◎講　座

開閉回路의 論理設計(Ⅲ)

高　明　三*

—차　례—

4. 組合開閉回路의 設計(I)

복잡한 시스템의 設計 또는 硏究에서 무엇보다도 중요한 것은 組合設計(combinational deeign)의 原理를 완전히 이해하는데 있으며, 여기서 기술한 組合開閉回路理論은 그 기초가 된다. 組合論理回路(combinational ogic circuit)란, 出力이 入力의 現在狀態에만 전적으로 종속되는 回路를 의미한다. 組合設計의 主目的은 最小數의 素子(리레이接點, 기본게이트素子 혹은 게이트入口등)로, 우리가 원하는 開閉特性(switching characteristics)을 실현하는 回路를 설계할 수 있는 능력을 부여하는데 있다.

開閉問題는 일반적으로 口頭 혹은 文章으로 표현된 仕方을 眞値表 혹은 條件—函數表와 같은 數學的 形式으로 變換한 후, 이를 다시 合積(혹은 積合)形式으로 된 소위 論理代數式으로 나타낸다. 이때 簡單化技法에 의거 되도록 간단한 形式으로 變形시킨후 실제設計 및 시스템을 제작할 수 있도록 리레이接點, NAND/NOR 게이트 기호로 표시된 hardware diagram을 완성한다.

이 章에서는 論理函數, 論理式의 表現形式, 論理式의 簡單化 및 이들 技法이 실지 組合開閉回路의 設計에 어떻게 적용되는가를 實例를 통하여 기술한다.

4.1. 論理開閉函數

일반적으로 論理裝置는 그림 4.1과 같이 여러개의 入力端子와 여러개의 出力端子로 구성된다. 出力은 入力에 관한 論理演算의 수행으로 결정된다. 이와같이 論理演算을 실시하는 部分을 論理回路(logic circuit)라 한다. 論理回路에서 모든 入力이 "0" 혹은 "1"의 두가지 종류의 값만을 취함과 동시에 모든 出力역시 入力의 "0"과 "1"의 組合에 의하여 결정되는 "0" 혹은 "1"의 값을 취한다.

그림 4.1 論理裝置

出力을 y_i라 하면

$$y_i = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot1)$$

식 (4.1)을 論理開閉函數(logical switching function 이하 開閉函數라 칭함)이라하며, x_i, y_i등을 論理變數라 한다.

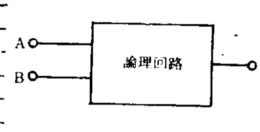
定義 4.1 n 變數開閉函數란 n個의 變數들의 값들의 모든 可能한 2^n個의 組合에 대하여 "1" 혹은 "0"와 같은 函數値(functional value)를 임의로 지정한 式을 의미하며, 일반적으로 n個의 論理變數로 구성된 論理裝置에서 開閉函數의 총수는 2^{2^n}이다.

4.2 開閉式의 表現形式(最小項 및 最大項)

前回의 3.7.2에서 이미 간단한 例題를 통하여 부울式의 簡略化 및 그 應用法에 대하여 간단히 설명한 바와같이 開閉式(switching equations) 혹은 부울式을 구하기 위하여는 우선 論理變數 상호간의 組合表 즉 眞値表가 필요하다. 그림 4·2와 같은 2 入力, 1 出力 論理 回路를 생각해보자. 두개의 入力 A, B가 동일할 때 出力 Y는 1 이 된다고 가정하면 이경우의 論理變數의

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(b) 眞値表



(a) 論理回路

그림 4.2 2 入力 1 出力論理回路

*正會員・서울大教授(工博)・當學會 編修理事

眞値表는 同圖(b)와 같다.

그림 4·2(b)의 眞値表로부터 出力 Y가 "1"이 되기 위하여는 入力(A,B)가 (0,0) 및 (1,1)인 경우이다. (1,1)에 대하여는 AB인項으로, (0,0)에 대하여는 $\bar{A}\bar{B}$인項으로 각각 나타낸다.

이와같이 1 에는 그 變數自身을, 0에는 補變數를 대응시키면 Y는 다음式과같이 주어진다.

$$Y=\bar{A}\bar{B}+AB \quad \cdots\cdots(4.2)$$

식(4.2)에서 $Y=1$이 되기 위하여는 右邊의 두項중 어느 하나가 1 이 되면 된다. 2論理變數A,B(및 $\bar{A},\bar{B}$등)의 積에는 이미 前回에서 지적하드시$AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$의 4種類가 있다. 이와같이 모든 變數를 포함한 積項을 最小項(minterm)이라 한다.

論理開閉式은 식 (4.2) 혹은 (3,31)와 같이 最小項의 合形式으로 나타낼 수 있다.

다음 그림 4.2에서 出力 Y가 0 이 되는 것은 入力(A,B)가 (0,1) 및 (1,0)인 경우이므로

$$\bar{Y}=\bar{A}B+A\bar{B} \quad \cdots\cdots(4.3)$$

$\bar{A}B=1$ 이 되는 것은 $A=0$, $B=1$ 인 경우이며, 이때 $\bar{Y}=1$이된다. 그러므로 $Y=0$ 가 된다.

前回의 定理 11(De Morgan의 法則)에 의하여

$$\bar{\bar{Y}}=Y=(A+\bar{B})(\bar{A}+B) \quad \cdots\cdots(4.4)$$

2 論理變數 A,B의 合에는 $A+B$, $A+\bar{B}$, $\bar{A}+B$의 네 종류가 있다. 이와같이 모든 變數를 내포하는 合項을 前回에서 이야기 한바와같이 最大項(maxterm)이라 부른다. 論理開閉式은 식 (4.4)와같이 最大項의 積形式으로 표현할 수 있다.

식 (4.2) 및 (4.4)는 同一 眞値表에서 얻어졌음으로 같은 開閉函數를 나타낸다. 이와같이 모든 開閉函數는 最小項의 合形式 혹은 最大項의 積形式등 어느 것으로도 나타낼 수 있다. 일반적으로 n變數의 最小項 혹은 最大項은 2^n個이다.

表 4.1 3入力 1出力 組合裝置例

行	入力 A B C	出力 Y
0	0 0 0	0
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	1

지금 表 4.1와 같은 變數 開閉函數에 대하여 생각해 보자.

