Sidesway가 생기는 剛構造의 Moment 分配法 完全解法

The Colmplete Solution of Moment Distribution Method of Rigid-Frame Having Sidesway

金 澤 辰

ABSTRACT

The present Structuralists have usually calculated the end Moment of Rigid-frame members by using the Moment Distribution Method, presented by Hardy Cross in 1930, on the Basis of Elastic Law. But this method is considered to be an unfinished solution in case of the moment condition, which the Non-Equilibrium distributed loads or the Horizontal Forces acted upon it result in deflection.

Hence, after finishing the calculation of stress by means of the Moment Distribution Method, the stress condition due to Horizontal Forces had to be corrected approximatly.

However we can directly get the solution of Rigid-frame having sidesway not by above method but by the Moment Distribution computation.

Consequently this method is regarded as a Perfect Moment Distribution Method. Here I present.

Hardy Cross가 開發한 Moment 分配法은 Sidesway가 構造物에 생길수 있는 狀態에서는 解를 求할 수 없는 不完全한 解法이었다. 왜냐하면 Moment 分配法(Cross 法)은 모든 節點에서 各部材는 角變位만이 許用되고 그밖의 變位는 一切 許容하지 아니한다는 前提아래 成立되어 있으나 實地로 剛構造物에 Sidesway가 생기지 않는 狀態란 極히 적다고 할 수 있기 때문이다.

그러면 여기서 Sidesway가 생길 때의 剛構造의 解法을 理論的으로 解析展開하기에 앞서서 基本的인것 몇가지를 먼저 提示하여 諸賢들의 良解를 얻고자 한다.

첫째, Moment 方向의 正負規定을 一般과는 달리 反時計廻轉方向의 것을 正으로 規定한다.

둘째, Cantilever Beam 自由端에 주어진 힘은 正의 Moment가 생기게 하는 힘을 正의 힘이라고 한다.

셋째, Cantilever Beam 自由端에 주어진 正의 힘이나 正의 Moment에 依하여 생기는 撓角과 撓度를 正이라 規定한다.

넷째, 모든 部材를 一端固定 他端自由의 Cantilever Beam으로 取扱한다.

그러면 以上과 같은 約定 前提아래 다음으로 理論展開에 들어가겠다.

그림 1.과 같은 Cantilever Beam AB上 B點이 Hinge로 支持되어 있고 支持點 部材端 B에 Moment M이 주어졌을 때 B點의 反力 R_B는

$$R_B=-\frac{3M}{2l} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

곧 反力 R_B는 符號가 負이므로 約定에 依하여 下向의 힘이라 할 수 있다. Cross 法에서 Moment를 解除할 때에 節點에 Moment를 주면 그 反力으로서 (1)式과 같은 負의 힘이 作用함을 나타내고 있

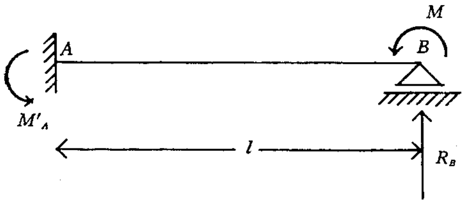


그림 1.

다. 그리고 固定端 A點의 平衡 Moment M_A' 는

$$M_A'=-(R_Bl+M)=-\left(-\frac{3M}{2l}\cdot l+M\right)=\frac{M}{2} \qquad \cdots\cdots(2)$$

곧 이것이 Cross 法에서 말하는 到達 Moment(Carry over moment)이며 符號는 分配 Moment와 같다.

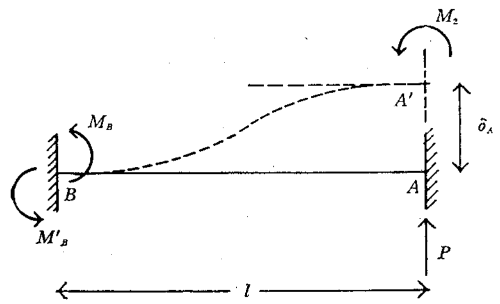


그림 2.

다음 그림 2와 같이 Cantilever Beam AB上 A端에서 撓角은 變할 수 없으나 垂直變位만이 許容될 수 있는 狀態에 놓여있는 Cantilever Beam上 A點에 圖와 같이 正의 힘 P를 주고 同時에 Moment M_2를 주었을 때 上記 目的을 達成하기 爲한 Moment M_2는

$$M_2=-\frac{Pl}{2} \qquad \cdots\cdots(3)$$

그때에 B端의 Moment M_B는

$$M_B=Pl+M_2=Pl-\frac{Pl}{2}=\frac{Pl}{2} \qquad \cdots\cdots(4)$$

B點의 平衡을 維持하기 爲한 平衡 Moment M_B'는 $\Sigma M=0$의 原理에 依하여

$$M_B'+M_B=0 \quad \therefore\ M_B'=-M_B=-\frac{Pl}{2}=M_2 \cdots(5)$$

A端의 撓度 δ_A는

$$\delta_A=\frac{Pl^3}{12EI}=\frac{Pl^2}{12EK} \qquad \cdots\cdots(6)$$

여기서 E는 部材의 Young 係數, I는 部材 斷面二次 Moment, K는 $\frac{I}{l}$로서 部材의 剛度

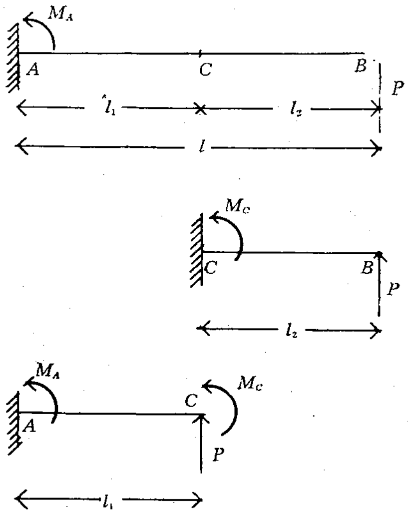


그림 3.

