韓國數學教育學會誌〈數學教育〉
1975. 6. Vol. XIII No.3

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1975. Vol. XIII No.3

ICMI 에서 論議된 數學教育

釜山大學校 師範大學 李 忠 杰

지난 74年 11月 5日부터 9日까지 5日間 東京에서 開催되었던 ICMI(國際數學教育 會議)에 參席하고 돌아온 單 한名의 우리나라 사람으로서 有益한 이야기가 못될지 모르지만 어떤 義務感을 가지고 이야기 하겠다.

다 아는 일이겠지마는 順序로서 ICMI에 對하여 먼저 말씀 드릴까 한다. 數學教育現代化全書(金子書房) 第一卷에는 「1958年 英國의 Edinburgh에서 開催된 ICM(國際數學者會議)의 ICMI(ICM의 下部機關)에서 世界各國의 一流 數學者들이 그들의 이름으로 數學教育의 現代化를 提唱했다. 그 후 4年마다 Sweden, Soviet, Canada 等에서 開催되고 各國의 指導的 數學者. 數學教育者들의 國際的 交流를 通하여 數學教育의 現代化는 世界的 規模로 擴大되고 强力히 推進되어가고 있었다.」라고 記述되어 있다. 이번 東京에서의 會議도 이 一環으로서 環太平洋地區會議였던 것이다. 數學教育의 現代化가 오늘의 程度에까지 進涉된 것은 OEEC의 下部機關인 OSTP와 美國의 UICSM, SMSG 등의 影響이 컸었지만 世界的인 機構로서 ICMI의 功績도 큰 것이다.

JSME의 主管으로 開催된 이번 東京會議에는 14個국에서 150名(主催國 : 100名, 紹請國 : 50名)이 參席하여 本會議와 5個의 分科會議로 나뉘어져서 進行되었다. 本會議는 M.H. Ston, A. G. Howson, S.L. Sobolev, B.H. Neumann, G.H. Steiner 等 主界的인 學者의 講演이 8座 있었으며 分科會議는 初等教育의 數學, 中學教育의 數學, 教師教育의 數學, 再教育의 數學, 特殊教育의 數學의 5分科였으며 本人은 第3分科에 들어갔는데 9個의 發表와 그에 대한 討論이 있었다. 아마 計劃대로 되었으면 各分科 마다 8~9個의 發表와 그에 대한 討論이 있었을 것이다. 始終一貫 誠實한 分圍氣로서 進取性이 充滿해 있었다. 每日 午後 5~6時까지 會議가 繼續되었다는 것은 이 會議가 얼마나 有益했는가를 의미할 것이다.

本人에서 허용된 紙面을 有用하게 쓰기 위하여 本人은 아래에서 英國의 Howson이 講演한 "Some Experience of Curriculum Development in England"의 一部와 西獨의 Steiner가 講演한 "Modern Elementury algebra as a Significant Component in a Contemporary Secondary School mathematics Curriculum"의 一部를 紹介하려 한다. 前者는 數育教程 作成에서 成功한 體驗의 이야기이며 後者는 中等數學 課程에서, 現代 代數學의 重要性에 對한 이야기이다. 이 밖에도 Sobolev이 Olympiad에 關한 이야기, Neumann의 "Teaching Teachers of Teachers" 그리고 Malaysia 文教長官의 "數學教育의 現代化" 等 有益한 講演이 많았지마는 不得己 省略한다.

Howson은 數學者 數學教育者들의 努力은 어데서든지 共通的인 教育課程의 發達을 가져오자는 데에 基本的인 것이 있다고 믿고 各國에서 擇하고 있는 教育方法은 이런 運動과 나아가서 世界의 利益을 위한 데서 오는 結果라고 前提하면서 英國에서의 그들의 業績도 意義있는 것으로 생각하고 時間의 制限 때문에 그는 II Level (Secondary)의 課程發達에 對해서만 이야기 하기로 限界를 두었다.