즉 表 4.1는 3個의 入力 A,B,C중 적어도 2個의 入力變數가 1의 값을 취하면 出力은 1이 되는 그러한 開閉函數이다. 이表로부터 入力(A,B,C)가 (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) 및 (1,1,1)인때 $Y=1$이 되므로

$$Y=\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC \quad \cdots\cdots(4.5)$$

간단화하면

$$Y=AB+BC+CA \quad \cdots\cdots(4.6)$$

開閉式의 簡單化에 대해서는 다음 節에서 기술한다.

다음, 出力 Y가 0의 값을 취하는것은 入力(A,B,C)이 (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)인 때이므로

$$\bar{Y}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C} \quad \cdots\cdots(4.7)$$

DeMorgan定理에 의하여

$$\bar{\bar{Y}}=Y=(A+B+C)\ (A+B+\bar{C})\ (A+\bar{B}+C)\ (\bar{A}+B+C) \quad \cdots\cdots(4.8)$$

$$=(A+B)(B+C)(C+A) \quad \cdots\cdots(4.9)$$

以上과 같이 表 4.2의 組合으로 주어진 開閉函數는 2變數의 경우와 마찬가지로 식 (4.5), (4.6) 혹은 식 (4.8), (4.9)와 같이 積項의 合形式 혹은 合項의 積形式으로 나타낼 수 있는데 보통은 식 (4.5), (4.6)과 같이 積項의 合形式으로 나타내는 경우가 많다.

식(4.6)을 變形하면

$$\begin{aligned}
Y&=AB+BC+CA \quad \cdots\cdots(4.10)\\
&=AB+BC+CA(B+\bar{B})\\
&=AB+BC+ABC+A\bar{B}C \quad \cdots\cdots(4.11)\\
&=AB+BC(A+\bar{A})+ABC+A\bar{B}C\\
&=AB+ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C \quad \cdots\cdots(4.12)\\
&=AB(C+\bar{C})+ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C\\
&=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C \quad \cdots\cdots(4.13
\end{aligned}$$

식 (4.10)~(4,13)와 같이 論理開閉式의 積項의 合形式에는 여러가지 表現法이 있으나 最小項에 의한 表現形式은 주어진 論理開閉函數에 대하여 한가지 뿐이다. 最小項에 의한 表現形式을 積合標準形(Standard sum-of-products form) 혹은 正規最小項形式이라 하며 最大項에 의한 表現形式을 合積標準形(Standard product-of-sums form) 혹은 正規最大項形式이라 한다 積合標準形에 의한 論理函數의 展開는 論理開閉式을 간단화할 때 중요한 役割을 한다.

開閉函數에 대한 간단한 표현法을 소개하면 다음과 같다. 表 4.1에서 行欄에 기재된 數字는 2 値入力(A,B,C)에 대응되는 10進等價數이다. 예를 들면 入力組合$(A,B,C)=(011)$를 2進數로 생각하여 $(0.11)_2=(3)_{10}$가 되므로 第3行이라 하였다. 지금 出力 $Y=1$이 되는 行을 열거함으로써 그 함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y(A,B,C)=\sum m(3,5,6,7) \quad \cdots\cdots(4.14)$$

혹은 $Y=0$ 이 되는 行 즉 함수를 열거하면

$$Y(A,B,C)=\prod M(0.1,2,4) \quad \cdots\cdots(4.15)$$

식(4.14) 및 (4.15)의 "$\sum m$"와 "$\prod M$"는 表 4.1과 標準形間의 直接的인 對應關係를 나타내고 있다. 즉

식 (4.5)와 (4.14) 에 의하여

$$1=Y(A,B,C)=\sum m(3,5,6,7)=\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC \quad \cdots\cdots(4.16)$$

$$0=Y(A,B,C)=\prod M(0,1,2,4)=(A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+C)(\bar{A}+B+C) \quad \cdots\cdots(4.17)$$

식 (4.16)의 右邊에서 주어진 最小項이 "1"이 될 수 있는 入力組合은 오직 하나 뿐이다. 예를 들면 第5行에 해당하는 入力 $A=1$, $B=0$, $C=1$에 대하여 식 (4.16)의 두번째 最小項은

$$A\bar{B}C=1\cdot\bar{0}\cdot1=1\cdot1\cdot1=1$$

인 관계가 성립하므로 "1"이 된다. $A\bar{B}C$가 "1"이 될 수 있는 入力組合은 $A=1$, $B=0$, $C=1$인 한가지 뿐임은 明白함으로 $A\bar{B}C$와 表 4.1의 第5行은 1對1 對應된다. 이러한 事實을 最小項 $A\bar{B}C$는 第5行上에 "1"을 발생시킨다는 말로 표현하며, "最小項 5" 혹은 "m_5"로 표시한다. 마찬가지로 식 (4.16)의 나머지 最小項들도 m_3, m_6, m_7과 같이 표시한다. 따라서 식 (4.16)은 積合標準形으로 나타낸 最小項表라 할 수 있다. 이와 유사한 結論을 最大項에 대하여 말할 수 있다. 즉 入力 $A=1$, $B=0$, $C=0$에 대하여

$$\bar{A}+B+C=\bar{1}+0+0+=0+0+0=0$$

가 성립하므로, 最大項은 入力 $A=1$, $B=0$, $C=0$에 第4行上에 "0"을 발생시킨다고 하며 M_4와 같이 표시한다. 식 (4.17)의 나머지 最大項은 M_0, M_1, M_2와 같이 표시하며 식(4.15)는 合積標準形으로 나타낸 最大項表이다.

表 4.2는 3變數眞值表의 各行에 대응되는 最小項과 最大項을 표시한다.

表 4.2 3變數의 最小項 및 最大項

行	A B C	最 小 項	最 大 項
0	0 0 0	$m_0=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$M_0=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$
1	0 0 1	$m_1=\bar{A}\bar{B}C$	$M_1=\bar{A}+\bar{B}+C$
2	0 1 0	$m_2=\bar{A}B\bar{C}$	$M_2=\bar{A}+B+\bar{C}$
3	0 1 1	$m_3=\bar{A}BC$	$M_3=\bar{A}+B+C$
4	1 0 0	$m_4=A\bar{B}\bar{C}$	$M_4=A+\bar{B}+\bar{C}$
5	1 0 1	$m_5=A\bar{B}C$	$M_5=A+\bar{B}+C$
6	1 1 0	$m_6=AB\bar{C}$	$M_6=A+B+\bar{C}$
7	1 1 1	$m_7=ABC$	$M_7=A+B+C$

表 4.2에서 最小項의 各非補變數 A,B,C는 2進行數(binary row number)의 대응장소에서 각각 "1" 補變數 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$등은 "0"을 취한다. 最大項은 이의 反對가 성립하다.