다음 그림 3.과 같이 自由端 B에 垂直力 P가 주어진 Cantilever AB上 一點 C의 Moment M_C는

$$M_C=Pl_2$$

固定端 A의 Moment M_A는

$$M_A=Pl=P(l_1+l_2)=Pl_1+Pl_2=Pl_1+M_C \cdots(7)$$

곧 單一 Cantilever Beam의 自由端에 垂直力 P가 주어졌을 때 Cantilever AB 中間 任意의 點 C의 Moment의 크기를 알면 A點의 Moment M_A는 (7)式에 依하여 自由端에 주어진 垂直力 P에 依한 C點의 Moment와 垂直力 P를 C點에 옮기어서 주었을 때의 Moment의 合計라 함을 나타내고 있다. 또 同時에 (7)式은 Cantilever를 中間 任意의 點에서 토막을 내어 分割한 狀態에서 應力狀態를 알아볼 수도 있고 여러 토막의 Cantilever Beam을 接續連續시키어 應力狀態를 알아볼 수도 있는 簡單하면서도 重要한 式이다.

以上은 大槪 周知의 基本式이므로 證明은 大部分 省略 提示에 끝이고 다음으로 本論에 들어가겠다.

Cross가 考案한 Moment 分配法에서는 剛架構를 構成하고 있는 各 水平部材를 먼저 兩端支持의 單純보로 取扱하여짐을 실었을 때 部材支持端에 생기는 撓角을 Cancel하기 爲하여 部材端에 固定 Moment를 줌으로서 짐이 실리기 前과 同一하게 各 水平보가 一直線狀이 되게 한 다음 各部材를 剛結合시키어 그 結合狀態를 維持하도록 하면서 一時的으로 주어진 固定 Moment를 解除(Re-lease)란 名目으로 除去함과 同時에 Moment를 分配分割하여 撓角이

次次 實撓角에 가깝게 하여 가되 各部材와의 結合 狀態는 害치지 아니하면서 到達 Moment에 依하여 不均衡狀態가 생긴 것을 다시 解除하여 平衡을 되찾되 Moment의 크기는 解除 到達을 거듭하면서 次次 收斂되어 各部材의 端 Moment를 實地의 端 Moment에 無限히 接近하도록 하면서 眞 Moment를 求하는 方式을 取하고 있다.

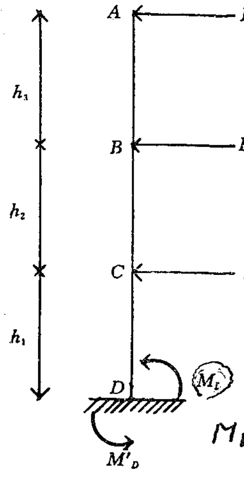


그림 4.

다음 水平力에 依하여 Sidesway가 생기는 경우에 對하여 생각하여 보자. 먼저 그림 4.와 같은 例를 생각하여 보자. 圖에 依하여 B點의 Moment M_B는

$$M_B=P_3h_3$$

C點의 Moment는 (7)式에 依하여

$$M_C=(P_3+P_2)h_2+M_B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

D點의 Moment는

$$M_D=(P_3+P_2+P_1)h_1+M_C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

그림 4와 같은 Cantilever가 여러개 그림 5와 같이 並列로 서있고 各層에 水平部材가 Hinge로서 連結되어 있을 때 그림 6과 같이 各層에 水平力 P_1, P_2, P_3를 주었다고 하면 部材 AD, EH, IL은 휘여져서 各 垂直水平部材 서로사이의 交角은 그림 5 때와는 달라질 것이다. 그런데 앞서 말한 바와 같이 Moment 分配法에서 水平部材와 垂直部材間의 交角狀態를 載荷前의 그것과 같이 維持하기 爲하여 水平部材端에 固定 Moment를 假想的으로 주어서 載荷前의 各部材 相互間 交角結合狀態와 同一하게 만든 다음 解除 到達하는 일을 거듭하는 方法을 썼는데 여기서도 이것과 비슷한 方法을 쓰기로 한다.

그림 4와 같이 Cantilever에 水平力 P_3, P_2, P_1이 실리었을 때 各 垂直部材는 그림 6과 같이 휘여져서 水平部材와의 交角은 앞서 말한 바와 같이 달라짐으로서만 끝이겠으나 垂直水平兩部材가 서로 剛結合이 되어있을 때에는 무슨 對策을 쓰지 않는다고 하면 相互間의 結合狀態는 깨어지고 말 것이다. 그러므로 이 때에는 一次的으로 Cross法에서 그러하듯이 그림 7과 같은 狀態로 만들어서 垂直 水平 部材 사이의 交角狀態에 變化를 가져오지 않게 한다. 그러기 爲하여 먼저 最上層에서 부터 생각하여 보자. 그림 7과 같이 垂直水平 兩部材들 사이의 交角狀態가 變하지 아니하게 하려면 그림 8에서 보

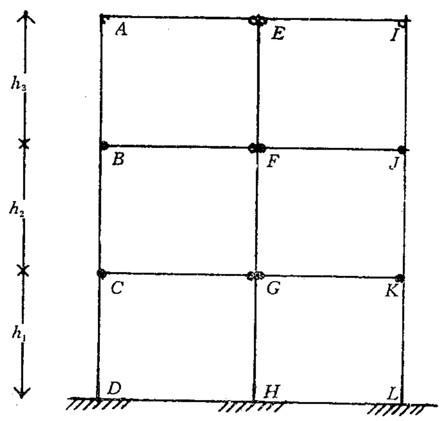


그림 5.

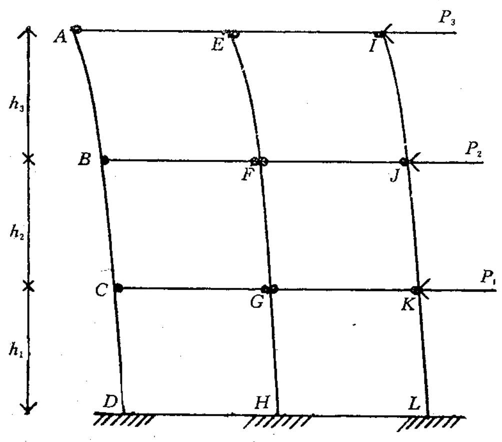


그림 6.

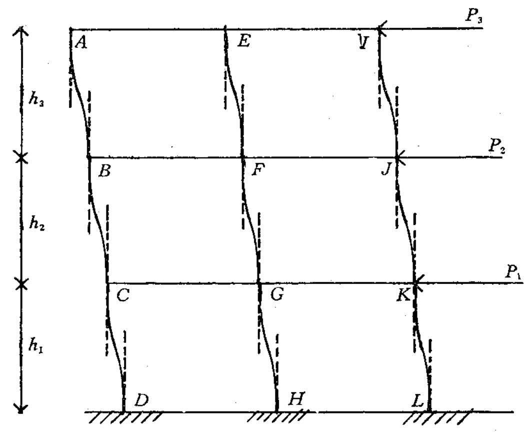


그림 7.

