

電力系統 解析에 유용한 “스파스”行列法에 관한 研究

논문
23~3~1

On the Sparse Matrix Method useful to the Solution of a Large Power System

韓 萬 春* · 申 明 澈**
(Man Choon Han, Myong Chul Sin)

Abstract

The matrix inversion is very inefficient for computing direct solutions of the large sparse systems of linear equations that arise in many network problems as a large electrical power system. Optimally ordered triangular factorization of sparse matrices is more efficient and offers the other important computational advantages in some applications with this method. The direct solutions are computed from sparse matrix factors instead of a full inverse matrix, thereby gaining a significant advantage in speed and computer memory requirements.

In this paper, it is shown that the sparse matrix method is superior to the inverse matrix method to solve the linear equations of large sparse networks.

In addition, it is shown that the solutions may be applied directly to solve the load flow in an electrical power system. The result of this study should lead to many applications including short circuit, transient stability, network reduction, reactive optimization, and others.

1 서 론

대 회로망을 해석하기 위하여 필요한 연립방정식의 계수행렬에서 영요소(zero element)의 수가 영이 아닌 요소(non-zero element)에 비하여 비교적 많을때 이 회로망은 “스파스”하다고 한다.¹⁾ 일반적으로 대부분의 회로망에서 “어드미턴스”행렬은 “임피던스”행렬에 비하여 “스파스”하게 된다.²⁾ 따라서 대 회로망으로 구성되는 계통해석에 “스파스”행렬의 특성을 이용할 수 있는 “어드미턴스”행렬의 이용은 매우 바람직하다고 생각된다.

“어드미턴스”행렬의 “스파스티”(sparsity)는 그행렬에서 영요소의 수와 그 분포를 동시에 나타내고 회로망의 결선 구조에 의존된다. 영요소의 분포에 대하여는

많이 연구되어 왔으나³⁾ 그 수에 대한 이론적인 고찰에 언급한 문헌은 아직 찾을 수 없다.

본 논문에서는 전력계통의 “어드미턴스”행렬의 영요소를 최대한 포함하게되는 필요충분 조건을 Y-노드⁴⁾를 기초로 하여 고찰하고, “스파스”행렬을 보다 쉽게 해석할 수 있는 새로운 직접해법(direct solution method)을 도입하였다.

주어진 조건으로 부터 형성되는 방정식의 “어드미턴스”행렬이 “스파스”하다라고 그역변환 행렬의 “스파스”하지 못함으로 본래의 행렬의 “스파스티”를 이용하기 위하여 “가우스”의 생략법(gaussian elimination method)에 의한 삼각화 변환(triangular factorization)을 적용하여⁵⁾ “스파스”행렬의 연변환을 “스파스”행렬 계수(sparse matrix factor)의 곱으로 표시하면 행렬의 “스파스티”를 보존시킬 수 있는 직접해법이 가능하게 된다.

이와같은 “스파스”행렬법을 연립방정식의 해를 구할

*正會員: 延世大學校 産業大學院長(工學博士)

**正會員: 延世大學校大學院 · 理工大學講師

에 적용시켜서 역변환 행렬법과 비교하여 그 우수성을 밝히고, 전력계통 해석에 도입하는 기초로서 "모델" 전력계통에 대한 조류계산에 적용하여 그 결과를 검토하였다.

2. 전력계통 "어드미턴스"행렬의 "스파스티"

전력계통의 대칭 "어드미턴스"행렬 (symmetric admittance matrix)은 그 모선이 K 개이고 영이 아닌 요소의 수가 N 개이면 그때의 "스파스티"는 $N/K \times K$ 로 표시된다.¹⁾

"어드미턴스"행렬의 영요소의 수를 최대화하기 위한 필요충분 조건을 밝히기 위하여 Y -"그래프"개념을 적용하면 다음과 같다. Y -"그래프"는 대 회로망에서 기본 폐로(basic loop)상에 존재하는 절점집합이 완전 "그래프"에 속하는 나무(tree)를 포함하고 있는 특수한 "그래프"를 말한다.¹⁾ 이를 전력계통에 적용하면 전력계통도가 Y -"그래프"로 된다는 것은 G 가 적당한 나무에 대한 임의의 기본폐로상에 존재하는 모선의 집합이 전력계통도의 부분가지(branch)집합으로 되는 완전 "그래프"에 속하는 나무가 존재하는 "그래프"가 되는 것이다.