例題 4.1

$Y=A+B\bar{C}+A\bar{B}C$를 積合標準形으로 전개하라

풀이 :
$$\begin{aligned} Y&=A(B+\bar{B})+(A+\bar{A})B\bar{C}+A\bar{B}C \\ &=AB+A\bar{B}+AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}C \\ &=AB(C+\bar{C})+A\bar{B}(C+\bar{C})+AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}C \\ &=ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C} \quad \cdots\cdots(4.18) \end{aligned}$$

例題 4.2

$Y=AB+C$을 積合標準形으로 전개하라.

풀이

$$\begin{aligned} Y&=AB(C+\bar{C})+(B+\bar{B})C \\ &=ABC+AB\bar{C}+(A+\bar{A})BC+(A+\bar{A})\bar{B}C \\ &=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}C \quad \cdots\cdots(4.19) \end{aligned}$$

例題 4.3

식(4.18)을 最小項表로 나타내라

풀이

$$Y(A,B,C)=\underbrace{ABC}_{\underbrace{111}_{7}}+\underbrace{AB\bar{C}}_{\underbrace{110}_{6}}+\underbrace{\bar{A}BC}_{\underbrace{011}_{3}}+\underbrace{A\bar{B}C}_{\underbrace{101}_{5}}+\underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_{\underbrace{001}_{1}}$$

그러므로 $Y(A,B,C)=\sum m(1,3,5,6,7)$ ………(4.20)

例題 4.4 :

식 $Y(A,B,C,D)=(A+\bar{B}+C+\bar{D})(\bar{A}+B+C+D)(A+B+\bar{C}+\bar{D})(\bar{A}+B+C+\bar{D})$ 을 最大項表로 나타내라.

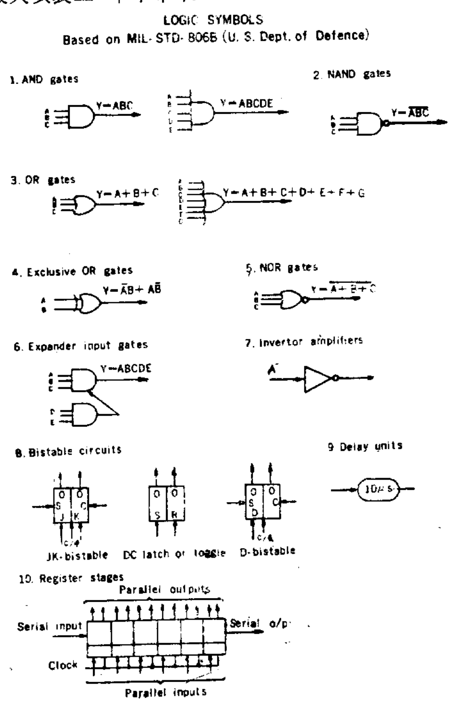


표 4.3 $MIL-STD-806B$규격

풀이 :

$$Y(A,B,C,D)=(A+\bar{B}+C+\bar{D})(\bar{A}+B+C+D)$$

$$\underbrace{0\ 1\ 0\ 1}_{5}\quad\underbrace{1\ 0\ 0\ 0}_{8}$$

$$(A+B+\bar{C}+\bar{D})(\bar{A}+B+C+\bar{D})$$

$$\underbrace{0\ 0\ 1\ 1}\quad\underbrace{1\ 0\ 0\ 1}$$

그러므로

$$Y(A,B,C,D)=\prod M(3,5,8,9) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.21)$$

앞으로 사용되는 論理開閉回路의 記號는 미국의 *MIL-STD*-806*B*規格(軍用規格 : Militany Standand)에 따르기로 하며, 대표적인 記號 몇 가지를 표 4.3에 표시한다.

4.3 開閉式의 簡單化

디지털裝置는 여러가지 組合回路, 順序回路등으로 구성된다. 이러한 組合回路, 順序回路를 설계하기 위하여는 論理設計를 할 필요가 있다. 이미 前節에서 이야기한바와같이 論理設計 절차로 우선 論理函數를 表現할 組合表를 만든다. 작성된 組合表로부터 論理開閉式을 구하여 簡單化를 꾀한다. 論理開閉式의 簡單化란 보통 그이상 간단히 할수없는 形式 즉 最簡單形式을 의미한다.

開閉函數는 다이오드, 트랜지스터, 리레이, *IC*論理素子등의 論理回路素子를 사용하여 實現할 수 있다. 이때 사용되는 論理回路素子의 數를 最小로 하는것이 論理開閉式의 簡單化의 目的이라 할 수 있다.

지금 2入力(A,B) 1出力(Y)의 組合論理回路에서

$$Y(A,B)=\bar{A}B+A\bar{B}+AB \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.22)$$

와같은 관계가 주어졌다고 하자. 前回의 諸定理를 이용하여 간단히 하면

$$\begin{aligned}Y(A,B)&=\bar{A}B+A\bar{B}+AB\\&=\bar{A}B+AB+A\bar{B}+AB\\&=B(\bar{A}+A)+A(\bar{B}+B)\\&=B+A \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.23)\end{aligned}$$

식 (4.22), (4.23)을 *AND*回路와 OR回路로 구성하면 그림 4.3과 같이 된다. 그림 4.3(a), (b)는 入力의 組合에 대하여 같은 出力을 나타내는 組合論理回路이다. 즉 식(4.23)는 식(4.22)의 簡單化라 볼 수 있다

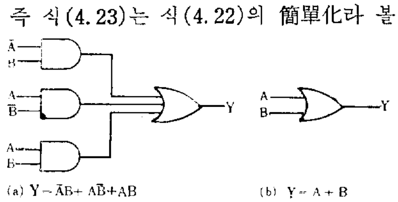


그림 4.3 $Y=\bar{A}B+A\bar{B}+AB$ 및 $Y=A+B$의 實現

만일 그림 4.3의 組合回路를 다이오드論理素子로 實現한다면 그림 4.4 와같의 (a)인 경우에는 9個 (b)인 경우에는 2個의 다이오드를 필요로 한다. 論理開閉式의 簡單化는 다이오드의 個數를 最小로 한다. 일반적으로 論理開閉式의 簡單化는 다음 式으로 주어지는 數를 最小로 하는 것을 의미한다.