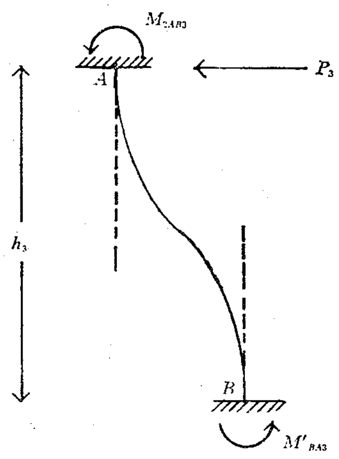


그림 8.

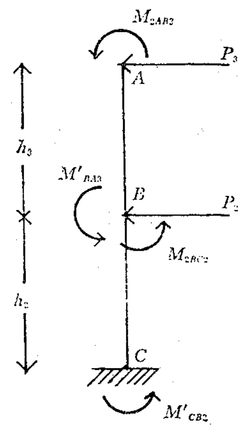


그림 9.

는 바와 같이 垂直部材端 A에 (3)式을 適用한 M_{2AB_3}를 주면 되므로

$$M_{2AB_3}=-\frac{P_3h_3}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

垂直部材 B端의 平衡 Moment M'_{BA_3}는 (5)式에 依하여

$$M'_{BA_3}=-\frac{P_3h_3}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

그 다음 隣接한 下層 BC部材에서는 그림 9와 같이 B點에 주어지는 Moment M_B는

$$M_B=P'_3h_3+M_{2AB_3}+M'_{BA_3}=P_3h_3-\frac{P_3h_3}{2}-\frac{P_3h_3}{2}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

但 上式에 나와 있는 (10), (11)式에 依한 Moment M_{2AB_3} 및 M'_{BA_3}는 交角 維持를 爲하여 一時的으로 주어지는 Moment이며 뒤에 解除除去되는 Moment 임.

部材 BC에서는 (7)式에 依하여 AB間에서 생긴 Moment와 A點에 주어졌던 P_3와 B點에 주어질 P_2 두 水平力이 作用한다. 그러나 여기 주어지는 Moment M_B는 (12)式과 같이 Cancel되어 없어졌으므로 B點에는 表面上으로는 水平力 P_3+P_2만 作用하는 結果가 된다. 그러므로 B點의 撓角狀態가 變化하지 않게 하기 爲하여는 (3)式에 準하는 Moment M_{2BC_2}를 주어야 한다. 곧

$$M_{2BC_2}=-\frac{(P_3+P_2)}{2}h_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

C點의 平衡 Moment M'_{CB_2}도 (5)式에 準하여

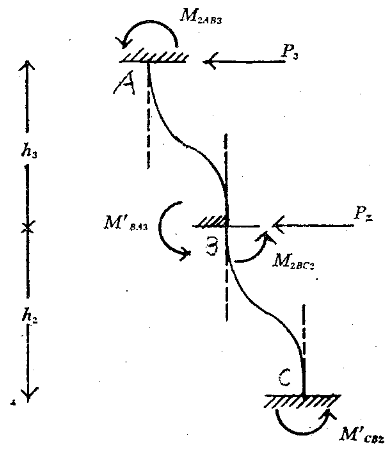


그림 10.

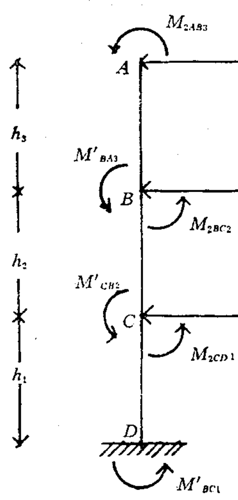
$$M'_{CB_2}=-\frac{(P_3+P_2)h_2}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

그러면 (13), (14)式과 같이 Moment를 B,C點에 各各 주었다고 하면 그림 10과 같은 結果가 된다.

以下 各層에서도 以上과 같이 하는데 그림 11과 같이 C點에 주어지는 Moment M_C는

$$\begin{aligned}M_C&=P_3(h_3+h_2)+P_2h_2+M_{2AB_3}+M'_{BA_3}\\&\quad+M_{2BC_2}+M'_{CB_2}\\&=P_3(h_3+h_2)+P_2h_2-\frac{P_3h_3}{2}-\frac{P_3h_3}{2}\\&\quad-\frac{(P_3+P_2)h_2}{2}-\frac{(P_3+P_2)h_2}{2}\\&=0\end{aligned}$$

그러면 上層에서 影響을 준 Moment는 모두 Cance 되어 없어졌으니 C點에는 水平力 $P_3+P_2+P_1$에 依한 部材相互 交角狀態 維持에 必要한 Moment M_{TC} 밖에 없다.



M'DC1

그림 11.

곧

$$M_{2CD_1} = -\frac{(P_3+P_2+P_1)h_1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

또 D點에서의 平衡 Moment M'_{DC_1}은

$$M'_{DC_1} = -\frac{(P_3+P_2+P_1)h_1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

以上 各式에 依하여 求하여진 Moment는 單一 Cantilever에 對한 것이다. 그러나 여기서 必要한 것은 그림 7에서 보는 바와 같은 各節點에서 水平部材에 依하여 橫方向으로 結合되어 있는 複合體인 Cantilever Beam의 端 Moment이다. 그러므로 (10)～(16)式에서 求하여진 各 端 Moment는 各層마다 받는 層單位 Moment의 合計이므로 各部材端에 分配하여 作用하도록 하여야 한다. 그러기 爲하여 그림 12(α)와 같이 各端部 A,E,I에서 同一한 撓度가 생길 때 各點에 주어지는 水平力을 求하여야 한다. 그러면 各 撓度는 (6)式에 依하여

$$\delta_A = \frac{P_A h_3^2}{12EK_{AB}} = \delta_E = \frac{P_E h_3^2}{12EK_{EF}} = \delta_I = \frac{P_I h_3^2}{12EK_{IJ}}$$

여기서 各部材길이가 같다고 하면 上式은

$$\frac{P_A}{K_{AB}} = \frac{P_E}{K_{EF}} = \frac{P_I}{K_{IJ}} = \frac{P_A+P_E+P_I}{K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ}} = \frac{P_3}{K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ}}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} P_A &= \frac{K_{AB}}{K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ}} P_3 \\ P_E &= \frac{K_{EF}}{K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ}} P_3 \\ P_I &= \frac{K_{EF}}{K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ}} P_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