여기서 G 와 같은 수의 모선을 갖는 완전 "그래프"의 가지수에서 G 의 가지수를 뺄수를 l_n 라 하고, Y -"그래프"로 만들기 위하여 첨가하는 가지수를 b 라고 하면 "어드미턴스"행렬의 영요소의 수 $S[Y]$ 는

$$S[Y] = l_n - b \tag{2-1}$$

이때 주어진 전력계통도의 "어드미턴스"행렬에서 영요소의 수가 최대치로 될 수 있는 필요충분조건에 대하여 고찰하기 위하여 $S[Y]$ 의 최대치를 $m[Y]$ 라 놓으면

$$m[Y] = l_n - b_0 \tag{2-2}$$

이를 만족하는 필요충분조건은 G 에 가지를 첨가함으로써 G 를 Y -"그래프"로 만들때 첨가하는 가지의 최소수가 b_0 이어야 하는 것이다. 식(2-2)에 의하여 영요소의 수의 최대치를 구하기 위해서는 G 를 포함하는 가지수가 최소로 되는 Y -"그래프"를 찾으려 된다. 또한 G 에 대하여 $m[Y] = l_n$ 이 되기 위한 필요충분조건은 G 가 Y -"그래프"가 되어야 한다는 것을 알 수 있다. 따라서 G 가 Y -"그래프"가 아니면 "어드미턴스"행렬의 영요소의 수의 최대치는 l_n 보다 반드시 작게 된다. 따라서 전력계통도를 Y -"그래프"가 되게끔 생략하거나 신설함으로써 전력계통 해석에 유리한 "스파스"행렬을 얻을 수 있다.

3. "스파스"행렬방정식의 직접해법

3-1. 최적서열(optimal ordering)의 결정

일반적으로 대전력계통을 전자계산기에 의해서 해석하고자 할때 최소의 동작과 최소의 기억영역이 요구된다. 이러한 효과는 가우스의 생략법에 의하여 달성될 수 있으며 또 절점의 순서나 단위로 많이 달라진다.¹⁾

"스파스" "어드미턴스"행렬의 계수중 영이 아닌 요소만을 기억시킬때 다음과 같이 최적서열을 결정하여 각모선의 순서를 다시 정한다.

1967년 J.W. Walker는 "가우스"의 생략과정에서 근사 최적서열(near optimal ordering)방법을 3가지 방법으로 채택하였으나 이방법은 연산과정에 최적서열이 포함됨으로 매우 복잡한 "프로그램"을 요구한다.¹⁾ 본 논문에서는 연산과정에 들어가기 이전에 각모선의 순서를 결정하는 방법을 택하기 때문에 "프로그램"이 간단하고 필요로하는 입력도 본래의 "스파스"행렬의 각열(row)에 포함되어 있는 영이 아닌 요소의 수의 표가 되기때문에 아주 간단하고 편리하다.

그림 3-1과 같이 10개의 모선에 의하여 얻어지는 "어드미턴스"행렬에서 그요소를 1번에서부터 100번까지 순서를 정하여주고 다음의 과정에 의하여 최적서열을 결정한다.

(1) 다른모선들과 연결이 제일작은 모선의 가지

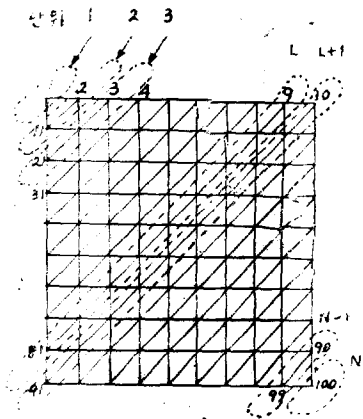


그림 3-1. 최적서열하기위한 행렬
Fig. 3-1. A matrix for optimal ordering of nodes.