(變數의 個數)+(項의個數) ………………(4.24)

現在論理回路에는 주로 *IC*論理素子를 많이 사용하며 *IC*게이트인 경우에는 사용하는 LSI게이트 數를 最小로하는 것● 곧 論理開閉式의 簡單化라고 말할수 있다.

특히 최근에 발달된 디지탈回路의 L I S (Large Scale Integration)化인 경우에는 식 (2.24)의 최소란 chip 面積의 최소를 의미한다.

論理式의 簡單化를 위한 몇가지 중요한 方法을 열거하면 다음과 같다.

1. 定理를 이용하는 方法
2. Karnaugh圖에 의한 方法
3. Veich圖에 의한 方法
4. Quine-McClusky의 方法
5. Harvard의 方法

定理를 이용하는 方法은 이미 前回에서 취급한 바와같이 論理開閉式 자체가 비교적 간단한 경우에는 有效하지만, 일반적으로 매우 곤란하며 얻어진 結果의 最簡單形式 여부를 판단하기 힘이든다.

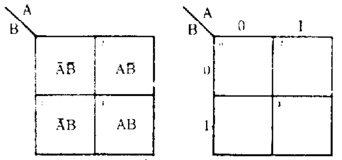
Karnaugh圖에 의한 方法은 變數의 種類가 적은 경우에 이용되는 일반적인 方法이며, 變數의 種類가 많아지면 圖表자체가 복잡해져 적용하기 곤란하게 된다. Karnaugh圖는 Veich圖를 改良한것으로 볼 수 있다.

Quine-McClusky法은 簡單化를 조직적으로 할 수 있기 때문에 計算機로 실행시키는데 적합한 方法이다. 만일 最簡單形式이 여러가지 있을때 Karnaugh圖에서는 모든 最簡單形式을 찾기 어려울 때가 있지만, Quine-McClusky法에는서 모든 最簡單形式을 찾아낼 수 있다. Harvard法 역시 Quine-McClusky法과 같이 기계적인 절차로 간단화를 行할 수 있으므로 계산기로 實行하는데 적합한 方法이다. 여기서는 Karnaugh圖에 의한 方法과 Quine-McClusky法의 두가지 만을 소개한다.

4.3.1 Karnaugh圖에 의한 方法

지금 그 變數 A, B,의 論理函數를 고려한다면 $\bar{A}\bar{B}$ $A\bar{B}, \bar{A}B, AB$의 네가지가 있다. 이들 네종류의 最小項을 그림 4.4와같이 배치하면

다음, 座標(A,B)를 생각한다. 同圖 4.4(b)와 같이,



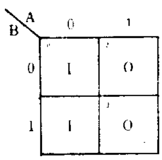
(a) 最小項配置 (b) Karnaugh 図

그림 4.4 Karnaugh圖

(0.0)의 網目에는 $\bar{A}\bar{B}$를, 대응시킨다. 마찬가지로 (0.1), (1.0), (1.1)의 各 網目에는 각각 $\bar{A}B$, $A\bar{B}$, AB를 대응시킨다. 이때 變數 A, B에는 1, 補變數에는 0이 對應된다. 그림 4.4(b)를 Karnaugh圖(以下 K-圖라 칭함)라 한다.

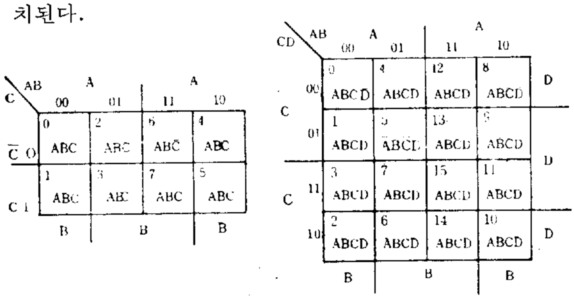
開閉函數를 K-圖로 나타내기 위하여는 다음과 같이 한다. 다음과 같은 開閉式

$$Y=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B \cdots\cdots (4.25)$$



에서 右邊의 두項 $\bar{A}\bar{B}$, $\bar{A}B$에 對應하는 K-圖의 網目에 그림 4.5와같이 "1"을 記入하고 나머지 網目에는 "0"을 記入하여 작성한다. 그림 4.5는 식(4.25)와

그림 4.5 $T=\bar{A}B+\bar{A}B$의 K-圖에 의한 表現이다. 실제로 "0"은 記入하지 않은 경우가 많다. 그림 4.6은 3變數 및 4變數 K-圖이다. 本節에서는 4變數以下의 K-圖에 관하여 簡單化法을 기술한다. K-圖의 作成에서 인접한 網目의 最小項의 Hamming距離(最小項에 대한 符號를 비교한 경우 서로 다른 bit數의 合을 符號間의 距離 혹은 Hamming 距離라하며 특히 距離가 1인 경우 이들 두 符號는 隣接되었다고 함)는 1이 되도록 배치된다.



(a) 3変数K-図 (b) 4変数K-図

그림 4.6 3變數 및 4變數 Karnaugh圖

簡單化절차 :

(i) 주어진 開閉式을 積合標準形으로 전개한다. 이 方法에 만일 익숙해지면 標準形으로 구태어 전개할 필요가 없다.

(ii) K-圖上에 展開된 最小項에 대응되는 網目에 "1"을 기입한다.

(iii) 인접된 "1"을 합친다. 이때 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$……個씩 "1"을 합친 수가 있다. 이때 합칠 수 있는 最大個數의 "1"을 합친다. 2變數의 論理開閉關數에서 $2k$個의 "1"을 합치면 k個의 變數가 소거되어 $(n-k)$個이 變數의 積項이 된다. 이 결과 얻어진 項을 主項(Prime implicant)이라 한다.

(iv) 主項의 論理合을 취하면 구할려는 最簡單式이 된다.

例題 4.5

$Y=A\bar{B}+AB$을 K-圖法으로 간단화하라.