이렇게 하여 A,E,I 各點에 주어지는 水平力은 求하

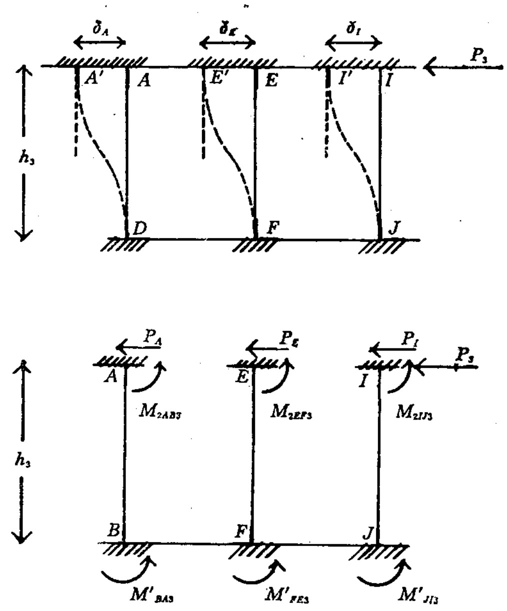


그림 12.

여졌다. 그러면 그 水平力 P_A, P_E, P_I에 依하여 생기는 Moment M_{2AB_3}, M_{2EF_3}, M_{2IJ_3}은 (10)式에 依하여

$$\left.\begin{aligned} M_{2AB_3} &= -\frac{K_{AB}}{2(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})} P_3 h_3 \\ M_{2EF_3} &= -\frac{K_{EF}}{2(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})} P_3 h_3 \\ M_{2IJ_3} &= -\frac{K_{IJ}}{2(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})} P_3 h_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (18)$$

B,F,J點에 주어질 平衡 Moment M'_{BA_3}, M'_{FE_3}, M'_{JI}는 (10)=(11)式이므로 여기서도 같이 하여

$$\left.\begin{aligned} M'_{BA_3} &= -\frac{K_{AB}}{2(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})} P_3 h_3 \\ M'_{FE_3} &= -\frac{K_{EF}}{2(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})} P_3 h_3 \\ M'_{JI_3} &= -\frac{K_{IJ}}{2(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})} P_3 h_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (19)$$

다음 아래層에서는 上式과 (13)式에 準하여

$$\left.\begin{aligned} M_{2BC_2} &= -\frac{K_{BC}}{2(K_{BC}+K_{EG}+K_{JK})} (P_3+P_2) h_2 \\ M_{2FG_2} &= -\frac{K_{FG}}{2(K_{BC}+K_{EG}+K_{JK})} (P_3+P_2) h_2 \\ M_{2JK_2} &= -\frac{K_{JK}}{2(K_{BC}+K_{FG}+K_{JK})} (P_3+P_2) h_2 \end{aligned}\right\} (20)$$

C,G,K 點의 平衡 Moment는

$$M'_{BC_2} = M_{2BC_3},\ M'_{GF_2} = M_{2FG_3},\ M'_{KJ_2} = M_{2JK_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

以下層에서도 (18),(19)式에 準하여 分母에는 그 層의 垂直部材의 剛度 또는 剛比合計의 2倍(全剛

式으로 보아서는 1/2)로 하고 分子는 該當部材의 剛度 또는 剛比를 쓰고 주어지는 層 Moment는 該當層까지 넣은 그 以上層에 주어지는 水平力의 合計에 그 層高를 곱한 것으로 하고 符號는 주어지는 全水平力 符號의 反對(負)符號를 쓰면 된다. 但 剛度, 剛比에 對하여는 剛度를 썼을 때에는 모두 剛度를 쓰고 剛比를 썼을 때에는 全體 剛比로 統一하여야 한다.

以上으로 주어지는 外力에 依한 것은 알아졌으나 Moment를 分配하는 過程에서 二次的으로 생기는 不均衡水平力이 있다. 이것은 그림 1과 (1)式을 보면 알 수 있다. 곧 支持點의 上下方向 變位는 通常的 解釋에 依하면 考慮될 수 없으나 水平變位는 여기서 考慮되어야 한다.

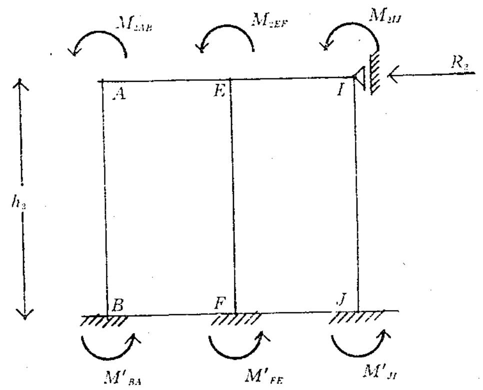


그림 13.

그림과 같은 垂直部材들은 横으로 水平部材에 連結되어 있으므로 얼마쯤은 相互牽制되어 있으나 上下端 Moment의 合計가 零이 되어 있지 않을 때에는 거기서 實存하지 않는 假想 Hinge가 받고 있던 크기의 反對되는 水平力에 依한 水平變位가 생긴다. 곧 그림 13에 依한

$$\Sigma M_3 = M_{2AB} + M_{BA}' + M_{2EF} + M'_{FE} + M_{2IJ} + M'_{JI} \quad \cdots\cdots(22)$$

이 ΣM이 零이 아닐 때에는 (1)式에 依한

$$R_3 = -\frac{3\Sigma M_3}{2h_3} \quad \cdots\cdots(23)$$

만큼 假想 Hinge에 不均衡力이 주어져 있는 것이다. 그러면 이 實存하지 않는 反力을 除去하여서 水平變位가 생기게 하기 爲하여는 그 層에 $-R_3$란 크기의 水平力을 주어서 不均衡水平力을 除去한다. 그때 水平力에 依하여 水平變位를 일으키기는 하나 各 部材間의 交角이 變更되지 않게 하기 爲하여 그림 2와 같이 撓角은 固定하고 水平變位는 許容하는 方法을 여기서도 쓴다. 그때에 $-R_3$라는 水平力을 各 垂直部材端에 分割하여 주어야 하는데 이 水平力은 (6)式과 (17)式에 準하여

$$P_A = \frac{K_{AB}}{K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ}}(-R_3)$$
$$= \frac{-K_{AB}}{2h_3(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})}\cdot 3\Sigma M_3$$
$$P_E = \frac{K_{EF}}{K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ}}(-R_3)$$
$$= \frac{-K_{EF}}{2h_3(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})}\cdot 3\Sigma M_3$$
$$P_I = \frac{K_{IJ}}{K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ}}(-R_3)$$
$$= \frac{-K_{IJ}}{2h_3(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})}\cdot 3\Sigma M_3$$

