〈特別寄稿〉

二原子氣體群의 減衰振動에 關한 研究

金 壽 善 교수
建國大學校 文理科大學

A study on damped oscillation of diatomic molecular gas.

Soo Sun Kim
College of Liberal arts and sciences,
Kon-Kuk University.

SUMMARY

An expression for the vibrational frequency of diatomic molecular is obtained by using molecular gas temperature T and molecular gas mean-free path λ. And when $\frac{\lambda}{T} \rightarrow 2.59$, because of the damped vibration, a diatomic molecular gas is Impeded about transportation.

If transfortation is not attained with this condition, rectilinear motion of a diatomic molecular gas can't maintain for the equilibrium state.

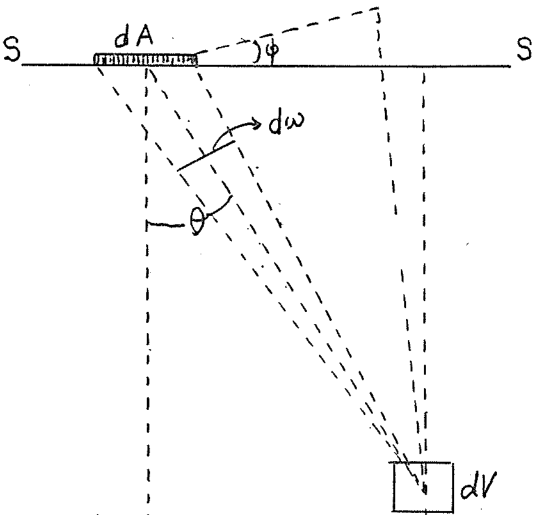
1. 序 論

무한이 많은 數의 分子氣體가 어떤 有限한 體積으로 나눈 細胞속에 同一數의 分子氣體들이 들어 있는데, 이들의 速度는 모든 方向에서 같은 확률로 나타난다. 이들 群들 自身의 相互間의 충돌, 平滑벽을 충돌하는데 完全히 탄성적이어서 절선속도에는 變化가 없다[1]. 이와같은 分子氣體群이 位相空間의 어떤 가상면을 위 또는 아래로 수송이 되어 平均自由行路의 $\frac{2}{3}$ 높이에서 마지막 충돌을 하였다. 이들 氣體群에 重力(중력)이 作用하는 곳에서 수송운동이 일어났다. 이때 수송 시의 운동을 할 때 振動의 減衰가 일어날 것이다. 이들 氣體群의 內部 에너지와 氣體의 粘性 및 熱傳導度에 依하여 충돌한 이후라도 중력장에서는 微少振動으로 微少振動係數가 發生한다. 減衰力의 原因은 氣體의 粘性減衰, 相互間의 마찰, 分子氣體群의 運動, 또는 位置에너지와 溫度때문에 氣體群이 運動할 때 減衰振動이 일어날 것이다[2]. 이런 氣體群의 振動 結果는 Perrin, Svedbery의 이론에 따르면 溫度 T는 粘性係數 η에 역비례하여 η가 溫度 상승에 따라 감소되니, 순수한 溫度 효과가 η의 감소와 상쇄되어 溫度 효과는 크지 않다고 하였고, 熱傳導度의 作用이나, 分子氣體의 저항이 전기적 감쇄 때문에 減衰振動이 일어나며, 分子氣體群系가 어떤 좌표축에 관련된 位置 에너지로 微少角을 가진 계가 一定溫度 하에 있도록 하는 熱俗과의 접촉으로 減衰振動이 일어난다고 하였다[3] 그러면 이들 氣體群이 有限體積內의 어떤 가상면을 넘어가기 직전에 충돌한 場所의 平均 높이에서 微少角으로 微少振動할때 溫度 T와 氣體群들의 自由行路 λ와의 關係, 및 氣體群의 振動 영역을 고찰하여 gas 熱工業 분야에 다소나마 도

움을 주고자 하는데 硏究의 目的이 있다.