(branch)를 선택한다. 그림 3-1에서 볼수 있는것과 같이 1번과 100번을 선택할수 있는데 여기서는 1번을 단위1로 선택했다.

(2) 그다음은 단위1에 포함된 1번과 연결이 되어있는 것으로 2번과 11번을 단위 2로 선택했다.

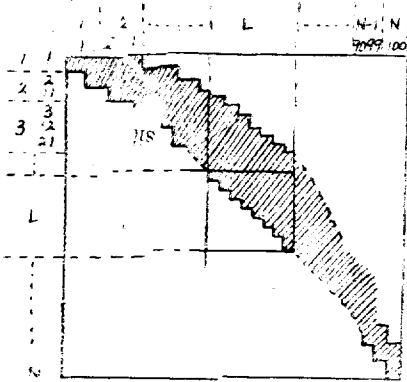


그림 3-2. 최적서열후의 행렬계수분포
Fig. 3-2. A matrix of coefficients after optimal ordering.

(3) 이와 같은 과정에 의하여 단위 L 번째가 결정되면 단위 $L-1$ 번째에 속하지 않고 단위 L 번째와 인접된 요소들을 단위 $L+1$ 번째로 선택한다.

(4) 이와같이 각모선은 새로운 번호를 정하여 첫번째 모선에서부터 마지막모선까지 수행한다. 그러면 단위 $L+1$ 번째의 첫번째 요소는 단위 L 번째의 첫번째 요소와 연결된다.

(5) 최적서열에 의하여 번호가 다시 정하여진 모선에 의하여 얻어지는 행렬계수는 그림 3-2에서 볼 수 있는 것과 같이 대각선요소의 주위에 집중하고 다른 부분은 영요소가 된다.

이렇게 얻어진 행렬계수는 삼각화법에 의한 직접해법을 사용하면 기억영역을 감소시킬 수 있고, 연산속도를 향상시킬 수 있다. 이것은 방정식의 계수행렬에서 영이 아닌요소만 좌표형태로 1차원배열을 하였다. 그림 2-2에서 모선번호와 단위번호를 첨자로 $T_N(Jr)$ 와 같이 기억시켰다. 여기서 T 는 변수, N 은 모선번호 Jr 은 행이나 열의단위 번호를 나타낸다.

3-2. 행렬식의 삼각화법

대부분의 전력계통은 그 연결이 불규칙하므로 그 "어드미턴스"행렬의 영이 아닌 요소들도 여러가지 모양으로 된다. 따라서 일반적인 행렬방정식에 대하여 수학적인 증가방법을 식(3-1)를 기초로 하여 생각한다.²⁾

$$[A][X]=[b] \tag{3-1}$$

여기서 $[A]$: non-singular matrix
 $[X]$: 미지의 행 "벡터"(column vector)
 $[b]$: 적어도 하나가 영이 아닌 요소를 포함한 알고 있는 vector.

식(3-1)의 $[A]$ 는 대각선 요소를 기준으로 하여 위부분삼각행렬 $[U]$ 과 아래부분 삼각행렬 $[L]$ 로 나누어 표시 할 수 있다.

$$[A]=[L][U] \tag{3-2}$$

$$\text{여기서 } a_{ij}=\sum_{k=1}^n l_{ik}U_{kj}$$

$$U_{kk}=1$$

$[L]$ 과 $[U]$ 는 전자계산기에서 다음과 같은 보조 행렬로 기억된다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ l_{21} & d_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & d_{nn} & \vdots \end{pmatrix} \tag{3-3}$$

$$\text{여기서 } d_{kk}=\frac{1}{l_{kk}}$$

식(3-1)은 식(3-4)와 같이 표시된다.

$$[L][U][X]=[b] \tag{3-4}$$

이때 $[Y]=[U][X]$ 로 놓으면 식(3-4)는

$$[L][Y]=[b] \tag{3-5}$$

그러면 식(3-5)에서 $[Y]$ 는 Forward Substitution에 의하여 대입함으로써 구하여 진다. 따라서 식(3-4)는

$$[U][X]=[Y] \tag{3-6}$$

와 같이 됨으로 $[X]$ Backward Substitution³⁾으로 구하여 진다.