「어떤 教育過程이든지 作成 時에 無視해서는 안될 4가지 要素가 있다고 본다. 社會의 本質 · 學生의 本性 · 教師의 資質 · 數學의 本質 이것이다」라고 말하고 10年前 까지의 英國 II Level에 對한 數學教育을 다음과 같은 의미로 說明했다. 그것은 세가지 形態인데 Grammer school, Technical school 그리고 Modern school로서 나누

어지고 이들에서 가르치는 數學은 서로의 關聯性이 없었다. Grammer에서는 高等普通敎育의 實現性을 强調한 數學內容인데 지금까지 남아있는 Euclid-type의 幾何와 그리고 學生에게 興味없는 論證的 代數였던 것이다. 이런 式의 敎育에서 三角法과 解析學을 가르쳐 數學과 科學이 連結性을 가지게 되었다. 그리고 Technical school에서는 數學을 道具化했으며 Euclid 平面幾何, 測量, 求積等을 가르쳤고, Modern school에서는 算數 程度의 數學을 가르쳤다. 이 때에 敎育에 對한 社會의 關心과 여러가지 다른 變化가 왔다. 이 變化의 影響으로 數學 뿐만 아니라 다른 科目에도 새로운 敎育課程 作成을 考慮해야 함을 敎師들이 느끼게 되었다. 여기에서 새로운 數學을 가르쳐야 될 不可避한 事情을 前提하고 이에 對하여 「보다 效果있는 數學內容은 數學이 어느 程度 社會에 必要하느냐, 社會에서 數學者를 어떻게 보느냐를 念頭에 두고 만들어진 것이라야 한다」라고 强調했다.

그는 敎育課程 作成者들이 꼭 마음 속에 간직해 두어야 할 事實이라면서 다음을 指摘했다.
計劃의 構成員들이 아무리 똑똑하더라도 새로운 課程이 아무리 조심스레 作成되었다 해도 여러가지 敎育施設이 開發되었다 하더라도 그 짜여진 現實의 計劃이 繼續되어 지는가, 或은 失敗하는 가는 現場敎師들이 어느 程度 習得 理解하고 어느 程度 融通性 있게 잘 구사해 나갈 수 있느냐에 달려 있다. 敎科課程의 發達에 있어서의 最高의 要求는 敎師들의 職業的인 完全에 對해 尊敬과 奬勵가 있어야 하며 敎師의 創意性에 對해 매혹을 주고, 자극을 주고, 도전을 주고, 報答을 주어야 하겠으며 弱者에게는 기운을 주고, 도와 주어야 하며, 그리고 그들의 뚜렷한 目標와 課業을 決定지울 수 있도록 해야 한다.