上記와 같이 分割된 水平力에 依하여 各 部材端에 주어질 Moment $M_{2AB(\Sigma M)}$, $M_{2EF(\Sigma M)}$, $M_{2IJ(\Sigma M)}$은 (3)式에 依하여

$$M_{2AB(\Sigma M)} = -\frac{h_3}{2}\cdot\frac{K_{AB}}{2h_3(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})}\cdot 3\Sigma M_3$$

$$\left.\begin{aligned} &= -\frac{3K_{AB}}{4(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})}\Sigma M_3 \\ M_{2EF(\Sigma M)} &= -\frac{3K_{EF}}{4(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})}\Sigma M_3 \\ M_{2IJ(\Sigma M)} &= -\frac{3K_{IJ}}{4(K_{AB}+K_{EF}+K_{IJ})}\Sigma M_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(24)$$

同時에 이 Moment와 같은 크기의 Moment가 垂直部材下端에 다음과 같이 平衡 Moment로서 주어진다. 곧

$$M'_{BA(\Sigma M)} = M_{2AB(\Sigma M)},\quad M'_{FE(\Sigma M)} = M_{2EF(\Sigma M)},$$
$$M'_{JI(\Sigma M)} = M_{2IJ(\Sigma M)} \quad \cdots\cdots(25)$$

이러한 不均衡 Moment의 解除는 各層마다 하여야 하며 또 Moment를 解除 分配한 뒤에는 반드시 거듭 不均衡 Moment를 求하여 解除하여야 한다.

그러면 이로서 目的하는 바 剛架構에 Sidesway가 생길 때의 處理法에 對한 理論的 說明은 마쳤다고 생각된다. 그러면 다음으로 그 實地의 計算法에 對하여 說明하겠다. 여기 實地計算方法을 說明하기에 앞서서 特殊한 것에 對한 用語가 있어야 되겠기에 다음과 같이 定하겠다.

Fig. 8 또는 Fig. 12 其他에서 자주 나오는 M_{2AB}, M'_{BA}, M_{2EF}, M'_{FE} 等의 Moment를 等角 Moment (Equal Angle Moment)라 하되 M_{2AB}, M_{2EF} 等을 上等角 Moment 또는 上 Moment(Top Equal Angle Moment or Top Moment) M'_{EA}, M'_{FE} 等을 下等角

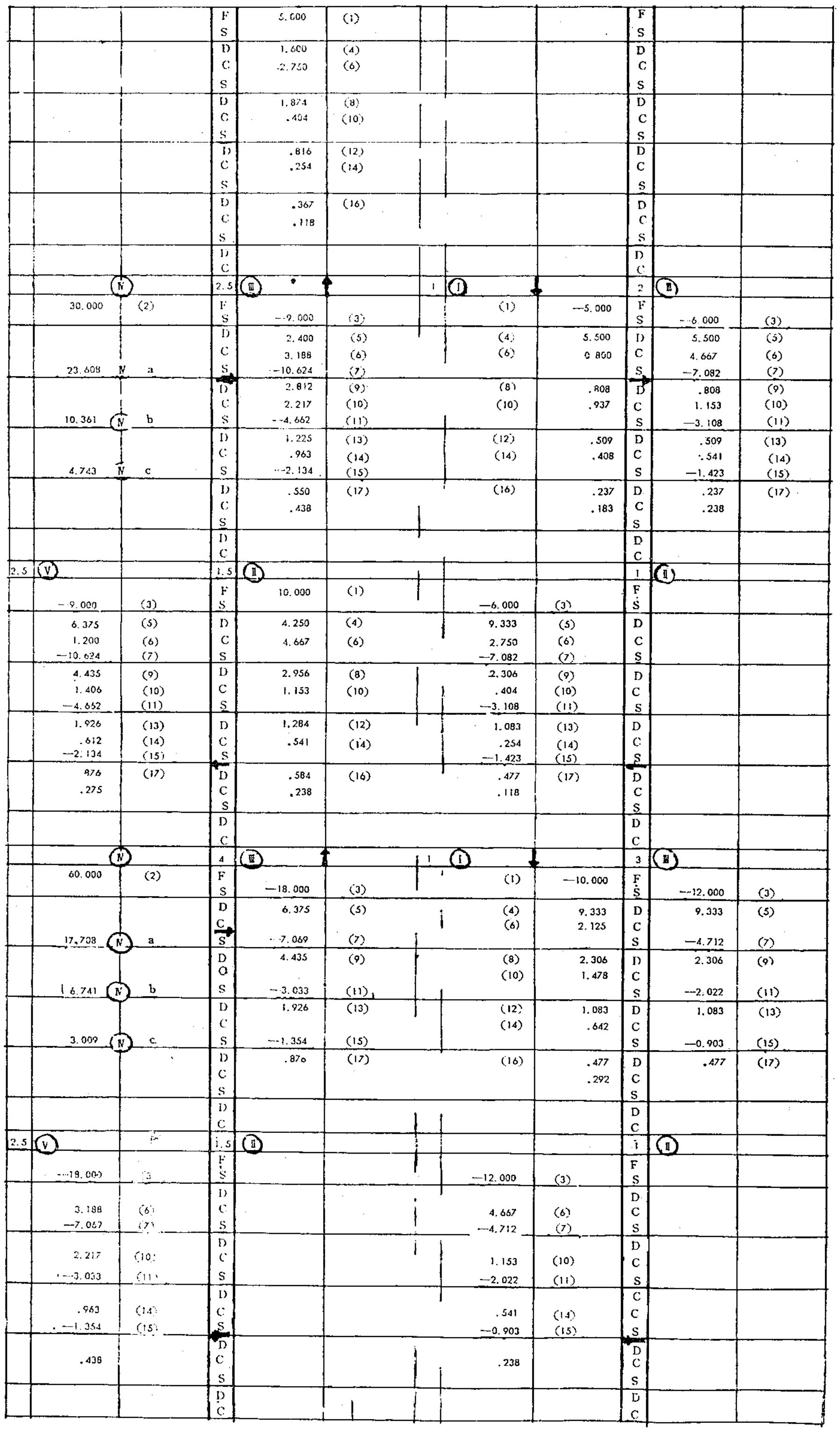


그림 14.