이상과 같은 과정을 보다 편리한 "프로그램"으로 작성하기 위하여 다음과 같은 정의를 한다.

(정의 1)

$$[D_k] \cong \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{l_{kk}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$[D_k]$ 는 $[L]$ 의 대각선항의 k 번째의 요소의 역수가 단위행렬(unit matrix)의 k 번째 대각선항에 들어있는 행렬이다.

(정의 2)

$$[L_k^*] \cong \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -l_{kk} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$[L_k^*]$ 은 $[L]$ 의 k 번째 열의 음수가 단위행렬의 k 번째 열에 들어 있는 행렬이다.

표 1. [10×10] 행렬의 연립 1차 방정식의 해법비교

Table 1. Comparison of solution method of [10×10] matrix equation

행렬의 영이 아닌 요소의 수	역변환행렬법					스 파 스 행 렬 법					
	소요계산시간(분·초)					영이 아닌 계수행렬의 요소수			소요계산시간(분·초)		
요소수	스파스티 (%)	역변환행렬	X의해	합 계	대각선 요소수	[L]	[U]	삼각행렬	X의해	합 계	
100	100	6:20'	1:30'	7:50'	10	45	45	6:40'	2:05'	8:45'	
74	74	5:54'	1:30'	7:24'	10	37	35	6:10'	1:50'	8:00'	
55	55	5:43'	1:30'	7:13'	10	32	34	5:30'	1:33'	7:03'	
32	32	5:20'	1:30'	6:50'	10	28	25	4:43'	1:25'	5:08'	
25	25	5:20'	1:30'	6:50'	10	20	19	1:55'	0:53'	2:48'	
16	16	4:30'	1:30'	6:00'	10	11	17	0:50'	0:30'	1:20'	

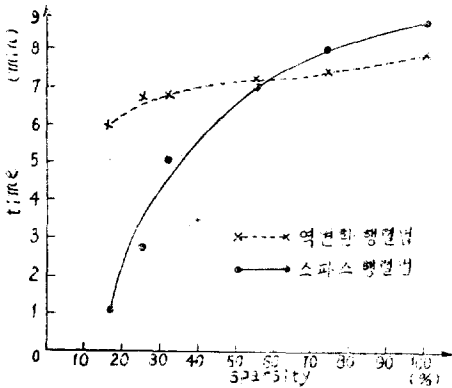


그림 4-1. 역변환 행렬법과 스파스행렬법의 해법비교
Fig. 4-1. Comparison of solution method between the inverse matrix method and the sparse matrix method.

이상의 결과는 전자계산기 Univac USSC 80-2를 이용하여 얻은 것인데, 연산과정을 밝히기 위하여 식(4-1)과 같은 간단한 방정식의 해를 부록 1에 보였다.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

식(4-1)의 계수행렬[A]로부터 삼각화 보조행렬을 구하고, 그 보조행렬에 직접해법을 적용시켰다.

4-2. 전력계통의 해

실제의 대 전력계통에서 얻은 "어드미턴스"행렬은 매우 "스파스"하고 대칭이기 때문에 "스파스"행렬법의 적용은 매우 바람직하다. 일반적인 "모델"전력계통을 선정하여 "스파스"행렬법에 의하여 조류계산을 시도 하였다.

일반적으로 N개의 모선으로 구성된 전력계통에서 모선전류 I_k와 모선전압 E_k의 관계는

$$I_k = \sum_{m=1}^N Y_{km} E_m \quad (4-2)$$

인데, 여기서 Y_{km}: "스파스 어드미턴스"행렬의 요소. 이때 모선 k에서의 전력은¹¹⁾

$$P_k + jQ_k = \sum_{m=1}^N Y_{km}^* E_m^* E_k \quad (4-3)$$

여기서 P_k, Q_k: 각각 모선 k로 유입하는 유효전력과 무효전력

Y_{km}^{*}, E_m^{*}: 각각 Y_{km}, E_m의 공액 복소수

모선 각각의 계획된 전력과 비교하여 유효전력과 무효전력의 변화율 ΔP_k와 ΔQ_k가 구하여 지면 다음과 같은 Jacobian행렬을 이용하여 각모선의 전압 위상각의 변화율 Δδ와 전압변화율 ΔE/E를 구한다.