그는 이어서 敎育課程發達에 對한 活動의 이야기로 넘어갔다. 만일 「數學이란 學習科目을 無視하는 敎師가 있다고 하면 거기에는 學生에게 數學의 本質을 숨기게 될 危險性이 따르게 되며 反對로 數學의 形式과 公理的인 表現에 置重하는 敎師가 있다고 하면 거기에는 學生에게 數學의 本質을 變質시켜 놓을 우려性이 따르게 된다」는 생각에서 敎育課程은 이 사이에서 發達되어야 한다고 主張하여 SMP를 例로 들어 說明했다. 4名의 敎師가 1961年부터 시작하여 自由로히 슬기롭게 活動하여 成功한 例인데 社會의 認識이나 資金의 出處나 文敎面에서의 政府組織이 우리와 다르기 때문에 그의 形式面은 우리에게 參考될 것이 別로 없은 것 같으며 그의 精神面에서 萬難을 무릅쓰고 硏究를 持續하였다는 일, 서로 마음을 털어놓고 도울 수 있었다는 일들은 本人에 反省의 機會를 주었던 것이다. 特히 그들은 1962年부터 實施한 여러 차례의 課程實施, 實習을 가지므로 敎師와 敎科書 執筆者가 對面하여 그들의 目的과 또 어떻게 해 나가야 할 것인가에 對해서 討議할 수 있었으며 이런 實習은 數學的 定義보다 現場 授業에 對하여 더욱 重點을 두었으며 따라서 이 團體에서 만들어 낸 敎科書는 한 個人이 作成한 式의 單一化樣式이 아니라 執筆部에서 만든 것으로 되었다——이어 그는 이 SMP 敎科書의 內容에 對해서 또 그에 對한 外部에서의 批判에 對해서 言及했지마는 本人은 아직 그 敎科書를 본 일이 없어 여기서 말하는 것을 삼가겠다——그는 外部로부터 多少 批判의 對象이 될 수 있었던 그들의 敎科書에 對해서 「나는 그러한 作業을 學級에 導入하려고 試圖하는 것에는 조금도 問題點이 없는 것처럼 보인다. 나는 어떤 것이든 비록 數學的으로 되고 論理的이고 그리고 明白하게 說明된 것이라고 해서 어린이들이 잘 따를 것이라고 믿는 것은 잘못된 것으로 본다. 學生의 發達段階와 數學에 부여된 固有한 어려움을 關係지워서 考慮해야한다. 만일 內容이 現代的인 것(集合, 等)이라해서 大學數學의 弱한 部分이니 느린 速度로(大學式으로) 가르치면 된다고 생각해서는 안 된다」

그의 이야기는 이 새로운 數學槪念의 下向전파, 普及問題로 넘어갔다가 이 SMP의 成功한 結果에 言及되었다. 이 SMP의 成功을 中間段階에서 大學敎授의 理解를 얻게 되고 도움을 받게 된데서 決定되었다고 說明하고 70年 前의 英國의 數學은 完全히 改革되었다고 보는 것이다. 1870年 젊은 敎師들로서 敎學協會를 設立할 첫 段階를 만든 Rawdon Levetl은 다음 4가지를 거기에 要望해 본다.

(1) 모든 教師는 知的이며 熱誠的이며 自主的이어야 한다는 것은 바람직한 것이다.

(2) 훌륭한 先生이란 報酬와 評判이 좋아야 한다. 그리고 나쁜 先生은 다른 職業을 찾도록 권하여야 한다.

(3) 좋은 先生은 그가 하고자하는 것을 하도록 하여야 한다.

(4) 試驗委員은 大端히 嚴格하여야 한다.

教育課程 改革에서 教師의 役割이 中心이 되었다는 것을 明白히 認定한다고 하고 Howson 은 끝맺었다.

다음 Steiner 의 講演에 對한 이야기를 하겠다.

Steiner 는 序頭에서 現代代數學의 體系에 對하여 說明하고 이어서 數學教育의 改革의 이야기에 들어갔다. F. Kllin 의 Erlange Program 에서 1900 年代부터 群의 役割을 中等學校에서 가르쳤으며 Vector 代數도 世界第 2 次大戰前의 中等學校 數學指針에 나타나 있었는데 이 運動이 戰後에 再開되었다고 그는 보고——20 世紀 初頭의 數學教育 改良運動과 現在 이루어지고 있는 現代化運動을 繼續的인 것으로 생각하고 있는 것 같다 ——그것은 여러나라의 實驗과 暗示에 依하여 擴張되었는데 OECD 가 後援해서 發刊한 "學校數學에서의 새로운 思考"—1959. "中等學校에서 數學의 現代教授에 對한 概要"—1960. "오늘날의 數學"—1963 에 依하여 처음으로 國際的 基盤 위에 서게 되었다고 說明했다.

그는 그 時期 以後의 教育課程 發達을 이야기하고 그리고 더 詳細히 代數를 가르치기 위하여 또 現在의 傾向을 說明하기 爲하여 다음과 같이 分類하고

A : 演算 演算體系

B : 集合의 代數, 束, bynurly algebra

C : 關係와 函數의 代數

D : 群, 環, 體, morphisms

E : Vector 空間, 線形射象

F : 數體系의 構成

G : 代數의 應用

H : Teaching approaches, material, 教師의 背景.