3. SS面을 넘어간 氣體分子의 總數

(그림 1)에서 dV는 면 SS上에 있는 面積素 dA로부터 r의 거리에 있고, dA의 법선과 각 θ를 이루는 方向에 있는 작은 體積素이다. 그리고 Z를 어떤 1個 分子氣體의 충돌 빈도, n를 단위 體積 안에 있는 分子數라고 하면, dV에 들어



(그림 1) (dV를 떠나 충돌하지 않고 dA를 넘어간 気体分子群)

있는 총분자수는 ndV, dt 시간에 일어나는 총 충돌수는 $\frac{1}{2}ZndVdt$.

dt 時間 dV에 생긴 자유행로의 총수는 $ZndVdt$, 이들의 자유行路는 모든 方向에 균등하게 출발하니, dV를 향한 總數는

$$\frac{d\omega}{4\pi}ZndVdt \quad \cdots\cdots(1)$$

$d\omega$…면적 dA, dV에 對한 立體角

$dA\cos\theta/r^2$이다.

붕괴식 $N=N_0\exp(-r/\lambda)$을 使用하여, 충돌하지 않고 dA에 도착하는 分子數는

$$\frac{d\omega}{4\pi}ZndVdt\exp(-r/\lambda) \quad \cdots\cdots(2)$$

λ…自由行路

N…충돌하지 않은 氣體分子數

N_0…어떤 순간의 氣體分子數

$\left\{\begin{array}{l} dV=r^2\sin\theta d\theta d\phi dr \\ d\omega=dA\cos\theta/r^2 \end{array}\right\}$ 임으로(2)에代入

$$\frac{1}{4\pi}ZndAdt\sin\theta\cos\theta\exp(-r/\lambda)d\theta d\phi dr \quad \cdots\cdots(3)$$

모든 方向과 거리에서 dt 시간에 dA를 넘어간 總數는

$$\frac{1}{4\pi}ZndAdt\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\infty}\exp(-r/\lambda)dr=\frac{1}{4}Zn\lambda dAdt \quad \cdots\cdots(4)$$

單位時間內의 충돌빈도 Z는

$Z=\sigma n\bar{v}$, σ…충돌면적 $\bar{v}$…平均速度

충돌 할 때 平均거리는 시간 t 사이에 지나간 전거리를 Z로 나눈 값과 같으니

$$\left.\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{\bar{v}t}{\sigma n\bar{v}t}=\dfrac{1}{\sigma n} \\ \quad \text{그러므로} \\ Z=\bar{v}/\lambda \end{array}\right\} \text{을(4)에 代入하면}$$

단위면적, 단위시간에 SS 면을 넘어간 기체분자 총수는

$$\frac{1}{4}n\bar{v} \quad \cdots\cdots(5)$$

3. 가상면을 넘어가 기직전에 충돌한 평균 높이 $\bar{Y}$

(그림 1)에서 SS面 윗쪽에 있는 體積素의 높이는 $r\cos\theta$, dV에서 dA로 넘어간 分子기체의 數는 (3)이니, 높이 $r\cos\theta$에 dV에서 넘어간 수를 곱하여 θ, ϕ, r에 對하여 積分하고 dA로 넘어간 총수로 나누면 평균 높이 y를 求할 수 있다.

$$\frac{1}{4\pi}ZndAdt\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\infty}r\exp(-r/\lambda)dr=\frac{1}{6}Zn\lambda^2dAdt \quad \cdots\cdots(6)$$

$y=\dfrac{(6)}{(4)}$이니

$$y=\frac{\frac{1}{6}Zn\lambda^2dAdt}{\frac{1}{4}Zn\lambda dAdt}$$

$$=\frac{2}{3}\lambda \quad \cdots\cdots(7)$$

그러므로 平均的으로 볼때, 그 面을 넘어간 각 분자는 넘어가기 직전에 면위(아래) 平均 自

由行路의 $\frac{2}{3}$의 높이에서 마지막 충돌을 하였다.

4. 기체의 粘性係數에 對한 熱傳導度와의 比

二原子氣體群이 충돌할 때는 粘性과 熱傳導에 영향을 미치며 이들의 振動에도 영향이온다.

粘性係數 η는

$$\eta=\frac{1}{3}nm\bar{v}\lambda,^{5)} \quad (m\cdots\text{分子氣體의 質量})$$

$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sigma n}$ 을 η에 代入하면

$\eta=\frac{1}{3}\frac{m\bar{v}}{\sqrt{2}\sigma}$을 얻는다.