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & N \\ J & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta E/E \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

여기서 Jacobian행렬의 계수는 "어드미턴스"행렬, 전압과 전류를 유효분과 무효분으로 나누어 계산된다¹¹⁾.

이때 얻어지는 행렬은 매우 "스파스"하다. 따라서 Jacobian행렬을 삼각화로 변형시킨 보조행렬도 "스파스"하게 된다.

"스파스"한 삼각화 보조행렬을 이용하여 식(3-14)을 적용하였다.

이때 Δδ와 ΔE/E가 구하여지면 각각 모선전압을 정정하고 정정된 전압에 의하여 각 모선의 전력을 계산한다.

따라서 전력의 변화율 ΔP와 ΔQ가 구하여지는데 ΔP와 ΔQ가 주어진 오차의 한계가 도달할때 까지 계산하여 전력조류를 계산한다.

그림 4-2와 같은 "모델"전력계통을 구성하고, 조류 계산에 필요한 입력은 표 2와 같다고 가정한다.

그림 4-2의 "모델"전력계통의 "어드미턴스"행렬은 부록 2와 같다. 또 표 2의 가정된 모선전압은 단위법으로 표시하였고 차격서열의 결정에 따라 1번 모선을 정하고 기준모선(slack bus)으로 선정하였다. "어드미턴스"행렬과 표 2의 값을 입력 Data로 하여 전자계산기 IBM 360을 이용하고 부도와 같은 흐름표를 따라 조류를 계산하였다. Jacobian 행렬의 삼각화 보조행렬

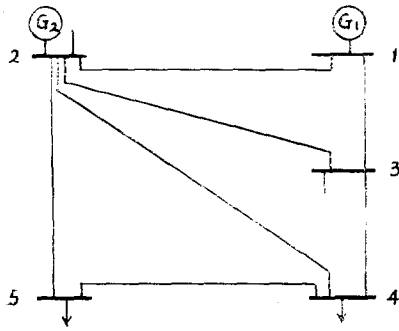


그림 4-2. 모델전력계통
Fig. 4-2. Model electrical power system.

표 2. "모델" 전력계통의 가정된 모선전압 부하 및 발전계획

Table 2. Scheduled generation loads and assumed bus voltage for model system.

모선	가정된 모선전압	발전모선		부하모선	
		유효전력 (MW)	무효전력 (MVar)	유효전력 (MW)	무효전력 (MVar)
1	1.06 + j0.0	0	0	0	0
2	1.0 + j0.0	40	30	20	10
3	1.0 + j0.0	0	0	45	15
4	1.0 + j0.0	0	0	40	5
5	1.0 + j0.0	0	0	60	10

을 구한후 식(3-7)에 의한 직접해법을 적용하여 $\Delta\delta$ 와 $\Delta E/E$ 를 계산하고 ΔP 와 ΔQ 가 허용오차이 한계에 도달 할때 Newton의 조류계산법에서 지적된 계산식에 의하여 조류를 계산하였다¹¹⁾. 이때 오차의 한계를 단위별로 0.01로 잡았는데 연산과정의 모선전압, 모선 전압의 변화율과 전력의 변화율은 부록 3과 같고 최종 적인 조류계산 결과는 부록 4와 같다.

4-3. 결과 고찰

연립방정식의 해와 전력계통이 조류계산에 "스파스"행렬법을 적용하였는데 그 결과에 대한 고찰은 다음과 같다.

1. 연립방정식의 해를 얻는데 사용된 전자계산기가 소형이고 timer도 수동조작형임으로 오차가 많았고, 또 각각을 프린트하는 시간까지 합하여졌기 때문에 일반적으로 많은 시간이 소요되었으나 앞에 설명된 2가지 방법을 비교하는 데는 별다른 지장이 없다고 생각 된다.