이것이 現 傾向을 설명하거나 現代初等代數에 꼭 알맞을 領域의 說明이라고 하였다.

本人은 여기서 이 全 領域에 걸쳐진 內容을 모두 이야기할 여유가 없기에 B 領域만 紹介하기로 한다.

初等學校에서는 이미 集合의 演算을 소개하고 있고 算數의 基本面에 對해서도 集合論的 基礎를 주고 있었다. 많은 授業에서 集合이 直接 使用되지 않았어도 學生들은 集合演算의 法測과 定理에 對하여 많은 强調를 받아왔다. 그리고 中學校에서 集合演算을 다시 學習한다. 將來 學習에서는 集合的 代數는 얼마 使用되지 않을 것이다. 그러나 여러 경우에 初等 및 中等學校 水準에서 適當한 集合的 代數의 演算을 만들어 使用할 수 있는 可能性은 많다. 確率과 같은 測度概念의 소개에 덧붙여서 또는 數論에서 自然스럽게 集合的 代數를 使用할 수 있을 것이다. 이런 點에서 集合의 基本思想이 學校教科書에 스며들고 있다.

$|$ 을 N 에서 除數關係라 하고 D(x), M(x)를 各各 除數의 集合, $x \in$N 의 倍數의 集合이라 하자. 그러면

$$\mathrm{D}(x) \subseteq \mathrm{D}(y) \Longleftrightarrow x|y \Longleftrightarrow \mathrm{M}(x) \supseteq \mathrm{M}(y)$$

만약 $\mathcal{D} = \{\mathrm{D}(x)\}$, $m = \{\mathrm{M}(x)\}$ 이면 사상

$$\mathrm{D} : x \longrightarrow \mathrm{D}(x) \text{와 } \mathrm{M} : x \longrightarrow \mathrm{M}(x)$$

는 다음과 같은 性質을 갖는다.

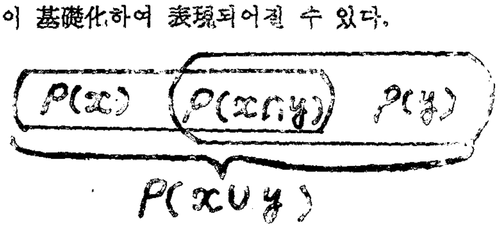
$$\mathrm{D} : (\mathrm{N}, \cap, |) \xrightarrow{\text{onto}} (\mathcal{D}, \subset, \subseteq) : \text{同型}$$

$$\mathrm{M} : (\mathrm{N}, \cup, |) \xrightarrow{\text{onto}} (m, \cup, \supseteq) : \text{同型}$$

이고, P(x)를 x 의 모든 primary divisor(素數의 累乘의 除數), P 를 $x \in$N 인 모든 P(x)의 集合이라고 하자 그러면 사상

$$P : x \longrightarrow P(x)$$

는$(N, \cap, \cup, |) \xrightarrow{\text{onto}} (P, \cap, \cup, \subseteq)$는 同型이다. 이것과 또 다른 여러가지 關係들은 다음 그림과 같이 基礎化하여 表現되어질 수 있다.



n 개의 元素를 가진 有限集合 A 의 P 集合 pow A 는 $\cap$와 $\cup$에 關해 束을 이룬다. 그것은 자주 $+$와 $\cdot$ 로 表示되어지는 $\triangle$(對稱差, 또는 Boole 의 合)에 關해 Boole 環을 이루고 體系(pow A, $\cap$,

$\cup, \triangle$)와 ($\{0,1\}^n \downarrow, \uparrow, +_2$) 사이에는 natural isomorphy가 存在한다. 여기서 $\{0.1\}^n$는 $\{0,1\}$로부터 構成要素의 모든 n-tuples(n個인 形)의 集合, $\downarrow$와 $\uparrow$는 構成要素式으로 各各 最小, 最大를, $+_2$는 構成要素式인 더하기 modulo 2이다. 集合 $\{0,1\}^n$은 n次元 立方體로서 생각할 수 있고, $+_2$는 이 立方體의 affine 變換으로 생각할 수 있다. modulo 2에 관한 것은 $\{0,1\}$와 scalar를 곱하는 것으로 설명할 수 있다. 體系 ($\{0.1\}^n, +_2$)는 두 個의 元素를 가진 體 F_2 위의 n次元 Vector 空間이다.

