\tilde{A}^{d_i+1}\tilde{B}=C_iA^{d_i}B\bar{B}=B_i{}^*\bar{B} \tag{66a}$$

혹은 $\tilde{B}^*=B^*\bar{B}$ (66b)

B^*와 $\bar{B}$는 正則임으로 $\tilde{B}^*$는 正則이다.

ii) $\bar{E}$가 正則일 경우

$$\tilde{C}_i\tilde{B}=C_iB\bar{E}$$
$$\tilde{C}_i\tilde{A}\tilde{B}=C_iAB\bar{E}+C_iB\bar{B}$$
$$\vdots$$
$$\tilde{C}_i\tilde{A}^{d_i}\tilde{B}=C_iA^{d_i}B\bar{E}+(C_iA^{d_i-1}B+\cdots\cdots+C_iB)\bar{B} \tag{67}$$

d_i의 定義에 依해서

$$C_i\tilde{A}^{d_i}\tilde{B}=C_iA^{d_i}B\bar{E}=B_i^*\bar{E} \tag{68a}$$

혹은 $\tilde{B}^*=B^*\bar{E}$ (68b)

B^*와 $\bar{E}$가 正則임으로 $\tilde{B}^*$는 正則이다. Q.E.D

보기 4. Decoupling을 상실하는 경우

$$B^*=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{69}$$

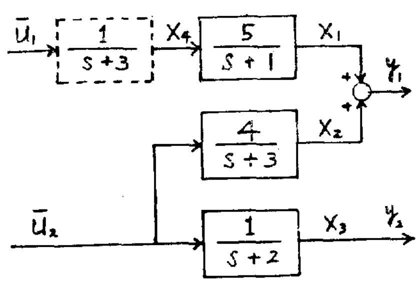

그림 5. Augmented plant의 블록線圖
Fig. 5. Block diagram of augmented plant.

보기 5. Decoupling이 保存되는 경우

$$B^*=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{70}$$

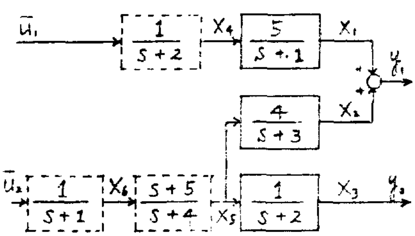

그림 6. Augmented plant의 블록 線圖
Fig. 6. Block diagram of augmented plant.

그림 6의 사브시스템의 傳達函數는 各各

$$P_{11}\ (s,F^*,G^*)=\frac{1}{s^2} \tag{71}$$

$$P_{22}\ (s,F^*,G^*)=\frac{s+3}{s^2(s+3)} \tag{72}$$

이며 augmented plant의 特性多項式은

$$P(s,F^*,G^*)=s^4(s+3)(s+5) \tag{72}$$

이다. 보기 1의 플란트에 直列補償器를 導入함에 있어서 보기 4는 定理 1을 滿足하지 않으니 decoupling을 상실하고, 보기 5에서는 定理 1을 滿足함으로 decoupling은 保存되지만 入力 챤넬에 넣은 零點이 사브시스템의 零點에 반드시 實現된다고는 할 수 없다. 보기 5는 A^c_{m+1}가 -5인 경우이며, $S=-5$에 零點을 가질 수 없다.

定理 2에 依하면 上記 두 缺點을 補完할 수 있다.

定理 2:

多變數 플란트 $\dot{x}=Ax+Bu$ $y=Cx$가 그림 4와 같은 一次直列補償器

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}y \tag{74a}$$
$$\bar{y}=\bar{x}+\bar{E}y \tag{74b}$$

$\bar{A}$; $m\times m$ 對角行列, 對角元素 $\bar{a}_{ii}$
$\bar{B}$; $m\times m$ 對角行列, 對角元素 $\bar{b}_{ii}$
$\bar{E}$; $m\times m$ 對角行列, 對角元素 $\bar{e}_{ii}$

에 依해서 出力 챤넬에 보상될 때 원플란트가 decoupling된다고 하면 augmented plant는 decoupling되고 augmented plant의 사브시스템 i는 상태변수피이드백에 依해서 任意로 位置할 수 있는 n_i+n_i개의 極點과 상태변수피이드백에 依해서 영향을 받지 않은 l_i+l_i개의 零點을 가진다.