2. 그림 4-1에서 볼 수 있는 바와 같이 "스파스티"가 55(%) 이하가 될때 비로소 "스파스"행렬법이 역변환 행렬법에 비하여 소요 계산시간이 짧게 됨을 알 수 있고 30(%)이하로 되면 연산시간이 급격히 감소 된다

는 것을 알 수 있다.

3. "스파스티"가 16(%)일때는 소요계산시간이 역변환 행렬법에 비하여 약 1/5로 감소 된다.

4. 실험적으로 선정된 "모델" 전력계통은 모선사이의 연결이 많고 폐회로(loop)로 구성된 소형의 계통이었기 때문에 "스파스"행렬법에 적합한 50(%)하의 "스파스티"를 얻지 못하였으나 "스파스"행렬법에 의하여 정확한 결과를 얻을 수 있었으므로 실제의 대 전력계통에 적용하면 연산시간과 기억영역을 축소시킬 수 있다는 타당성을 밝혔다.

5. 부록 3에서 각 모선전압의 변화율이 $k=1$ 에서 양의 값이었다가 $k=2$ 에서 음의 값으로 변화됨은 $k=2$ 에서 정확한 값에 근사하고 있음을 알 수 있다. 따라서 $k=2$ 에서의 결과 추출은 매우 만족할만한 결과를 얻었다고 생각된다.

이상의 고찰에서 본 바와 같이 "스파스"행렬법은 "스파스티"가 50(%)이하에서 여러가지 이점이 있으므로 실제의 대전력 계통 해석을 유익하고 구하고자 하는 해를 쉽게 얻을 수 있다.

5. 결 론

본 논문은 "어드미턴스"행렬의 "스파스티"성질을 이용하면 전력계통 해석에 많은 이점이 있음을 밝히기 위하여 (10×10)행렬계수를 갖는 연립 1차방정식의 해를 구할때 역변환행렬법과 "스파스"행렬법을 적용하여 그 소요 연산시간을 비교하였고, "스파스"행렬법으로 전력계통의 해석중 조류계산을 시도한 것인데 중요한 결론은 다음과 같다.

1. 전력계통의 "어드미턴스"행렬에서 영요소의 수가 최대치로 될 수 있는 필요 충분조건을 제시했다.

2. 대 회로망의 해석에서 그 "스파스티"가 50(%)이하로 되면 역변환 행렬법을 이용하는 것 보다 그 "스파스티"를 보존시킬 수 있는 "스파스"행렬법을 이용하면 많은 장점이 있음을 밝혔다.

3. "스파스"행렬법에 필요한 직접해를 위한 행렬계수의 곱을 쉽게 계산하는 "프로그램"의 개발을 시도 하였다.

4. "모델"전력계통의 조류계산을 통하여 "스파스"행렬법이 실제의 대 전력계통 해석에 매우 유익한 결과 그 타당성을 입증했다.

본 연구는 확대된 대 전력계통에서 과도 안정도해석 단락회로 계산에 관한 연구, 무효전력 제어등에 적용 가능하고 또 일반적인 대 회로망 해석에도 유익할 것으로 기대된다.

[부록 1] 식(4-1)의 보조표와 결과

A 행렬

$$\begin{pmatrix} 2.0000 & 1.0000 & 3.0000 \\ 2.0000 & 3.0000 & 4.0000 \\ 3.0000 & 4.0000 & 7.0000 \end{pmatrix}$$

A의 보조표[L/U]

$$\begin{pmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 1.5000 \\ 2.0000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 3.0000 & 2.5000 & 0.8000 \end{pmatrix}$$

X#	U1R	U2R	D3	L3R	D2	L2R	D1	B1
X =	$\begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & -1.5 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -3.0 & -2.5 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.0 \\ 9.0 \\ 14.0 \end{pmatrix}$
	3.00000	9.00000	14.00000					
	3.00000	3.00000	14.00000					
	3.00000	1.50000	14.00000					
	3.00000	1.50000	1.25000					
	3.00000	1.50000	1.00000					
	3.00000	1.00000	1.00000					
	1.00000	1.00000	1.00000					
=	$\begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$							