Moment 또는 下 Moment(Lower Equal Angle Moment or Lower Moment)라 하고 Moment를 分配解除하였을 때 各回마다 같은 層의 모든 垂直部材 兩端의 分配된 Moment의 代數和를 層 Moment(Strato-moment)라 하고 層 Moment를 各垂直部材에 갈느는 일을 Moment를 分割(Divide)한다고 하고 分割할때 곱하는 係數을 分割係數(Division Factor) (10), (11)式이나 (13), (14)式 等에서 나오는 P_3h_3, $(P_3+P_2)h_2$, $(P_3+P_2+P_1)h_1$ 等을 Thrust Moment라고 하기로 한다.

여기서 Moment를 計算하는 用紙는 그림 14와 같이 Cross法 計算方式과 같은 것을 쓰되 計算하는 欄이 조금 많아지고 數値의 收斂이 좀 느리어진다. 計算을 시작하기에 앞서서 그림 14에서 ①, Ⅱ는 各

部材의 剛比를 $\textcircled{\scriptsize III}$은 그 節點에 接하여 있는 部材剛比의 合計를 $\textcircled{\scriptsize IV}$는 各層左端 S欄마다 記入하는데 第一 처음 欄에는 Thrust Moment를 그 다음부터는 層 Moment를 記入하고 그 左側 適當한 곳 $\textcircled{\scriptsize V}$에 그 層 垂直部材의 剛比 $\textcircled{\scriptsize II}$의 合計를 쓰고 計算欄에서 S欄 以外에는 Cross 法과 같아서 F欄은 固定 Moment를 D는 分配解除 Moment, C는 到達 Moment를 記入한다. 그러고 화살票로 表示된 것도 Cross 法에서 쓰는 端 Moment 記入法 그대로로서 節點을 中心으로 反時計廻轉 方向位置에 部材端 分配到達 兩 Moment를 該當欄에 記入한다.

그러면 以上方法을 實地의 數値를 써서 그림 15와 같은 載荷된 剛架構와 剛比를 計算例로서 說明하겠다. 여기서 說明하고 計算하는 數値를 그림 14에 記入할 때 括號안에든 番號數字를 쓰고 計算된

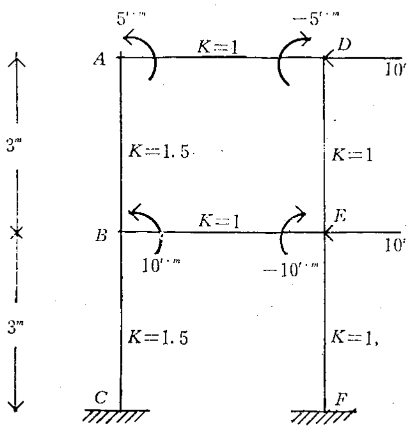


그림 15.

數値를 그림 14에 記入할 때 바로 옆에 그와 같은 括號番號數字를 씀으로서 對照하여 볼 수 있게 하겠다.

먼저 垂直荷重에 依하여 各水平部材端에 주어지는 固定 Moment를 (1)에 記入한다. 그 다음 그림 15에 依하면 各層에 주어지는 水平荷重은 右에서 左로 向하여 주어졌으니 맨처음 말한 規約에 依하여 正의 힘이고 딸아서 正의 Moment이며 크기는 各層에 주어지는 Thrust Moment 곳 水平荷重 X層高를(여기서 水平荷重이라 함은 2層까지 包含한 以上層에 주어진 水平力의 合計) 各 (2)欄에 記入한다. 이 Thrust Moment는 (10)～(16)式數値의 −2倍가 된다. 다음 (2)의 數値에 $\frac{1}{2}$을 곱하고 그 數値를 $\textcircled{\scriptsize V}$의 數値로 나눈 數値에 $\textcircled{\scriptsize II}$의 剛比數値을 곱한 數値에 正負符號를 바꾼 數値를 (3)에 記入한다. 이렇게 計算하는 過程을

$$-(2)\times\frac{1}{2}\times\textcircled{\scriptsize II}/\textcircled{\scriptsize V}=(3)$$

이라 表示하겠다. 다음 各節點에 接續되어 있는 여러 部材의 端 Moment 合計에 依한 Moment 解除

$$-\frac{(3)+(1)}{\textcircled{\scriptsize III}}\times\textcircled{\scriptsize I}=(4)\ \text{or}\ -\frac{(3)+(1)}{\textcircled{\scriptsize III}}\times\textcircled{\scriptsize II}=(5)$$

到達 Moment (6)은

$$(4)/2=(6)\ \text{or}\ (5)/2=(6)$$

各層單位로 垂直部材 上下端 Moment (5)의 合計인 層 Moment는 $\textcircled{\scriptsize IV}_a$ 그層 Moment에 依하여 計算된 等角 Moment (7)은 各垂直部材 上下端 S欄에 똑같이 記入

$$-\frac{\textcircled{\scriptsize IV}_a\times\textcircled{\scriptsize II}}{\textcircled{\scriptsize V}}\times\frac{3}{4}=(7)$$

다음 各節點에서 Moment 分配 解除

$$-\frac{\Sigma(6)+\Sigma(7)}{\textcircled{\scriptsize III}}\times\textcircled{\scriptsize I}=(8)\ \text{or}$$

$$-\frac{\Sigma(6)+\Sigma(7)}{\textcircled{\scriptsize III}}\times\textcircled{\scriptsize II}=(9)$$

到達 Moment

$$(8)/2=(10)\ \text{or}\ (9)/2=(10)$$

各層單位 各垂直部材 上下端 Moment $\Sigma(9)$의 層 Moment $\textcircled{\scriptsize IV}_b$에 依하여 上下等角 Moment (11)을 求하여 垂直部材 上下端該當 位置에 똑같이 記入

$$-\frac{\textcircled{\scriptsize IV}_b\times 3}{4}\times\frac{\textcircled{\scriptsize II}}{\textcircled{\scriptsize V}}=(11)$$

다음 各節點에 모인 部材端 到達 Moment와 等角 Moment의 合計를 分配하여 解除한다.