證明: 直列補償器를 導入한 augmented plant의 상태변수를

$$\tilde{x}=\begin{pmatrix}x\\ \bar{x}\end{pmatrix} \tag{75}$$

라 하면 狀態方程式은

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{pmatrix}\bar{A} & \bar{B}C\\ 0 & A\end{pmatrix}\tilde{x}+\begin{pmatrix}0\\ B\end{pmatrix}u \tag{76a}$$
$$\bar{y}=[I\ \ \bar{E}C]\tilde{x} \tag{76b}$$

$\tilde{B}^*$를 求하기 위해서 $\tilde{C}_i$, $\tilde{C}_i\tilde{B}$, ……, $\tilde{C}_i\tilde{A}^{d_i}\tilde{B}$를 形成하면

$$\tilde{C}_i\tilde{B}=\bar{e}_{ii}C_iB$$
$$\tilde{C}_i\tilde{A}\tilde{B}=I_i\bar{B}CB+\bar{e}_{ii}C_iAB\quad (I_i\ ;\ I\text{의 } i\text{行})$$
$$\vdots$$
$$\tilde{C}_i\tilde{A}^{d_i}\tilde{B}=I_i\bar{A}^{d_i-1}\bar{B}CB+I_i\bar{A}^{d_i-2}\bar{B}CAB+\cdots\cdots+I_i\bar{B}CA^{d_i-1}B+\bar{e}_{ii}C_iA^{d_i}B \tag{77}$$
$$\tilde{C}_i\tilde{A}^{d_i+1}\tilde{B}=I_i\bar{A}^{d_i}\bar{B}CB+I_i\bar{A}^{d_i-1}\bar{B}CAB+\cdots\cdots+I_i\bar{B}CA^{d_i}B+\bar{e}_{ii}C_iA^{d_i+1}B \tag{78}$$

d_i의 定義에 依해서 식 (77)은

$$\tilde{C}_i\tilde{A}^{d_i}\tilde{B}=\bar{e}_{ii}C_iA^{d_i}B=\bar{e}_{ii}B_i^* \tag{79}$$

즉 $\tilde{B}^*$는 $\bar{E}$가 正則이면 $\bar{B}$에 關係없이 成立되고 식 (73)은

$$\tilde{C}_i\tilde{A}^{d_i+1}\tilde{B}=I_i\bar{B}CA^{d_i}B=I_i\bar{B}B^* \tag{80}$$

과 같이 되기 위해서는 $\bar{B}$가 正則이고 $\bar{E}$가 非正則이라야 한다. 이때 $\tilde{B}^*$는 正則이 된다. 즉 식 (79), (80)이 意味하는 것은 플란트의 出力 챤넬에 어떠한 형태의 補償器를 導入해도 decoupling은 保存된다는 것이다.

지금 augmented plant의 狀態方程式을

$$\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u \tag{81a}$$
$$\tilde{y}=\tilde{C}\tilde{x}$$

制御法則을

$$u=\tilde{F}\tilde{x}+Gr \quad G\text{ ; 正則行列} \tag{82}$$

라고 하면 閉루우프시스템의 狀態方程式은

$$\dot{\tilde{x}}=(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})\tilde{x}+B\tilde{G}r \tag{83a}$$

$$\tilde{y}=\tilde{C}\tilde{x} \tag{83b}$$

閉루우프 傳達函數行列은

$$H_i(s,\tilde{F},\tilde{G})=\tilde{C}_i(sI-\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{F})^{-1}\tilde{B}\tilde{G} =\frac{1}{\tilde{\triangle}(s)}[\tilde{C}_i\tilde{B}\tilde{G}s^{n-1}+\tilde{C}_i\tilde{R}\tilde{B}\tilde{G}s^{n-2}+\cdots +\tilde{C}_i\tilde{R}_{n-1}\tilde{B}\tilde{G}] \tag{84}$$

