大韓機械學會誌 第16卷 第4號 pp. 345~351, 1976


<講　座>

# 非線型振動問題의 解析的解法 概要〔I〕

## Introductory Review on Analytical Methods of Nonlinear Vibration Problems

李　　樂　　周*

目　次



### 第1章　緒　　論

現在의 우리나라 大學校의 機械工學系列 學科의 大學課程에서 機械振動論, 固體力學, 自動制御, 流體力學 및 熱傳達등의 科目들을 必須 또는 選擇科目으로 採擇하고 있으나, 講議의 첫 時間에 線型問題에 限해서 취급할 것이며, 非線型問題는 해당하는 教科內容의 범위를 넘으므로 취급하지 않을 것이라는 말을 들었을 것이다. 다만 몇몇 大學校의 大學院에서는 非線型振動論, 非線型自動制御 및 非線型流體力學(主로 粘性流體力學 및 壓縮性流體力學)등의 講議가 最近에 이르러 開設되어 있는 곳도 있다. 지금까지의 機械工學的 實際의 問題들은 線型으로 解析 또는 設計하여도 充分하다고 생각하였고, 또한 大部分이 充分하였던 것도 사실이다. 그러나 고도의 技術을 바탕으로 하는 構造物의 設計, 정확한 機械의 性能糾明, 깊은 基礎工學의 理論的 現象把握 및 기타 여러가지 問題들에 內包되어 있는 非線型特性에 대한 규명과 그가 미치는 効果들을 硏究, 檢討할 必要性이 크게 대두되고 있는 것도 또한 事實이다.

學術的 見地에서는 應用數學, 動力學 및 振動論, 天體力學, 彈性論, 粘彈性論, 自動制御, 流體力學 및 空氣力學, 熱傳達, 回路理論, 系統解析, 飛機動力學 및 기타 거의 모든 工學分野에서 非線型系로서의 硏究가 활발히 진행되고 있어서, 거의 모든 學術誌에서 非線型問題에 관한 論文들을 보게 될 것이다.

일반적으로 自然界에서 일어나는 振動現象은 엄밀히 말해서 모두 非線型振動이라고 하여도 過言은 아닐 것이다. 그러나 이들의 振動現象을 解析的으로 취급하는데 있어서 그 解를 구하기가 극히 困難하거나, 嚴密解를 구할 수가 없으므로 不得已 어떤 安定한 平衡狀態附近으로 부터의 微小振動으로 假定하여 매우 近似的이긴 하나 解析하기 쉽도록 하여 理論解를 얻을 수 있게 한 것이 線型振動論이다. 그러나 工學의 進步에 따라 線型인 微小振動으로는 解析이나 說明할 수 없는 振動現象에 부딪치게 되었고, 또한 좀 더 正確한 計算結果가 필요하게 되었다.

第2次世界大戰을 契機로 하여 非線型振動問題는 急速度로 發展되었으며, 특히 宇宙開發과 더불어 활발한 硏究가 이루어졌다. 그 方向도 純粹한 數學的 立場에서 非線型微分方程式論으로 다루는 경우와 應用의 立場에서 近似的인 解나, 解의 特性만을 고려하는 2 方向으로 나누어 생각할 수 있겠다.

本講座에서는 主로 應用의 觀點에서 非線型振動의 基本的 特性의 概要와 初步的인 解析方法을 紹介함으로써 우리나라의 現時點에서 意義가 있을 것으로 생각되어 이런 기회를 마련하여 보았다. 배경으로서는 大學課程의 微分方程式, 機械振動論 및 行列式 및 行列에 대한 基本計算法등을 이수한 것으로 前提하겠으나, 될수록 깊이 파고 들어가거나 복잡한 부분은 피하고, 한편 記憶을 되살릴 必要가 있다고 생각되는 부분은 다시 說明을 붙이도록 하겠다.

워낙 非才 淺學하여 충분한 解說이나 平易한 說明을 할 수 있으리라고 期待하지는 못하는 바이지만 여러 會員들께서 非線型問題에 관심을 가지게 될 機會가 되고 또한 나아가서 앞으로 많은 硏究의 契機가 되면 多幸이

* 正會員, 서울大學校 工科大學

라 생각한다. 連載중에 많은 지도편달있기를 부탁드린다.