$$-\frac{\Sigma(10)+\Sigma(11)}{\textcircled{\scriptsize III}}\times\textcircled{\scriptsize I}=(12)\ \text{or}$$

$$-\frac{\Sigma(10)+\Sigma(11)}{\textcircled{\scriptsize III}}\times\textcircled{\scriptsize II}=(13)$$

到達 Moment는

$$(12)/2=(14)\ \text{or}\ (13)/2=(14)$$

各層單位로 層 Moment $\textcircled{\scriptsize IV}_c$를 求함.

$$\Sigma(13)=\textcircled{\scriptsize IV}_c$$

다음 各層마다 等角 Moment (15)를 求한다.

$$-\frac{\textcircled{\scriptsize IV}_c\times 3}{4}\times\frac{\textcircled{\scriptsize II}}{\textcircled{\scriptsize V}}=(15)$$

各節點 Moment 分配 解除

$$-\frac{\Sigma(14)+\Sigma(15)}{\textcircled{\scriptsize III}}\times\textcircled{\scriptsize I}=(16)\ \text{or}$$

$$-\frac{\Sigma(14)+\Sigma(15)}{\textcircled{\scriptsize III}}\times\textcircled{\scriptsize II}=(17)$$

以上과 같은 方法을 번복하면 次次 數値가 收斂되어 小數點以下 必要한 자리까지 끝의 數字는 四捨五入하여 가면서 計算하면 모두 零이 되어버린다.

그러면 그때에 各部材端마다 固定 Moment로부터 시작하여 等角 Moment, 分配 Moment, 到達 Moment 또다시 等角 Moment, 分配 Moment, 到達 Moment 等等 여러번 거듭하여 繼續되다가 結局 零에 이르렀을 때 Moment의 總代數和로서 負 端 Moment가 求하여진다. 以上과 같이 數值가 收斂되어 零이 되

도록까지 計算하는 方法은 完全計算法이므로 正確한 數値가 必要할 때에 이러한 完全計算法으로 Computer에 依한 計算을 하는 것이 좋겠으나 精密한 計算이 必要치 않고 略算으로도 充分하다고 認定될 때에는 다음과 같은 略算法을 使用하길 바란다. 곳

그림 14에서 (1)~(13)까지 計算하여 合計를 求하던지 좀더 精度가 높어야 할 때에는 (1)~(17)까지 求하여 數値를 合計하면 좋겠다. 以上 提示한 計算法에 爲先 이름을 붙이겠는대 上記의 (1)~(13)까지 計算으로 끝이는 것을 第一略算法, (1)~(17)까지 計算하는 것을 第二略算法, 完全値計算法을 第三法이라고 하자.

그러면 Sidesway가 생기는 剛構造物의 略算法과 精算法等에 對하여 理論的根據와 實地計算法을 說明하였으나 다음 各計算法에 依한 計算結果를 提示하겠는대 特히 第三法 精算値에 對하여는 現在 一般的으로 公信力을 갖이고 計算되어온 方法에 依한 數値와 對比하여 보이겠다. 먼저 略算法에 依한 計算値는 그림 15의 荷重狀態에 對하여 計算된 것인대 括號밖의 數値는 第一法에 依한 것이고 括號안의 數値는 第二法에 依한 數値이다.

M_{AD}=12.444 t.m. (13.065 t.m.)
M_{AB}=−12.444 t.m. (−13.065 t.m.)
M_{BA}=−8.944 t.m. (−9.590 t.m.)
M_{BE}=24.31 t.m. (25.435 t.m.)
M_{BC}=−15.366 t.m. (−15.844 t.m.)
M_{CB}=−22.697 t.m. (−23.088 t.m.)
M_{DA}=3.554 t.m. (4.199 t.m.)
M_{DB}=−3.553 t.m. (−4.198 t.m.)
M_{ED}=−0.314 t.m. (−1.005 t.m.)
M_{EB}=6.325 t.m. (7.444 t.m.)
M_{EF}=−6.012 t.m. (−6.438 t.m.)
M_{FE}=−12.914 t.m. (−13.276 t.m.)

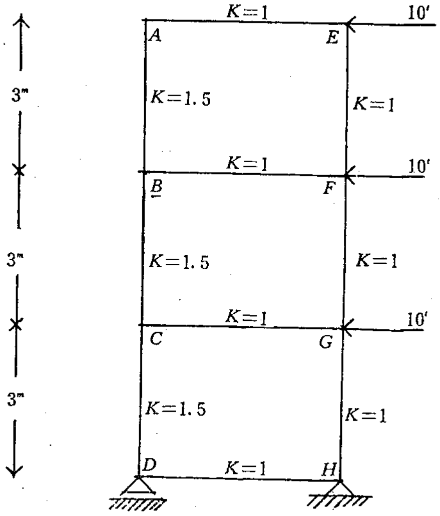


그림 16.

다음은 그림 16과 같은 荷重狀態에 對하여 計算한 精算値인대 括號밖의 數値는 本第三法에 依하여 計算된 數値이고 括號안의 것은 M.I.T. 工科大學 Fenves 敎授 提示의 Strain Energy에 依하여 成立된 "Stress"란 方法을 Computer로 計算한 數値이다.

M_{AB}=−10.466 t.m. (10.42 t.m.)
M_{AE}=10.465 t.m. (10.42 t.m.)
M_{BA}=−4.198 t.m. (4.25 t.m.)
M_{BF}=22.799 t.m. (22.72 t.m.)
M_{BC}=−18.598 t.m. (18.47 t.m.)
M_{CB}=−12.636 t.m. (12.84 t.m.)
M_{CG}=34.135 t.m. (34.03 t.m.)
M_{CD}=−21.496 t.m. (21.19 t.m.)
M_{DC}=−25.479 t.m. (25.61 t.m.)
M_{DH}=25.481 t.m. (25.61 t.m.)
M_{EA}=9.654 t.m. (9.6 t.m.)
M_{EF}=−9.642 t.m. (9.60 t.m.)
M_{FE}=−5.684 t.m (5.70 t.m.)
M_{FB}=21.762 t.m (21.68 t.m.)
M_{FG}=−16.077 t.m. (15.97 t.m.)
M_{GF}=−12.678 t.m (12.71 t.m.)
M_{GC}=32.526 t.m. (32.49 t.m.)
M_{GH}=−19.846 t.m (19.78 t.m.)
M_{HG}=−23.183 t.m. (23.4 t.m.)
M_{HD}=23.194 t.m. (23.4 t.m.)