여기서

$$\tilde{\triangle}(s)\triangleq\det(sI-\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{G})\triangleq s^n+\tilde{\alpha}_1s^{n-1}+\cdots+\tilde{\alpha}_n$$

$$\tilde{R}_1=(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})+\tilde{\alpha}_1I$$

$$\tilde{R}_2=(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^2+\tilde{\alpha}_1(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})+\tilde{\alpha}_2I$$

$$\vdots$$

$$\tilde{R}_{n-1}=(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^{n-1}+\tilde{\alpha}_1(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^{n-2}+\cdots\cdots +\tilde{\alpha}_{n-1}I \tag{85}$$

$H(s,\tilde{F},\tilde{G})$에 對한 $\tilde{d}_i$와 $\tilde{B}_i^*$를 前과 같이 定義하면

$$\tilde{C}\tilde{B}G=0,\ \tilde{C}(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})\tilde{B}\tilde{G}=0,\ \cdots\cdots,$$

$$\tilde{C}(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^{\tilde{d}_i-1}\tilde{B}\tilde{G}=0 \tag{86}$$

$$\tilde{B}^*=\tilde{C}(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^{\tilde{d}_i}\tilde{B}\tilde{G}\neq0 \tag{87}$$

i에 對해서

$$\tilde{C}_i\tilde{B}=0,\ \tilde{C}_i\tilde{A}\tilde{B}=0,\ \cdots\cdots,\ \tilde{C}_i\tilde{A}^{\tilde{d}_i-1}\tilde{B}=0 \tag{88}$$

인 故로

$$\tilde{C}_i(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^k=\tilde{C}_i\tilde{A}^k\quad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ \tilde{d}_i \tag{89a}$$

$$\tilde{C}_i(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^k =\tilde{C}_i\tilde{A}^{\tilde{d}_i}(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^{k-\tilde{d}_i}\quad k=\tilde{d}_i+1,\tilde{d}_i+2,\cdots \tag{89b}$$

結果的으로

$$\tilde{C}_i(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^k\tilde{B}\tilde{G}=0\quad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ \tilde{d}_i-1 \tag{90}$$

$$\tilde{C}_i(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{F})^{\tilde{d}_i}\tilde{B}\tilde{G}=\tilde{C}_i\tilde{A}^{\tilde{d}_i}\tilde{B}\tilde{G}=\tilde{B}_i^*\tilde{G} \tag{91}$$

假定에 依해서 $\tilde{G}$는 正則인 故로 $\tilde{B}_i^*$가 正則이면 $\tilde{B}_i^*=\tilde{B}_i^*\tilde{G}$은 正則이고 $\tilde{d}_i=\tilde{d}_i$이며 $\tilde{F}$-invariant이다.

O.E.D

보기 6. 零點을 實現하는 경우

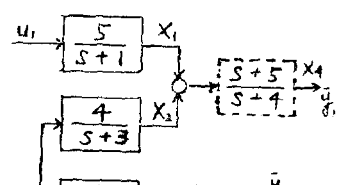

그림 7. Augmented plant의 블록線圖

Fig. 7. Block diagram of augmented plant.