X#	U1R	U2R	D3	L2C	D2	L1C	D1	B2	
X =	$\begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & -1.5 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.5 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ -3.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.0 \\ 0.0 \\ 14.0 \end{pmatrix}$
	3.00000	9.00000	14.00000						
	3.00000	3.00000	5.00000						
	3.00000	1.50000	5.00000						
	3.00000	1.50000	1.25000						
	3.00000	1.50000	1.00000						
	3.00000	1.00000	1.00000						
	1.00000	1.00000	1.00000						
=	$\begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$								

X#	U2C	U3C	D3	L3R	D2	L2R	D1	B3	
X =	$\begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & -1.5 \\ 0.0 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.5 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.0 \\ 9.0 \\ 14.0 \end{pmatrix}$
	3.00000	9.00000	14.00000						
	3.00000	3.00000	14.00000						
	3.00000	1.50000	14.00000						
	3.00000	1.50000	1.25000						
	3.00000	1.50000	1.00000						
	1.50000	1.00000	1.00000						
	1.00000	1.00000	1.00000						

$$= \begin{pmatrix} 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & -1.5 \\ 0.0 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.5 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ -3.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.0 \\ 9.0 \\ 14.0 \end{pmatrix}$$

3.00000 9.00000 14.00000
 3.00000 3.00000 5.00000
 3.00000 1.50000 5.00000
 3.00000 1.50000 1.25000
 3.00000 1.50000 1.00000
 1.50000 1.00000 1.00000
 1.00000 1.00000 1.00000

$$= \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

* STOP #0000000000

[부록 2] 모델계통의 어드미턴스행렬

* SOLUTION OF ADMITTANCE **

* BUS ADMITTANCE MATRIX

	1	2	3	4
1	0.25000 - j18.69500	- 5.00000 + j15.00000	- 1.25000 + j 3.75000	
2K	- 5.00000 + j15.00000	10.83334 + j32.41500	- 1.66667 + j 5.00000	- 1.66667 + j5.00000
KK	- 2.50000 + j 7.50000			
3	- 1.25000 + j 3.75000	- 1.66667 + j 5.00000	12.91667 + j38.69500	- 10.00000 + j30.0000
4K		- 1.66667 + j 5.00000	- 10.00000 + j30.0000	12.91667 - j38.6950
KK	- 1.25000 + j 3.75000			
5K		- 2.50000 + j 7.50000		- 1.25000 + j 3.75000
KK	3.75000 + j11.21000			

[부록 3] 모선의 전압변화율, 전압과 전력의 변화율

* CHANGES IN BUS VOLTAGES

	BUS 2	BUS 3	BUS 4	BUS 5
0.	0.00000 + j0.00000	0.00000 - j0.00000	0.00000 + j0.00000	0.00000 + j0.00000
1.	0.05505 - j0.05034	0.03176 - j0.09123	0.03136 - j0.09747	0.02653 - j0.11285
2.	- 0.00876 - j0.00044	- 0.01133 + j0.00201	- 0.01206 + j0.00239	- 0.01424 + j0.00375
* BUS VOLTAGES *				
0.	1.00000 + j0.00000	1.00000 + j0.00000	1.00000 - j0.00000	1.00000 + j0.00000
1.	1.05505 - j0.05084	1.03176 - j0.09123	1.03136 - j0.09747	1.02653 - j0.11285
2.	1.04629 - j0.05128	1.02043 - j0.08923	1.01930 - j0.09508	1.01229 - j0.10910

* CHANGES IN BLS POWERS.

0.	0.50000 - J1.18500	-0.37500 - J13.00000	-0.40000 - J0.00500	-0.50000 + J0.00000
1.	-0.09343 + J0.03858	-0.00103 + J 0.03579	0.01174 + J0.03874	0.02244 + J0.06563
2.	-0.00073 + J0.00039	-0.00010 + J 0.00038	0.00003 + J0.00045	0.00006 + J0.00097