### 1.1 非線型振動의 보기

그림 1과 같이 스프링에 의해서 固定프레임에 매달려 있는 質點의 上下運動은 스프링의 質量을 無視할 때 Newton 의 第2法則에 의하여, 그 自由振動(外力이 作用하지 않을 때)의 運動方程式은

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1.1}$$

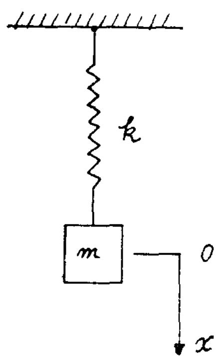


그림 1

으로 표시된다. 여기서

$x$: 靜的平衡位置를 原點으로 하고, 鉛直下方으로 취한 質點의 좌표,

$m$: 質點의 質量

$k$: 스프링常數

이며, 또한

$$\omega^2{}_n=\frac{k}{m} \tag{1.2}$$

라고 한다. 그런데 靜的平衡位置란 荷重을 받지 않는 自由길이인 스프링에 質量 $m$ 에 대응하는 무게를 無限히 徐徐히 매달때 이루어지는 平衡位置를 말하며, 質點의 무게와 스프링力이 平衡되어 있다. 式 (1.1)은 常數係數인 線型常微分方程式으로서 一般解法에 따라도 쉽게 그 解를 쉽게 구할 수가 있겠으나, $x=A\sin\omega_n t$ 및 $x=B\cos\omega_n t$ 가 각각 解가 됨을 代入하여보면 곧 알 수가 있다. 따라서 線型微分方程式에 대한 重疊의 原理 (principle of superposition)에 따라 그 一般解는

$$x=A\sin\omega_n t+B\cos\omega_n t \tag{1.3}$$

이며, $A$ 및 $B$는 次期條件에 따라 정해지는 상수이다.

速度에 比例하는 減衰力이 上記의 系에 作用하고 있을 때의 自由振動에도 똑같이 常數係數의 同次常微分方程式의 一般解法에 따른다. 이 系에 外力이 作用할 때는 自由振動에 對한 解와 外力에 따른 特殊解를 따로이 구하여 이들을 重疊함으로써 一般解를 구하게되며, 여러 外力이 作用할 때에도 각각의 外力에 대한 特殊解들을 따로따로 구하고 그 結果를 自由振動에 대한 解에 重疊하여 구하게 된다.

그러나 實際에 있어서 復原力인 스프링力이나 減衰力이 각각 變位나 速度에 比例한다는 것은 理想的인 特殊한 경우이고, 嚴密히 말해서 變位나 速度 또는 時間까지를 포함하는 複雜한 函數로 표시되는 것이 도리어 一般的이라 하겠으며, 한 보기로서 스프링常數를 實驗室에서 정확히 測定하여 보면 과장이 甚하였지만 그림 2와 같음을 알게 될 것이다. 따라서 이 系의 運動은 非線型特性을 가지게 되어 (1.3)式으로 표시되는 運動과의 差

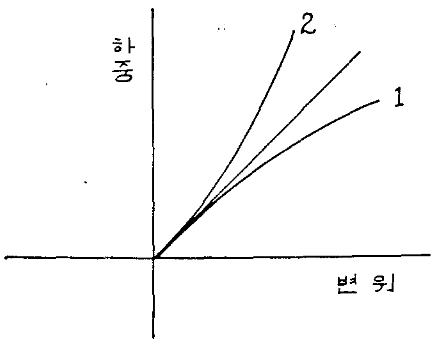


그림 2

異를 관찰할 수 있게 된다. 이때 스프링力은 線型部分과 區別하여 표현하면 $kx+\mu F(x)$로 놓을 수 있으며, 運動方程式은

$$m\ddot{x}+kx+\mu F(x)=0, \tag{1.4}$$

또는 單位質量에 대하여

$$\ddot{x}+\omega^2{}_n x+\mu f(x)=0,\ f(x)=\frac{F(x)}{\mathrm{m}} \tag{1.5}$$

로 되어 非線型微分方程式으로 支配되는 系, 즉 非線型振動系가 된다. 또한 式 (1.5)를 線型에 대한 一般解法을 適用하여 보면 그 嚴密解를 구하는데 실패하기가 일쑤일 것이다. 이럴 때 工學的 見地에서 큰 誤差가 없다면 $\mu f(x)$를 無視하여 式 (1.1)과 같은 線型振動으로 취급하는 것은 前述한 바와 같이 解析的인 취급이 용이하기 때문이고, 物理的으로는 安定한 平衡狀態에 가까운 微小振動을 假定하는 非線型振動에 대한 近似解가 된다.

또한 이 系의 特徵은 重疊의 原理를 適用할 수 없는 點이고 또한 嚴密解를 구할 수 있는 경우가 극히 적어서 大部分의 경우에는 그 特殊解를 구할 정도이며, 그것도 近似解에 지나지 않는다.