Original plant

$$P(s)=\begin{pmatrix} \frac{5}{s+1} & \frac{4}{s+3} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

$$B^*=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{11}(s,F^*,G^*)=\frac{1}{s}$$

$$P_{22}(s,F^*,G^*)=\frac{s+3}{s(s+3)}$$

Augmented plant

$$P(s)=\begin{pmatrix} \frac{5(s+5)}{(s+1)(s+4)} & \frac{4(s+5)}{(s+3)(s+4)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

$$B^*=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{11}(s,F^*,G^*)=\frac{s+5}{s(s+5)}$$

$$P_{22}(s,F^*,G^*)=\frac{s+5}{s(s+3)}$$

4. 補償行列 F,G의 計算

行列 F,G의 數値計算을 phase-variable 變換에 依해서 求하는 方法에 對해서 記述한다. 지금까지 論한 設計順序를 列擧하면 다음과 같다.

1) 行列 B^*의 計算
2) 行列 F^*,G^*의 計算
3) 선형연산자 Q의 計算
4) ID시스템의 CD表示
5) 行列 $\hat{F},\hat{G}$의 計算
6) 行列 F,G의 計算

可制御, 一入力, 一出力 플란트의 狀態方程式은

$$\dot{x}=Ax+bu \tag{92a}$$

$$y=Cx \tag{92b}$$

b,x; n-벡터

u,y ; Scalar

c; $1\times n$行 벡터

가 되고 傳達函數는

$$P(s)=\frac{y}{u}=\frac{k(s^l+a_1s^l+a_2s^{l-2}+\cdots+a_l)}{S^n-P_1S^{n-1}-P_2S^{n-2}\cdots\cdots-P_n} \tag{93}$$

x'를 phase-variable이라 하고 식 (93)을 phase-variable로서 表示하면 플란트의 狀態方程式은

$$\dot{x}'=A'x'+b'u =\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\cdots\cdots0 \\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ P_n & P_{n-1} & P_{n-2}\cdots P_1 \end{pmatrix}x'+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}u \tag{94a}$$

$$y=C'x =k[a_l\ a_{l-1}\cdots\cdots a_1\ 0\cdots\cdots0]x' \tag{94b}$$

phase-variable型의 플란트를 補償하기 위해서 狀態變數 피이드백

$$u=\boldsymbol{f}'\boldsymbol{x}'+g'r \tag{95}$$

$\boldsymbol{f}'$; $1\times n$行벡터, 元素 f_i'

g', r ; scalar

를 使用하면 식 (94)는 다음과 같다.

$$\dot{\boldsymbol{x}}'=\begin{pmatrix} 0 & 1\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \\ P_n+f_1' & P_{n-1}+f_2' & P_1+f_n' \end{pmatrix}\boldsymbol{x}'+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g' \end{pmatrix} r \tag{96}$$

補償된 시스템에 對한 閉루우프傳達函數 $h(s,\boldsymbol{f}',g')$는

$$h(s,\boldsymbol{f}',g')=\frac{g'k(S^l+a_1s^{l-1}+\cdots\cdots+a_l)}{S^n-(P_1+f_n')S^{n-1}-\cdots-(P_n+f_1')} \tag{97}$$

要求되는 特性多項式이

$$q(s)=S^n-q_1s^{n-1}-\cdots\cdots-q_n \tag{98}$$

이라고 하면 $\boldsymbol{f}'$의 元素는 다음과 같아야 한다.

$$\begin{aligned} f_1' &= q_n-P_n \\ f_2' &= q_{n-1}-P_{n-1} \\ &\vdots \\ f_n' &= q_1-P_1 \end{aligned} \tag{99}$$

狀態變數 $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{x}'$ 사이에는 正則行列 $\boldsymbol{T}$에 依해서

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}' \tag{100}$$

와 같이 關係되며 $\boldsymbol{f}'$에 相當하는 원플란트에 對한 行列 $\boldsymbol{f}$는

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}'\boldsymbol{T}^{-1} \tag{101}$$

가 되고 變數의 變換은 入力 r에는 無關함으로

$$g=g' \tag{102}$$

$\boldsymbol{T}$를 計算하는 알고리즘(Algorithm)[6]은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\cdots\cdots\boldsymbol{T}_n] \tag{103}$$