풀이

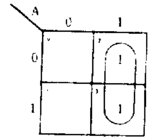


그림 4.7 $Y=\bar{A}+A\bar{B}$의 간단화

K-圖로 주어진 開閉式을 나타내면 그림 4.7과 같다. 인접한 "1"을 합쳐서 實線으로 감싼다. 實線으로 둘러싼 部分의 A座標는 "1"이며, B座標는 0과 1의 양쪽에 속한다. 따라서 $Y=A$

式上으로 $Y=A\bar{B}+AB=A$

例題 6.6

$Y=\bar{A}+A\bar{B}$을 간단화하라.

풀이

우선 積合標準形으로 展開하면

$$Y=\bar{A}+A\bar{B}=\bar{A}(B+\bar{B})+A\bar{B}=\bar{A}B+\bar{A}\bar{B}+A\bar{B} \cdots\cdots (4.26)$$

따라서 K-圖는 그림 4.8과 같다. 인접된 "1"을 합치면 實線과 點線으로 둘러싼 것이된다.

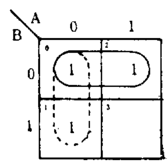


그림 4.8 $Y=\bar{A}+A\bar{B}$의 간단화

實線으로 둘러싼 部分인 B座標는 "0", A座標는 0과 1의 양쪽에 속하므로 $\bar{B}$가 되고 點線部分은 $\bar{A}$가 된다. 그러므로

$$Y=\bar{A}+A\bar{B}=\bar{A}+\bar{B} \cdots\cdots (4.27)$$

例題 4.7

$Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}$을 簡單化하라.

풀이

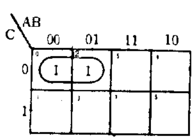


그림 4.9

그림 4.9의 實線部分으로부터 B座標는 0과 1의 양쪽에 속하므로

$$Y=\bar{A}\bar{C} \cdots\cdots (4.28)$$

例題 4.8

$Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B$를 簡單化하라.

풀이

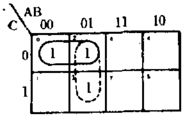


그림 4.10

積合標準形으로 展開하지 않고 Karnaugh圖에 기입한다.

즉 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$는 (0, 0, 0)인 곳에 "1"을 기입한다.

$\bar{A}B$는 C座標에 관계없이 $\bar{A}=0$, $B=1$인 곳에 "1"을 기입한다.

그러므로

$$Y=\bar{A}\bar{C}+\bar{A}B \cdots\cdots (4.29)$$

例題 4.9 $f(A, B, C)=\prod M(3, 6, 7)$을 간단화하라.

풀이 이 문제는 合積標準形의 간단화에 관한 예제이다. K-圖로 나타내면 그림 4.11와 같다.

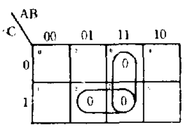


그림 4.11

最大項 M_6는 $A=1$, $B=1$, $C=0$시 0이 되고, M_7는 $A=1$, $B=1$, $C=1$시 0이 되므로 C에 관계없이 M_6 M_7는 $A=1$, $B=1$이면 항상 0이 됨을 알수 있다. 더욱이 單一合$(\bar{A}+\bar{B})$는 $A=1$, $B=1$인 경우 C에 관계없이 항상 0이 된다. 한편 M_3와 M_7는 A에 관계없이 $B=1$, $C=1$인 경우 0이 됨을 알수 있다. 한편 單一合$(\bar{B}+\bar{C})$ 역시 A에 관계없이 $B=C=1$인 경우 항상 0이 된다.

따라서

$$Y(A, B, C)=\prod M(3, 6, 7)$$
$$=(\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}) \cdots\cdots (4.30)$$

代數的으로

$$Y(A, B, C)=\prod M(3, 6, 7)$$
$$=(A+\bar{B}+\bar{C})(A+\bar{B}+C)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$
$$=(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)$$
$$(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$
$$=(A\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C\bar{C})$$
$$=(\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}) \cdots\cdots (4.31)$$

이상의 결과로부터 合積標準後의 簡單化에서는 우선 K-圖上에 最大項에 대응되는 網目에 0을 기입한 후 이들을 合形式으로 포시하되 이때 변수는 補變數를 사용하여, 마치 積合形式에서 1을 얻는 방법과 유사하게 간단화하면 된다. 만일 合積形式에서 積合形式으로 간단화하기 위하여는 K-圖의 빈網目을 1로 한 후 例題 4.1～4.8과 같은 방법으로 간단화한다.

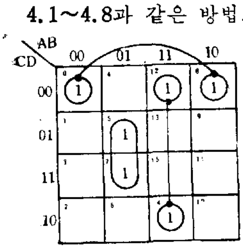


그림 4.12

例題 4.10

$Y(A, B, C, D)=\sum m(0, 8, 12, 14, 5, 7)$을 簡單化하라.

풀이

K-圖를 그리면 그림 4.12과 같다.

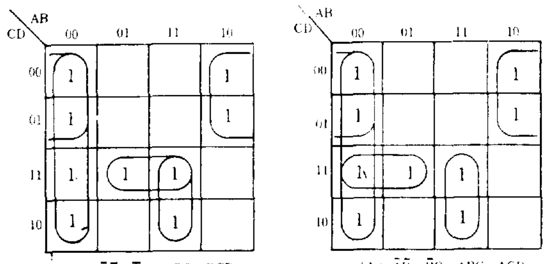
$$Y(A, B, C, D)=\bar{B}\bar{C}\bar{D}+AB\bar{D}$$
$$+\bar{A}BD \cdots\cdots (4.32)$$

例題 4.11

$$Y(A, B, C, D)=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$$
$$+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}BCD+ABCD+ABC\bar{D}$$
$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D$를 簡單化하라.

풀이

K-圖에 기입하면 그림 4.13과 같이된다.