熱傳導度 K는

$$K=\frac{1}{6}\ \frac{\bar{v}fk}{\sqrt{2}\sigma}$$

그러므로

$$\frac{K}{\eta}=\frac{fk}{2m}\left(\begin{array}{l} C_v=\frac{f}{2}R,\quad k=\frac{R}{N_0},\quad m=\frac{M}{N^\circ} \\ N_0\cdots\cdots\text{avogadro數}\ \ M\cdots\text{質量}\end{array}\right)$$

$$=\frac{7}{2}\ \frac{R}{M}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

5. 二原子기체分子의 內部에너지

$U=\frac{2}{3}NkT=\frac{2}{3}nRT$

$u=\frac{U}{n}=\frac{3}{2}RT$

$u=\frac{3}{2}RMT\cdots\cdots\cdots(9)$

U………內部에너지

n……mole數

k……Boltzmann常數

T…온도

u…단위mole에 對한 內部에너지

6. 에너지 解法으로 본 기체分子群의 微小振動

平均 높이 $\bar{y}$에 있는 氣體分子群의 중력을 고려한 振動을 고찰하기 위하여 다음과 같이 푼다

분자 기체군의 운동에너지 $E_k=\frac{u\varphi^2\bar{y}^2}{2g}\cdots(10)$

분자 기체군의 위치에너지 $E_p=\frac{u\varphi^2\bar{y}}{2}\cdots(11)$

(10)과 (11)에 (7), (9)을 代入하여 정리하면

$$E_k=\frac{MRT\lambda^2\varphi^2}{3g}\text{이고}$$

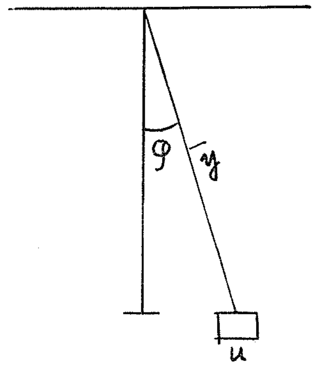
$$E_p=\frac{MRT\lambda\varphi^2}{2}\text{이다.}$$

(그림 2. a)에서 수직方向의 變位는

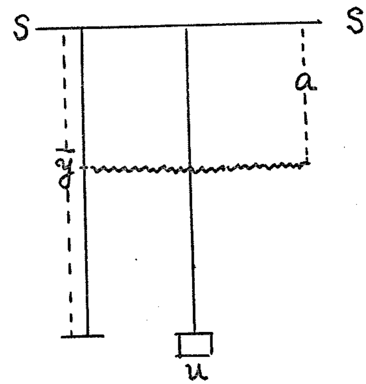
$$\bar{y}-\bar{y}\cos\varphi=\bar{y}(1-\cos\varphi)=\frac{\bar{y}\varphi^2}{2}$$

$$\left\{\cos\bar{\varphi}=\sqrt{1-\sin\varphi}\fallingdotseq1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi\fallingdotseq1-\frac{\varphi^2}{2}\right\}$$

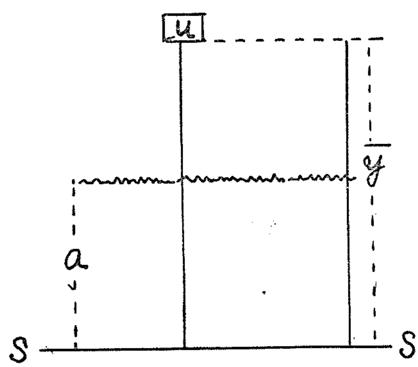
$$E_p=u\times\frac{\bar{y}\varphi^2}{2}$$



(그림 2) (a)



(그림 2) (b)



(그림 2) (C)

氣體群이 $\bar{y}$중간에서 內部에너지에 의한 微小振動을 하는 그림

에너지보존칙에 의하여

$$E_k+E_p=\frac{MRT\lambda^2\varphi^2}{3g}+\frac{MR\lambda\varphi^2}{2}=\text{Constant},$$