$\boldsymbol{T}_i$; $n\times1$列行列

여기서

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_n &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{T}_{n-1} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_n-P_1\boldsymbol{T}_n \\ \boldsymbol{T}_{n-2} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{n-1}-P_2\boldsymbol{T}_n \\ &\vdots \\ \boldsymbol{T}_1 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_2-P_{n-1}\boldsymbol{T}_n \end{aligned} \tag{104}$$

多變數 플란트인 경우에는 上記한 設計順序 4)가 끝나면 i개의 사브시스템이 明白히 되고 사브시스템 i에 對한 狀態方程式은 식 (92)이라고 생각할 수 있으며 變換

$$\hat{\boldsymbol{x}}^i=\boldsymbol{T}^i\boldsymbol{x}'^i \quad i=1,2,\cdots\cdots,m \tag{105}$$

는 식 (100)에 該當된다. 사브시스템 i에 對한 特性多項式은

$$\boldsymbol{P}^i(s,\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{G}^*)=s^{di+1}\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Phi}_i) \tag{105}$$

이고 이 $\boldsymbol{P}^i(s,\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{G}^*)$의 係數가 $\boldsymbol{T}^i$의 計算에 必要하게 되고 $\boldsymbol{f}'^i$는 $\boldsymbol{P}^i(s,\boldsymbol{F}^*,\boldsymbol{G}^*)$와 $\boldsymbol{H}^i(s,\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$(要求되는 사브시스템의 特性多項式)로 부터 計算되며 식 (32)의 $\boldsymbol{\theta}_i$는

$$\theta_i=\boldsymbol{f}'^i(\boldsymbol{T}^i)^{-1} \tag{107}$$

에 依해서 計算된다.

이와 같이 補償行列 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$를 알면 원플란트에 對한 補償行列 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$는 식 (34), (35)에 依해서 設計順序 6)을 完成하게 된다.

보기 7. 보기 1의 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$를 求해본다.

要求되는 사브시스템의 特性多項式을

$$h_{11}(s,\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G})=\frac{1}{s+1} \tag{108}$$

$$h_{22}(s,\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G})=\frac{2(s+3)}{s^2+2s+2} \tag{109}$$

이라고 하면

사브시스템 1:

$$\theta_1=-1,\ g'_{11}=1 \tag{110}$$

사브시스템 2:

$$\theta_2=\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad g'_{22}=2 \tag{111}$$

따라서

$$\hat{\boldsymbol{F}}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{G}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{112}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^*+\boldsymbol{B}^{*-1}\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{Q}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix} \tag{113}$$

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{B}^{*-1}\hat{\boldsymbol{G}}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{114}$$

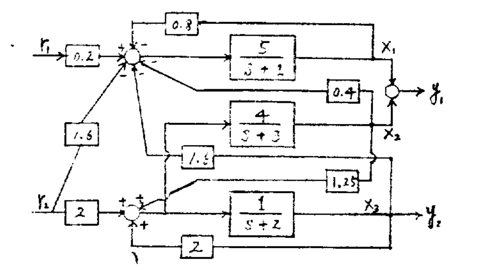

그림 8. 보기 7의 補償된 시스템의 블록線圖

Fig. 8. Block diagram of compensated system of Example 7.

5. 結 論

以上 本 論文에서는 線型多變數制御 시스템을 設計함에 있어서 狀態變數 피이드백에 依한 decoupling方式을 設計手段으로 하는 設計法을 論하고 多變數 시스템을 여러가지의 사브시스템에 分割하여 decoupling된

사브시스템에 要求되는 傳達函數를 正確히 實現시키기 위하여 補償回路를 導入하는 경우의 多變數制御 시스템의 設計法을 論한다.

必要充分條件인 行列 B^*가 非正則인 경우 새로히 必要充分條件을 定義하여 플란트의 入力 챤넬에 補償回路를 導入하여 augmented plant를 만듬으로서 decoupling 可能함을 提示하였다.