現況으로는 定性的인 積分을 얻는 位相幾何學的解法과 定量的으로 近似解를 구하는 解析的近似解法 및 analog computer나 digital computer에 의한 computer method의 3主流로 나누어 發展되고 있으나, computer method는 計算機의 構造, 性能 및 programing 등 實物에 대한 實際的인 訓練이 수반되어야 理解가 될 것이므로 이번 機會에는 割愛하기로 하고, 앞으로는 앞의 方法에 대하여 解說하기로 하겠다. 非線型系의 特性을 좀 더 理解하는데 도움이 되도록 몇가지 보기를 들어보기로 하겠다.

**〔보기 1〕 單振子**

우리가 잘 알고 있는 單振子(그림 3)의 運動方程式은 O點에 관한 모우멘트 平衡으로 부터

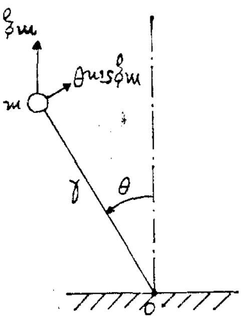


그림 3

$$\ddot{\theta}(t)+\frac{g}{l}\sin\theta(t)=0 \tag{1.6}$$

을 얻는다. 여기서

$l$ : 單振子의 길이(一定),

$g$ : 重力加速度.

이 式은 非線型이다. 그 까닭은 쉽게 말해서 $\theta=\theta_1$ 및 $\theta=\theta_2$가 각각 式 (1.6)를 만족하고 있을 때 $(\theta_1+\theta_2)$는 $\sin\theta_1+\sin\theta_2\fallingdotseq\sin(\theta_1+\theta_2)$이므로 윗 式을 만족시키지 못하기 때문이다. 그러나 $\theta$가 작을 때는

$$\sin\theta\fallingdotseq\theta$$

로 近似시킬 수가 있다. 이 式은 0.3rad=17.2°에서 1.5%의 오차가 있다. 따라서 運動方程式은

$$\ddot{\theta}(t)+\omega^2{}_n\theta(t)=0,\quad \omega^2{}_n=\frac{g}{l} \tag{1.7}$$

이 되며, 그 解는 式 (1.1)에 대한 解와 같이

$$\theta(t)=C_1\sin\omega_n t+C_2\cos\omega_n t=A\cos(\omega_n t+\phi) \tag{1.8}$$

가 되며, $C_1$ 및 $C_2$ 또는 $A$ 및 $\phi$는 初期$(t=0)$에서의 角變位 $(\theta)$, 및 角速度 $(\dot{\theta})$에 의해서 決定되는 常數들이다. 한편 $\omega_n$은 初期條件과는 關係없이 系의 特性 즉 振子의 길이 $l$만에 따라 결정되는 一定한 값을 가진다. 그러나 $\theta$가 커져서 1$rad$정도의 크기가 되면 $\sin\theta\fallingdotseq\theta$로는 誤差가 커지며, 16%의 오차) 따라서 級數展開의 처음 第2項까지 취하여

$$\sin\theta\fallingdotseq\theta-\frac{\theta^3}{6}$$

으로 하면 0.8%정도의 오차 밖에 없게 된다. 이때의 運動方程式은

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}\right)=0 \tag{1.9}$$

이 되며, 非線型微分方程式이 된다. 따라서 重疊의 原理를 適用할 수 없음은 勿論이려니와 角振動數도 式 (1.8)에서와 같이 一定하지 않고, 즉 等時性이 維持되지 않으며, 式 (1.8)에서 振幅을 나타내는 $A$에 따라서도 變하게 된다. 즉 角振動數가 初期條件에 따라 變하게 된다. 式(1.9)도 近似式이었으므로 原方程式인 式 (1.6)으로 부터 直接 解를 구한다면 楕圓函數라고 稱하는 初等函數로는 표시할 수 없는 特殊函數의 導入, 에너지 積分 및 O를 中心으로 하는 完全한 回轉運動등의 복잡하고, 난해한 數學的인 問題들이 서로 얽히게 된다.

**〔보기 2〕 集中質量을 가지는 弦의 振動**

그림 4와 같이 길이 $2a$인 弦이 張力 $S$로 잡아당겨져 있고, 그 中央에 集中質量 $m$인 質點이 있다. 弦과 質點에 작용하는 重力을 無視 할때 水平方向의 振動을 생

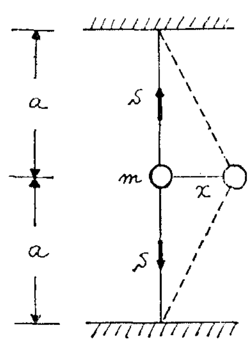


그림 4

각하자.