[부록 4] 모델계통의 조류계산결과

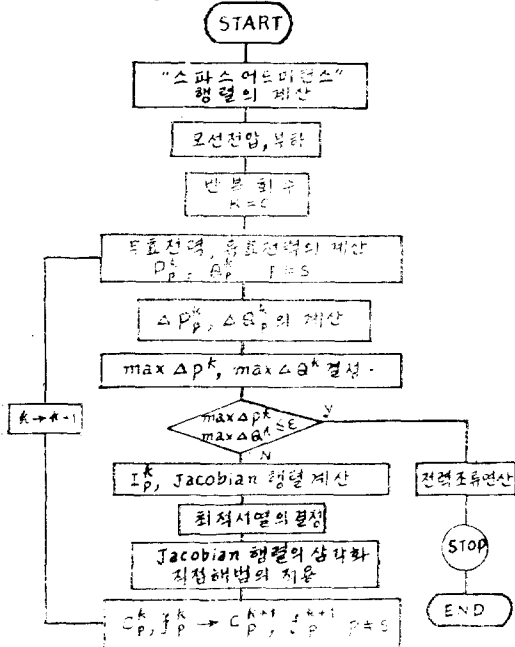
* LOAD FLOW SOLUTION BY USING Y BUS.

- THE SOLUTION -

P-Q	MEG WAT	MEG VAR
1-2	88.8016	-8.6213
1-3	40.7104	1.1381
2-1	-87.4320	6.2043
2-3	24.7065	3.5176
2-4	27.9158	3.0429
2-5	54.8326	7.4345
3-1	-39.5043	-3.0192
3-2	-24.3162	-6.8346
3-4	18.9081	-5.1429
4-2	-27.5416	-5.9036
4-3	-18.9073	3.2179
4-5	6.3391	-2.3164
5-2	-53.7126	-7.2083
5-4	- 6.3405	-2.8162

부도. 스파스행렬법에 의한 조류계산의 흐름표

(program flowchart)



參 考 文 獻

1. Sato, N. & Tinney, W.F.: "Techniques for Exploiting the Sparsity of the Network Admittance Matrix", IEEE Trans., PAS-82, pp.944~950 1963.
2. Tinney, W. F.: "Direct Solution of Sparse Network Equation by Optimally Ordered Triangular Factorization", Proc. IEEE, Vol. 55, pp.1801~1809, 1967.
3. Ogbobiri, E. C., Tinney, W. F. & Walker, J.W.: "Sparsity-Directed Decomposition for Gaussian Elimination on Matrices", IEEE Trans., Vol. PAS-89, No. 1, pp.141~149, Jan. 1970.
4. Erisman, A. M. & Spies, G. E. "Exploiting Problem Characteristics in the Sparse Matrix Approach to Frequency Domain Analysis", IEEE Trans., Vol. CT-19, pp.260~264, 1972.
5. Scott, B. & Hobson, E.: "Solution of Large Power System Networks by Ordered Elimination", IEEE Trans., Vol. PAS-89, No. 1, pp.141~149, Jan. 1970.

- ation", Proc. IEEE Trans., Vol. 118, No. 1, pp.125~134, Jan., 1971.
6. Deseer, C. A. & Kuh, E. S.: *Basia Circuit Theory*, McGraw-Hill, 1969.
 7. Stagg, G. W. & El-Abiad A. H.: *Computer Methods in Power System Analysis*, McGraw-Hill, 1968.
 8. Ogbuobiri, E. C.: "Dynamic Storage and Retrieval in Sparsity Programming". IEEE Trans. Vol. PAS-89, No.1, pp.150~155, 1970.
 9. Pipes, L.A. & Hovanessian, S. A.: *Martix-Computer Methods in Engineering*, John Wiley & Son, 1969.
 10. Sasson, A.M. & Jaimes, F.: "Digital Methods Applied to Power Flow Study", IEEE Trans. Vol. PAS-86, No. 7, July, 1967.
 11. Tinney, W.F. & Hart, C. E.: "Power Flow Solution by Newton's Method", IEEE Trans., Vol. PAS-86, No. 11, Nov., 1967.
 12. I.B.M.Co.: *1130 Scientific Subroutine Package*.
 13. Rose, D. J. & Willoughby, R. A.: *Sparse Matrices and Their Applications*, Plenum Press, New York-London, 1972.
 14. Harary, F.: "Graphs and Matrix" *SIAM Rev.* No. 9, pp. 83~900, 1967.