(a) $\bar{A}\bar{B}+\bar{B}C+ABC+BCD$ (b) $\bar{A}\bar{B}+\bar{B}C+ABC+ACD$

그림 4.13

이 경우 簡單形式이 되는 主項의 선정에 두가지 方法(그림 4.11의 $(a)(b)$)이 있으므로

$$Y=\bar{A}\bar{B}+\bar{B}C+ABC+\begin{cases}BCD\\ \bar{A}CD\end{cases} \cdots\cdots (4.33)$$

例題 4.12

論理開閉回路에서 만일 n개의 변수가 있는 경우 可能한 入口組合은 2^n個가 되어 眞値表는 2^n個의 行으로 구성하게 된다. 그러나 실제응용에 있어서 큰 시스템의 一部로 論理開閉장치를 도입설계하는 경우 이 도입된 장치의 出力이 큰 시스템에 영향을 미치지 않은 그러한 入力이 발생하는 장치를 설계하는 경우가 있다. 다시 말하면 出口値가 0 혹은 1이 되던 餘他시스템에 전혀 問題를 이르키지 않은 소위 무관심(don't care)상태를 생각할 수 있다. 이와 유사한 또다른 可能性으로 여러가지 外的拘束條件 때문에 어떤 부류의 入口組合(input combination)은 절대로 이러나지 않은 상태를 들 수 있다. 이러한 상태가 이러났을때 論理裝置의 出口는 不確定(unspecify)하다고 하며 眞値表 혹은 K-圖上에 "X"부호를 한다. 이러한 조건을 무관심(don't-cares)하다고 하며, 무관심성을 내포한 함수를 不完全規定(incompletely specified)되었다고 한다.

무관심조건을 표시한 K-圖上에서의 간단화 "X"를 편리에 따라 "0" 혹은 "1"로 보고 간단화한다.

$$Y(A, B, C, D)=\sum m(0, 7, 8, 10, 12)+$$
$$d(2, 6, 11) \cdots\cdots (4.34)$$

을 간단화하라 但 d는 don't care를 나타낸다.

풀이

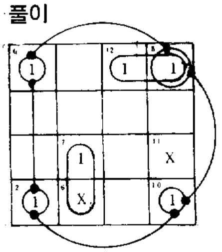


그림 4.14

2 및 6의 X는 m_0, m_{10} 및 m_7에 의하여 각각 간단화하였고, 11의 X는 m_{10}과 함께 고려하여 간단화를 시도할 수 있으나 이미 m_{10}과 2의 X를 고려하였기 때문에 그대로 방치하므로

$$Y(A,B,C,D)=\bar{B}\bar{D}+A\bar{C}\bar{D}+\bar{A}BC \quad \cdots\cdots\cdots(4.35)$$

4.3.2 Quine-McClusky方法

이方法의 簡單化절차는 다음과 같다.

(1) 論理開閉式을 積合標準形으로 전개하며, 展開된 各最小項을 展開項이라한다.

(2) 展開項을 補變數만을 포함하는 group, 補變數가 아닌 變數를 한개 포함하는 group, 補變數가 아닌 變數 2個를 포함하는 group……로 분류한다. 이들 group를 G_0, G_1, G_2, ……라 부르자. 예를들면 4變數의 論理開閉함수인 경우, G_0에 포함된 展開項은 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$인 1個뿐이다. $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$는 G_1에, $\bar{A}BC\bar{D}$는 G_2에 속한다.

(3) G_0 및 G_1 group의 各展開項을 비교하여, 인접한 項이 있으면, 이들項에 ∨記號로 표시하여 다른 狀態의 변수를 제외한 項을 기록한다. 이결과 새로 생긴 項을 第1次壓縮項이라 부른다. G_1과 G_2, G_2와 G_3…의 各 group에 대하여도 동일한 비교를 한다. 일단 ∨印을 한項에 대해서는 새로운 相對項과 비교한다.

예를들면 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$와 $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$를 비교하면 이 두項은 인접되었음으로 B가 제거되어 第1次壓縮型으로서 $\bar{A}\bar{C}\bar{D}$를 얻게된다. 이 사실은 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}=\bar{A}\bar{C}\bar{D}$를 의미한다.

(4) 第1次壓縮項을 (ii)와같이 group로 분규하여 재차 (iii)과 같은 비교로 第2次 壓縮項을 기록한다.

(5) 以下 同一한 操作을 반복하여 그 以上 壓縮項이 나타나지 않을때 까지 계속한다.

(6) 나중에 남은 ∨印이 없는 項을 선정, 이들 項을 主項(prime implicant)이라 부른다.

(7) 主項을 行으로, 展開項을 列로 한 圖表를 작성하며, 이 圖表를 包含圖(第1次包含圖)라 부른다. 이 包含圖에서 主項의 各變數가 展開項속에 존재시, 그 交點에 ○印을 한다.

(8) ○印이 한개만 있는 列이 존재시. 그 交點에 대응되는 行을 必須項이라 하자. 必須項을 선출하여 그 必須項의 行에 ○印을 갖인列은 지운다.

(9) 지워진 列과 必須項을 제외한 새로운 包含圖를 만든다. 이 包含圖를 第2次包含圖라 부른다. 第2次包含圖에서 모든 展開項을 포함할 主項의 組를 선출한다. 이때 變數의 個數와 項의 個數의 合이 最小가 되는 主項의 組를 선정한다.

(10) (8)의 必須項과 (9)의 主項의 論理合이 곧 원하고 最簡單式이 된다.

例題 4.13

$$Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+ABC \quad \cdots\cdots\cdots(4.36)$$

를 Quine-McClusky法으로 簡單化하라.

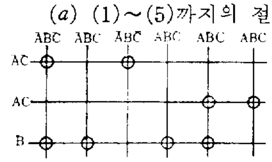
풀이

우선 주어진 論理式의 展開項을 group別로 나누면 G_0, G_1, G_2, G_3가 된다. 展開項과 第1次 및 第2次 壓縮項에는 편의상 번호를 부쳤다.

G_0에 포함된 展開項과 G_1에 포함된 展開項의 비교를 실시한다. 우선 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$와 $\bar{A}\bar{B}C$를 비교하면 C가 소거되어 $\bar{A}\bar{B}$가 되므로 이를 第1次壓縮項의 하나로 기록하고 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 및 $\bar{A}\bar{B}C$에는 ∨印을 부착시킨다.

group	展開項	第1次壓縮項	비교項	第2次壓縮項	비교項
G_0	1 ∨ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	7 ∨ $\bar{A}\bar{B}$	(1.2)	13 $\bar{B}$	(7,11,9,10)
G_1	2 ∨ $\bar{A}\bar{B}C$	8 ∨ $\bar{A}\bar{C}$	(1.3)		
	3 ∨ $\bar{A}B\bar{C}$	9 ∨ $\bar{B}\bar{C}$	(1.4)		
	4 ∨ $A\bar{B}\bar{C}$	10 ∨ $\bar{B}C$	(2.5)		
G_2	5 ∨ $A\bar{B}C$	11 ∨ $A\bar{B}$	(4.5)		
G_3	6 ∨ ABC	12 AC	(5.6)		