質點 $m$ 이 鉛直線上의 初期位置로 부터 $x$ 만큼 오른쪽으로 水平方向의 變化를 시켰을 때의 弦의 變形度 $\varepsilon$ 은

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{a}$$

이다. 이때 弦에 作用하는 張力은 Hooke 의 法則에 따라 $S+AE\varepsilon$ 이 된다. 여기서 $A$ 는 弦의 斷面積이고, $E$ 는 弦의 彈性係數이다. 따라서 質點에 作用하는 $x$ 方向의 復原力은 張力의 水平成分이고, 上, 下部의 弦에 의한 것이 크기가 같으므로

$$\frac{2(S+AE\varepsilon)x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

가 된다. 지금 $\frac{x}{a}$ 가 작아서 3제곱以上의 高次項을 생략한다면 運動方程式은

$$m\ddot{x}+\frac{2S}{a}x=0 \tag{1.10}$$

이 되어 單振子에 대한 線型方程式과 같은 꼴이 되나, $\frac{x}{a}$ 가 그다지 작지 않아서 3次의 項까지를 고려하여야 한다면

$$m\ddot{x}+\frac{2S}{a}x+\frac{AE}{a^3}\left(1-\frac{S}{AE}\right)x^3=0 \tag{1.11}$$

으로 되어 質點은 非線型振動을 하게 됨을 알 수가 있다.

〔보기 3〕 **拋物體의 運動**

우리가 잘 알고 있는 拋物體의 運動에서 速度의 제곱에 比例하는 空氣抵抗을 고려할 때를 생각하기로 한다. 지금 質量 $m$ 인 拋物體의 高度變化가 작을 때를 前提한다면 空氣密度의 變化를 無視할 수가 있을 것이며 그림 5의 自由物體圖로 부터 $x$ 및 $y$ 方向에 대한 運動方程式으로 다음을 얻게 된다.

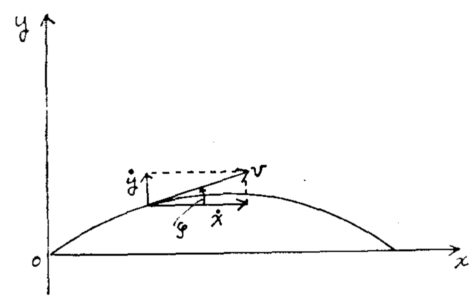

그림 5

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=-kv^2\cos\phi \\ &=-k\dot{x}^2\left[1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{1/2} && (a) \\ m\ddot{y}&=-kv^2\sin\phi-mg \\ &=-k\dot{x}\dot{y}\left[1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{1/2}-mg && (b) \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

여기서

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{x}^2\left[1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right],$$

$$\cos\phi=\frac{\dot{x}}{v}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=\left[1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{-1/2},$$

$$\sin\phi=\frac{\dot{y}}{v}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\left[1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{-1/2}$$

이다.

그런데 方程式 (1.12)는 매우 풀기가 힘들므로 軌道의 기울기에 대한 近似値인 $\dot{y}/\dot{x}$ 의 값이 작다고 假定할 수 있는 問題로 제약한다면

$$\left[1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{1/2}\fallingdotseq 1$$

로 近似시킬 수가 있다. 따라서 式 (1.12)는

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=-k\dot{x}^2 && (a) \\ m\ddot{y}&=-k\dot{x}\dot{y}-mg && (b) \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

로 되나, (a)로 부터 구해질 $x$ 가 $y$ 에 關한 關係式인 (b)에 들어가 있는, 즉 couple 되어 있는 非線型聯立微分方程式이다. 그러나 이들은 變數分離法에 의하여 쉽게 구할 수가 있다. 지금 初期條件이 $t=0$때

$$\left.\begin{aligned} x&=0,\ \dot{x}=\dot{x}_0 && (a) \\ y&=0,\ \dot{y}=\dot{y}_0 && (b) \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