φ_0가 최대각이면

$$\frac{MRT\lambda^2\varphi^2_{\max}}{3g}=\frac{MRT\lambda\varphi_0^2}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(그림 2.b)에서 $\bar{y}$의 위치에너지는 $\frac{K}{\eta}$를 상수로한

$$\frac{\frac{K}{\eta}(a\varphi)^2}{2} \qquad a\cdots\frac{\bar{y}}{2}$$

에너지식은

$$\frac{u\varphi^2\bar{y}^2}{3g}+\frac{u\bar{y}\varphi^2}{2}+\frac{\frac{K}{\eta}\left(\frac{\bar{y}}{2}\right)^2\varphi^2}{2}$$

$$=\frac{u\varphi^2\bar{y}^2}{3g}+\left\{u\bar{y}+\frac{K}{\eta}\left(\frac{\bar{y}}{2}\right)^2\right\}\frac{\varphi^2}{2}$$

$=$Const.

φ_0를 最大角으로 하면

$$\frac{u\varphi^2\max(y)^2}{3g}=\left\{u\bar{y}+\frac{K}{\eta}\left(\frac{\bar{y}}{2}\right)^2\right\}\frac{\varphi_0^2}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$\varphi=\varphi_0\cos ft$에서 $\varphi^2=\varphi_0^2f^2$을(13)에 代入하여 f에 對하여 품어 정리하면

$$f=\sqrt{\frac{3g}{2g}\left\{1+\frac{\frac{K}{\eta}\left(\frac{\bar{y}}{2}\right)^2}{uy}\right.}\cdots\cdots\cdots(14)$$

(14)에 $\left(\bar{y}=\frac{2}{3}\lambda,\ \frac{K}{\eta}=\frac{7}{2}\frac{R}{M},\ u=\frac{3}{2}MRT\right)$을 대입하고 정리하면

$$f=\sqrt{\frac{9g}{4\lambda}\left(0.39\frac{\lambda}{T}+1\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

을 얻는다.

그리고 (그림 2.c)에서도 위에 마찬가지로 풀어정리하면

$$f=\sqrt{\frac{9g}{4\lambda}\left(0.39\frac{\lambda}{T}-1\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

을 얻는다.

기체 分子群의 質量에너지가 $\bar{y}$의 중간에서 평균 미소진동이 일어난다고 보면 기체群의 위쪽에서 아래쪽으로 수송되어질때와 아래쪽에서 위쪽으로 수송되어 질때와는 미쇄진동이 다르게 될것이다.

그러므로 (15), (16)의 微小振動이 일어나서 減衰되어 갈것이다.

즉,

A. $0.39\frac{\lambda}{T}-1=0$는 分子氣體群이 $\bar{y}$높이에서 수송되어 질때는

$0.36\ \frac{\lambda}{T}>1$ 일때만 微小振動이일어나고

B. $\frac{\lambda}{T}\fallingdotseq 2.59$일때는 아무런 振動이 일어나지 않는다.

7. 結 論

1. 分子기체군의 內部에너지 및 $\frac{K}{\eta}$의 원인으로 分子기체의 平均 自由行路의 $\frac{2}{3}$의 높이에서 마지막 충돌을한 分子 기체群이 微小振動을 하면서 수송되어 질때는 分子기체군의 自由平均行路와 溫度에만 關係함을 알수 있고

2. 微小振動數 f가 存在하기 위해서는 $0.39\frac{\lambda}{T}>1$의 조건을 만족하여야 되며

3. $\frac{\lambda}{T}\to 2.59$로 접근할때는 진동이 계속 減衰되어 $\frac{\lambda}{T}\fallingdotseq 2.59$가 되었을때는 진동이 중단된다.

참 고 문 헌

1) Sears, Thermodynamics, Addison-Wesley 261~264(1959)

2) 崔榮博 外 3人共著, 工業力學 螢雪 241~242 (1967)

3) S. Timoshenko, Vibration problemsin engineering (1974)

4) Muis A. Pipus. 應用數學, 大韓教科書270 (1964)

5) Myer. Statistical mechanics. John Wiley, Chapter 1 (1970)

6) 小野周, 統計物理學, 日本圖書, 第Ⅳ장 (1967)

7) Charles, L. Best Analytical mechanics. Mc-hill 338~362 (1965)