(a) (1)~(5)까지의 절차



(b) (6)~(10)까지의 절차

그림 4.15 Quine-McClusky法에 의한 簡單化

以下 동일한 비교를 G_0과 G_1에 대하여 하면 7,8,9인 번호를 부친 세개의 第1次壓縮項을 얻게된다. G_1과 G_2의 비교로 10,11, G_2와 G_3의 비교로 12로 표시된 第1次壓縮項 AC를 얻는다. 第1次壓縮項에 대하여 동일한 비교를 실시하면 第2次壓縮項인 $\bar{B}$를 얻는다. 以上의 절차가 곧 (1)~(5)에 속한다. 여기서 ∨印이 없는 것을 선정하면 $\bar{A}\bar{C}$, AC, $\bar{B}$의 세가지이며, 이 세가지가 主項이다. 다음 主項을 行, 展開項을 列로하고 包含圖를 만들면 그림 4.12(b)와 같다. 여기서 第1行의 主項變數 $\bar{A}\bar{C}$는 第1列의 展開項 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$와, 第3列 $\bar{A}B\bar{C}$ 속에 存在하므로 그 交點에 ○印을 친다. 다른 교점 역시 마찬가지다.

○印이 하나밖에 없는 列을 선정하면 우선 第2列을 들 수 있다.

對應하는 行(第3行)의 主項은 $\bar{B}$이므로 $\bar{B}$가 必須項이다. 마찬가지로 第3列, 第4列, 第6列도 ○印은 하나 뿐이므로 對應하는 行의 主項으로 보아 $\bar{A}\bar{C}$, AC

약시 必須項임을 알수 있다.

따라서 이 예에서 세개의 主項은 전부 必須項이다. 또한 이들 세개의 主項을 선정하면 그림 4.12로부터 모든 展開項은 포함된다는 것을 알수 있다. 이상의 사실로부터 最簡單化은 다음과 같다.

$$Y=\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+AC \quad\cdots\cdots(4.37)$$

例題 4.14

$$Y=C\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}CD+ABCD \quad\cdots\cdots(4.38)$$

를 간단화하라.

풀이

積合標準形으로 전개하면

$$\begin{aligned}Y&=C\bar{D}(A+\bar{A})(B+\bar{B})+A\bar{B}\bar{C}(D+\bar{D})\\&\quad+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}CD+ABCD\\&=ABC\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\\&\quad+A\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}CD\\&\quad+ABCD \quad\cdots\cdots(4.39)\end{aligned}$$

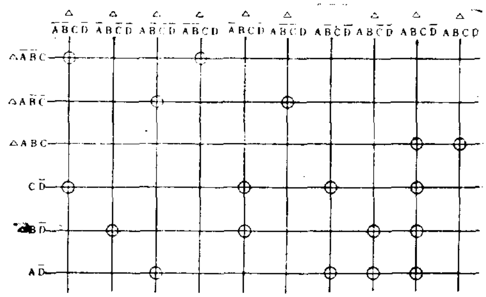
簡單化 절차를 그림 4.13에 표시한다. 同圖 (a)에서 各項에 편의상 번호를 부쳤다. 第1次 및 第2次壓縮項을 구할때 비교하는데 사용한 項을 괄호속에 표시하였다. 비교된 식은 한組만이 아니라 경우에 따라서는 여러조가 있으나 괄호속에는 한조만을 기입하였다.

동도(a)에서 ∨印이 없는項(主項)을 선출하면 6개 있다. 包含圖는 (b)와같다. ○印이 하나만있는 列은 第2列, 第4列, 第6列, 第10列이다. 對應行에 $\bar{A}\bar{B}C$, $A\bar{B}\bar{C}$, ABC, $B\bar{C}$의 네개의 必須項(△印)이 있음을 알수 있다. 이들 네개의 必須項을 선정하면, 必須項과의 交點에 ○印이 있는 展開項은 9개(△印이 있는것)임을

1 ∨ $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	11 $\bar{A}\bar{B}C$ (1,4)	23 $C\bar{D}$ (12,20)
2 ∨ $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	12 ∨ $\bar{A}C\bar{D}$ (1,5)	24 $B\bar{D}$ (14,21)
3 ∨ $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	13 ∨ $\bar{B}C\bar{D}$ (1,7)	25 $A\bar{D}$ (17,21)
4 ∨ $\bar{A}\bar{B}CD$	14 ∨ $\bar{A}B\bar{D}$ (2,5)	
5 ∨ $\bar{A}BC\bar{D}$	15 ∨ $B\bar{C}\bar{D}$ (2,8)	
6 ∨ $A\bar{B}\bar{C}D$	16 $A\bar{B}\bar{C}$ (3.6)	
7 ∨ $A\bar{B}C\bar{D}$	17 ∨ $A\bar{B}\bar{D}$ (3,7)	
8 ∨ $AB\bar{C}\bar{D}$	18 ∨ $A\bar{C}\bar{D}$ (3.8)	
9 ∨ $ABC\bar{D}$	19 ∨ $BC\bar{D}$ (5,9)	
10 ∨ $ABCD$	20 ∨ $AC\bar{D}$ (7,9)	
	21 ∨ $AB\bar{D}$ (8,9)	
	22 ABC (9,10)	

알 수 있다. $A\bar{B}C\bar{D}$만 必須項에서 제외되었다. $A\bar{B}CD$를 포함하기 위하여는 主項 $C\bar{D}$ 혹은 $A\bar{D}$중 어느 하나

(a) 主項을 구하는 절차



(b) 包含図

그림 4.16 Quine-McClusky法에 의한 簡單化

를 선택하면 된다. 따라서 원하는 最簡單形式은 다음과 같은 두가지 形式이 된다.

$$\begin{aligned}Y&=\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+ABC+B\bar{D}\\&=\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+ABC+C\bar{D}\\&=\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+ABC+A\bar{D}\end{aligned} \quad (4.40)$$

例題 4.15

$Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D+AB\bar{C}D+\bar{A}BCD+ABCD+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+ABC\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}$를 간단화하라.

풀이

간단화를 위한 절차를 그림 4.17에 표시한다. (b)圖의 第1次包含圖에서 ○印이 하나밖에 없는 列은 第6列과 第7列이다. 對應하는 主項은 BD이며, 이것이 必須項이다.