스위치 回路에 의해 ($\{0,1\}^n \downarrow, \uparrow$)의 說明과 그것들의 結合은 中等學校 數學에서 人氣있는 位置에 達해 있다. 그러나 二項數學構造의 應用은 思考의 暗示에서 始作되고 있다. 바로 野心的인 應用의 하나가 暗號論(Coding theory)이다.

여기서 簡單한 例를 들자.

n bits의 한 block code는 words과 불리는 $\{0,1\}^n$의 2^n n-tuples를 사용하여 만들고 있다. 이들 중 몇 개는 메세지를 coding하는데 "code words"로 사용되고, 다른 것은 메세지의 傳達過程에서 일어날지도 모르는 過誤의 發見이나 修正을 爲하여 "test-code"로서 使用되어진다. words 사이의 距離의 自然的 概念은 Hamming distance인데 그 속에서 words은 서로 다른 digit의 數로써 定해진다. 즉 各 word는 words의 $+_2$合內의 하나의 數이다. 簡單한 定理를 보이면

a) 한 code는 最大限 k개의 digits에서 過誤를 發見한다. $\Longleftrightarrow$ code words 사이의 距離는 最小限 $k+1$이다.

b) 한 code는 最大限 k個의 digits에서 過誤를 修正할 수 있다. $\Longleftrightarrow$ code words 사이의 距離는 最小한 $2k+1$이다.

만약 우리가 모든 words의 Vector 空間의 部分 Vector 空間을 이루는 code words의 集合을 使用하면 이 定理들의 應用은 아주 簡單해진다. 그런 code를 線形 code라 부른다. 우리는 code words 사이의 거리는 모두 알아야만 한다. 두 code words 사이의 모든 合은 하나의 code word이기 때문에 만약 code가 線形이면 거리를 나타내는 數는 m이다. —— m code words 사이의 거리는 m거리이므로.

모든 n-tuples의 Vector 空間 $\{0,1\}^n$의 應用의 다른 領域은 graph 論이다. graph 論 自體는 많은 基本的인 應用이 있고, 學校敎科課程에서 統合의 可能性도 생각되어 졌었다. graph 論에서는 graph의 첨단의 集合의 P集合을 생각할 수 있고 그것은 $\{0,1\}^n$의 n-tuples 위의 Vector 空間에 의하여 表示되어질 수 있다. 이 Vector 空間의 部分空間은 線形代數에 應用되어질 수 있다는 것으로부터 graph의 理論的 뜻과 basis, 双對等 概念들을 갖는다.

〔page 6에서 계속〕

$x \geqq 0$에 對하여 $f(x)$와 같다는 것을 意味한다.

結局 $\mathrm{T}[f](x) = \mathrm{T}[f](x) - \mathrm{T}[f](0) = \int_0^x f(t)\,dt$

임이 證明되었다.

References

1. D.S.Mitrinovic, Analytic inequalities, Springer Verlag, 1970
2. George F.Simmons, Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill, 1963.

〔page 5에서 계속〕

각한다는 것은 一般角의 三角函數의 概念을 理解시키는데 장애가 될 뿐이다.

나아가서 三角函數라는 用語自體도 圓函數로 바꾸는 것이 合理的인 表現이라 생각한다.

References

1. 金道相, 數學敎育에 있어서의 새로운 思想, 한국수학교학회지, 1965.
2. 横地清, 科學化를 爲한 數學敎育, 誠文堂, 1964.