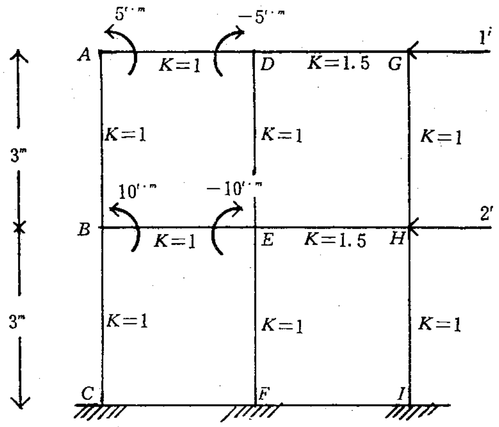


그림 17.

다음 그림 17과 같이 그림 16의 架構와는 支持方法과 形態를 달리하고 水平荷重과 同時에 不均衡的으로 載荷된 垂直荷重이 作用하는 剛架構의 計算値를 對比하여 보이겠다. 이것은 現在 널리 알리어져 있으며 正確하다고 하는 定評을 받고 있는 撓角撓度法에 依하여 計算된(括號안의 數値數値)이다. 곳

$M_{AD}=3.7542$ t.m. (3.753 t.m.)
$M_{AB}=-3.7544$ t.m. (3.755 t.m.)
$M_{BA}=-3.9825$ t.m. (3.984 t.m.)
$M_{BE}=8.0651$ t.m. (8.065 t.m.)
$M_{BC}=-4.0826$ t.m. (4.084 t.m.)
$M_{CB}=-2.7991$ t.m. (2.794 t.m.)
$M_{DA}=-4.3128$ t.m. (4.311 t.m.)
$M_{DG}=1.6159$ t.m. (1.615 t.m.)
$M_{DE}=2.6968$ t.m. (2.697 t.m.)
$M_{ED}=3.1111$ t.m. (3.112 t.m.)
$M_{EB}=-8.0659$ t.m. (8.065 t.m.)
$M_{EH}=3.8787$ t.m. (3.881 t.m.)
$M_{EF}=1.0757$ t.m. (1.076 t.m.)
$M_{FE}=0.2113$ t.m. (0.214 t.m.)
$M_{GD}=0.606$ t.m. (0.605 t.m.)
$M_{GH}=-0.6061$ t.m. (0.606 t.m.)
$M_{HG}=-0.4648$ t.m. (0.464 t.m.)
$M_{HE}=1.9545$ t.m. (1.956 t.m.)
$M_{HI}=1.4897$ t.m. (1.49 t.m.)
$M_{IH}=-1.5008$ t.m. (1.497 t.m.)

그런데 그림 16의 경우에는 本第三法과 Computer에 依하여 計算된 端 Moment와의 數値差異 最大誤差率이

(21.496 t.m. − 21.19 t.m.)/21.496 t.m. = 1.42%

인대 比하여 撓角撓度法에 依한 計算値의 差異는 最大數値差에 依한 誤差率이

(0.214 t.m. − 0.2113 t.m.)/0.2113 t.m. = 1.27%

밖에 안됨은 本第三法 計算結果와 撓角撓度法에 依한 計算結果가 너무나 差異가 작은대 놀라움을 禁할 수 없다.

以上으로 本表題에 對한 說明은 끝이였는대 다른 精算法으로서의 構造計算方法은 모두 數理的인 計算方式을 取한대 反하여 Cross 法은 固定 Moment 및 Moment 分配란 假想的이고 革新的인 方法을 大膽하게 導入하여 展開함으로서 端 Moment를 次次眞 Moment에 數値的으로 無限히 接近시킴으로서 이루어졌다. 또 根本原理에 있어서도 不靜定構造理論을 떠나서 成立된 것은 아니나 다른 構造計算方式과 根本的으로 다르며 손쉽게 計算할 수 있는 利點이 있어서 많은 사람들의 關心과 愛護를 받아왔다. 그러나 이 法의 最大弱點은 各節點의 支持狀態의 假定에서 發生하여 이것이 이 法을 典型的인 完全한 計算法으로 認識받지 못하겠금 하였을뿐 아니라 一種의 臨時方便의 計算法으로 轉落함을 敢受하지 안으면 안되게 하였다.

그리하여 이 法이 1930年 發表된 後 剛構造物이 橫力을 받아서 Sidesway가 생길 때의 處理法을 補充 또는 完成하기 爲한 努力이 끈이지않게 繼續되어 發表되어 왔었다. 그러나 이들은 모두 姑息的이고 略算的인 方法에 지나지 않고 Cross 法을 完全한 典型的인 方法으로서의 脚光을 받도록 하지는 못하였다. 왜 안되었던가. 理由는 明確하다. 곳 앞서 말한바와 같이 Cross 法의 出生過程에서의 前提條件인 固定 Moment를 挿入한 精神을 떠나서였다. 그리하여 本人은 Cross 法의 出發精神에 充實한 方法에 依하여 本法을 完成시키도록 努力함으로서 目的은 이루어졌다고 생각한다. 곳 橫力에 依하여 撓角과 撓度가 생긴 各部材端에 Cross 法에서 水平部材端에 假想的인 固定 Moment를 주어서 各部材 사이의 交角狀態가 變更되지 않게 하기 爲하여 撓角을 固定한 것과 같이 垂直部材端에 等角 Moment란 假想的 Moment를 一時的으로 주어서 垂直部材端撓角을 固定함으로서 出發하였다. 이것이 곳 Cross 法의 根本 出發精神이었다. 本法은 이러한 過程을 踏襲 發展시키어 補完이 아니라 完成된 一個의 完全法으로 만들어졌다. 그러므로 本法은 一般이 公信力을 認定使用하여 온 몇몇 有名한 完全法들과 같이 典型的인 方法의 隊列에 參與하게 되었다고 생각한다.

以上 本表題에 對한 說明은 끝내었으나 本人의 未熟 未及한 表現에 對하여 諸賢께서는 널리 寬容을 베푸시고 많은 指導와 鞭撻있으시기 바란다. 끝으로 本人의 어줍지안은 이 計劃을 밀어주시고 指導助言을 아끼지 안은 漢陽大學校 敎授 咸性權博士 그리고 剛構造計算數値 對比를 爲하여 構造計算을 하여 주신 서울大學校 洪性穆敎授, 釜山東亞工專講師 張炳淳君 여러분에게 머리숙여 드린 다.