다음 必須項과, 必須項의 交點에 ○印이 있는 展開項을 제외한 第2次包含圖를 만들면 同圖(c)와 같게 된다. 同圖(c)에서 主項을 각각 $a_1, a_2, \cdots, a_6$라 한다. 展開項의 論理合 G는

$$G=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}+ABC\bar{D} \quad\cdots\cdots(4.41)$$

展開項, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$를 포함하기 위하여는 主項으로 a_1+a_2(a_1혹은 a_2)를 선택할 필요가 있다. 한편 $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$를 포함하기 위하여는 a_1+a_3를 선택할 필요가 있다.

그러므로 展開項, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 및 $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$를 포함하기 위하여는 主項으로서 a_1+a_2 또한 $a+a_3$를 선택할 필요가 있다. 이러한 사실은 集合記號로$(a_1+a_2)(a_1+a_3)$와 같이 표시할 수 있다.

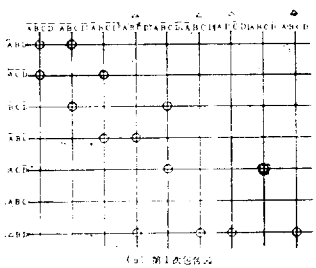
이와같이 생각하면 G는 그림 4.17(c)에 의하여 다음과 같이 된다

$$\begin{aligned}G&=(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_4)(a_3+a_5)(a_5+a_6)\\&=a_1a_2a_5+a_1a_4a_5+a_2a_3a_5+a_2a_3a_6+a_1a_2a_3a_6\\&\quad+a_1a_3a_4a_6+a_2a_3a_4a_5+a_2a_3a_4a_6 \quad\cdots\cdots(4.42)\end{aligned}$$

따라서 論理開閉式G의 最簡單形式에는 a_1aa_5, $a_1a_4a_5$, $a_2a_3a_5$, $a_2a_3a_6$의 네가지가 있으며, 식 (4.42)에서 第5項以下는 最簡單形式이 아니다. 主項 BD는 이미 必

∨ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{D}$
∨ $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}\bar{C}\bar{D}$
∨ $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
∨ $\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}B\bar{C}$
∨ $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	∨ $\bar{A}BD$
∨ $\bar{A}BCD$	∨ $B\bar{C}D$
∨ $AB\bar{C}D$	$AC\bar{D}$
∨ $ABC\bar{D}$	∨ BCD
∨ $ABCD$	∨ ABD
	ABC

(*a*) 主項을 구하는 절차



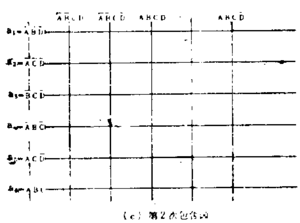


그림 4.17

須項으로 상택되었음으로, 주어진 論理式의 最簡單式에는 다음 네가지가 있다.

$$Y(A,B,C,D)=\begin{cases} BD+\bar{A}\bar{B}\bar{D}+\bar{A}\bar{C}\bar{D}+AC\bar{D} \\ BD+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+AC\bar{D} \\ BD+\bar{A}\bar{C}\bar{D}+\bar{B}C\bar{D}+AC\bar{D} \\ B\bar{D}+\bar{A}\bar{C}\bar{D}+\bar{B}C\bar{D}+ABC \end{cases}$$

현재 시중에서 구할 수 있는 *IC*回路의 實例를 들면 그림 4.18과 같다. 名稱은 대표적인 *TI*(Texas Instrument)社製品名이다.

[Quiz 3]

1. *K*-圖를 이용하여 다음과 같은 함수들의 積合形式으로 간단화하라.
   (*a*) $Y(A,B,C,D)=\sum m(3,4,5,7,11,12,14,15)$
   (*b*) $Y(A,B,C,D)=\Pi M(3,5,7,11,13,15)$
   (*c*) $Y(A,B,C,D)=\sum m(1,3,5,8,9,11,15)+d(2,13)$
2. $Y=ABC+\bar{B}CD+ACD+AB\bar{C}D$을 最小項積合標準形式으로 변형하라.
3. 3—bit의 2進數 두개 $A=A_2A_1A_0$ 및 $B=B_2B_1B_0$을 수신하는 장치가 있다. $A>B$인 때는 언제든지 出力이 나올 수 있는 積合形式回路를 설계하고 간단화하라.

[Quiz 2의 풀이]

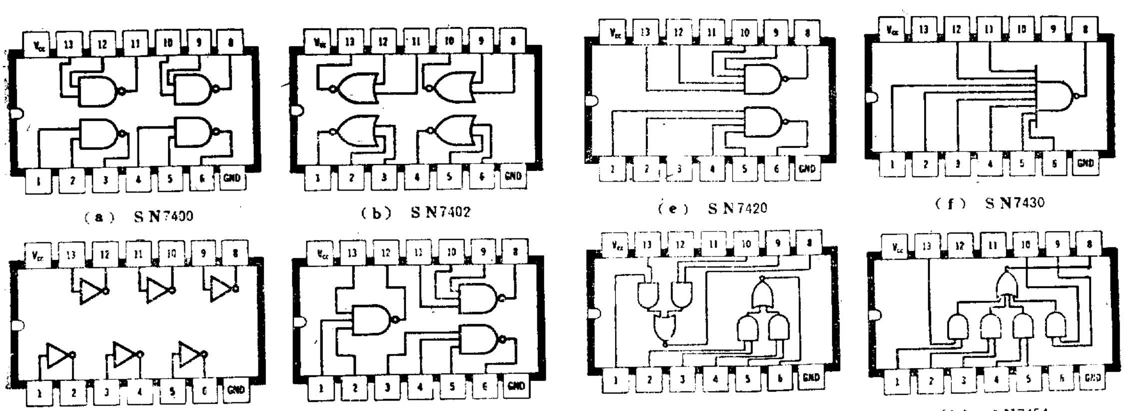
(1) 01010110

(*a*) 2進符號인 경우

$2^6+2^4+2^2+2=64+16+4+2=86$

(*b*) 2進化10進符號인 경우

$\underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{0110}_{6}$　∴ 56



(a) SN7400　(b) SN7402　(e) SN7420　(f) SN7430

(c) SN7404　(d) SN7410　(g) SN7451　(h) SN7454

그림 4-18 回路素子의 실례