시스템의 應答을 向上시키기 위해서 直列補償器를 導入하는 方法을 提案하였다.

一次直列補償器를 플란트의 入力 챤넬에 加하는 경우에는 定理 1에서 말하는 것과 같이 모든 入力 챤넬에 極點과 零點을 同時에 包含하든지, 하나의 極點만을 包含할 때는 decoupling은 保存되지만 入力챤넬에 넣은 零點은 狀態變數 피이드백에 依해서 decoupling된 사브시스템의 零點에 반드시 實現시킬 수 없음을 알았고 定理 2에서 밝힌 바와 같이 플란트의 出力챤넬에 一次 直列補償器를 導入하는 경우에는 補償器의 種類 如何를 莫論하고 decoupling은 保存되며 加해준 零點과 플란트 固有의 零點은 사브시스템의 傳達函數에 變化없이 나타나며 加해준 極點과 플란트 極點은 狀態變數 피이드백에 依해서 任意로 位置할 수 있음을 밝혔다.

따라서 一入力, 一出力 시스템의 設計技法을 多變數 플란트인 경우에도 使用할 수 있음을 알 수 있다.

끝으로 直列補償器를 導入하는 또 한가지 方法으로 多變數 플란트를 狀態變數 피이드백에 依해서 decoupling하여 直列補償器를 decoupling된 플란트의 入力 챤넬에 揷入하는 것으로 다음 機會에 報告하기로 한다.

參 考 文 獻

1) B.S. Morgan: "The Synthesis of Linear Multivariable Systems by State-Variable Feedback", IEEE Trans. on AC, Vol. AC-9, pp. 405~411, (1964).
2) Z.V. Rekasius: "Decoupling of Multivariable Systems by Means of State-Variable Feedback", Proc. Third Allerton Conference, Monticello, Illinois, pp. 439~448, (1965).
3) P.L. Falb & W.A. Wolovich: "Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems", IEEE Trans. on AC, Vol. AC-12, No. 6 pp.651~659 (1967)
4) E.G. Gilbert: "The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback", S.I.A.M. Journal on Control, Vol. 7, No. 1, pp.50~63, (1969).
5) F.R. Gantmacher: The Theory of Matrices I, Chelsea, New York, (1959).
6) C.D. Johnson & W.M. Wonham: "Another Note on the Transformation to (Phase Variable) Canonically Form," IEEE Trans. on AC, Vol. AC-11, pp. 609~610, (1966)
7) D.G. Luenberger: "Canonical Forms for Linear Multivariable Systems," IEEE Trans. on AC, Vol. AC-12, No.3 (1967).
8) W.A. Wolovich & P.L. Falb: "On the Structure of Multivariable Systems," S.I.A.M. Journal on Control, Vol. 7, No. 3, (1969).
9) W.M. Wonham & A.S. Morse: "Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach," S.I.A.M. Journal on Control, Vol. 8, pp.1~18, (1967).
10) E.G. Gilbert: "Controllability and Observability in Multivariable Control Systems," S.I.A.M. Journal on Control, Vol. 2, No. 1, (1963).
11) R.W. Brockett: "Poles, Zeroes, and Feedback: State Space Interpretation." IEEE Trans. on AC, Vol. AC-10, (1965)
12) B.S. Morgan: "Sensitivity Analysis and Synthesis of Multivariable Systems." IEEE Trans. on AC, AC-11, pp.506~512, (1966)
13) W.A. Wolovich: "On the Synthesis of Multivariable Systems." IEEE Trans. on AC, pp. 46~50, (February, 1973).
14) D.G. Schultz & J.L. Melsa: State Functions and Linear Control Systems, New York: McGraw-Hill Book Co., (1967).
15) J.G. Truxal: Automatic Feedback Control System Synthesis, New York: McGraw-Hill Book Co., (1955).