로 주어졌다고 하면, 式 (1.13)의 (a)는

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2}=-\frac{k}{m}dt.$$

로 된다. 積分하면

$$-\frac{d\dot{x}}{\dot{x}}=-\frac{k}{m}t+C_1$$

이 되고, 여기에 初期條件, $t=0$ 때 $\dot{x}=\dot{x}_0$ 를 적용하면

$$C_1=-\frac{1}{\dot{x}_0}$$

이 된다. 따라서

$$\dot{x}=\frac{\dot{x}_0}{\frac{k\dot{x}_0}{m}t+1} \tag{1.15}$$

이것을 式 (1.13)의 (b)에 代入하면

$$m\ddot{y}+\frac{k\dot{x}_0}{\frac{k\dot{x}_0}{m}t+1}\dot{y}=-mg$$

또는

$$\ddot{y}+\frac{1}{t+\frac{m}{k\dot{x}_0}}\dot{y}=-g \tag{1.16}$$

로써, 線型이므로 解는 重疊의 原理에 따라 $g=0$으로 놓은 同次인 경우의 解와 $g\neq 0$때의 特殊解의 合으로 구할 수 있다. 同次解에 대하여는 式 (1.16)으로 부터 $g=0$으로 놓으면

$$\frac{d\dot{y}}{\dot{y}}=-\frac{dt}{t+\dfrac{m}{k\dot{x}_0}}$$

를 積分하여

$$\log\dot{y}=\log\left(t+\frac{m}{k\dot{x}_0}\right)^{-1}+\log C_2$$

또는

$$\dot{y}_H=\frac{C_2}{t+\dfrac{m}{k\dot{x}_0}} \qquad (1.17)$$

여기서 同次解를 $\dot{y}_H$로 표시하였다.

特殊解를 구하기 위하여

$$\dot{y}_P=C_3\left(t+\frac{m}{k\dot{x}_0}\right)$$

라고 假定하면, 式 (1.16)에 代入하여

$$C_3=-\frac{g}{2}$$

가 되어, 결국

$$\dot{y}_P=-\frac{g}{2}\left(t+\frac{m}{k\dot{x}_0}\right) \qquad (1.18)$$

따라서

$$\dot{y}=\dot{y}_H+\dot{y}_P=\frac{C_2}{t+\dfrac{m}{k\dot{x}_0}}-\frac{g}{2}\left(t+\frac{m}{k\dot{x}_0}\right)$$

에 $\dot{y}$에 관한 初期條件으로 부터

$$C_2=\frac{m}{k\dot{x}_0}\left(\dot{y}_0+\frac{mg}{2k\dot{x}_0}\right)$$

를 얻게되므로

$$\dot{y}=\frac{\dot{y}_0+\dfrac{mg}{2k\dot{x}_0}}{\dfrac{k\dot{x}_0}{m}t+1}-\frac{mg}{2k\dot{x}_0}\left(\frac{k\dot{x}_0}{m}t+1\right) \qquad (1.19)$$

다음에 式 (1.15)를 積分하고, $x$에 대한 初期條件을 適用하면

$$x=\frac{m}{k}\log\left(\frac{k\dot{x}_0}{m}t+1\right) \qquad (1.20)$$

를 얻고, 式 (1.19)를 積分하고 $y$에 대한 初期條件을 代入하면

$$y=\frac{m}{k\dot{x}_0}\left(\dot{y}_0+\frac{mg}{2k\dot{x}_0}\right)\log\left(\frac{k\dot{x}_0}{m}t+1\right)-\frac{mg}{2k\dot{x}_0}\left(\frac{k\dot{x}_0}{2m}t^2+t\right) \qquad (1.21)$$

가 된다.

그러나 이 問題의 嚴密解는 式 (1.12)에서 $\frac{k}{m}$를 $k$로 代置한 경우에 대하여 Euler가 구했으며

단,

$$x=\frac{1}{k}\int_p^{p_0}\frac{dp}{\Phi(p)},\quad y=\frac{1}{\mathrm{k}}\int_p^{p_0}\frac{p\,dp}{\Psi(p)} \qquad (1.22)$$

단,

$\alpha$: $t=0$때의 初期速度가 $x$軸과 이루는 角,

$p$: $p=\dfrac{dy}{dx}(=\tan\phi)$,

$\Phi(p)=2\int\sqrt{1+p^2}\,dp$,

$\Psi(p)=\dfrac{g}{k\dot{x}_0\cos^2\alpha}+\Phi(p_0)-\Phi(p)$

와 같다. 式 (1.22)의 積分은 簡單히 計算할 수가 없으며, 電子計算機에 의한 數値積分에 의할 수 밖에 없다.

### 1.2 餘備事項

#### 〔1〕 1階聯立微分方程式

高階인 微分方程式을 1階聯立微分方程式으로 고쳐서 표시하는 方法을 보기로서 說明하기로 한다.

〔보기 1〕 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$, $a, b$는 常數.

지금

$$x=x_1$$
$$\dot{x}(=\dot{x}_1)=x_2$$

라고 놓으면, 原式으로부터

$$\ddot{x}=\dot{x}_2=-a\dot{x}-bx=-ax_2-bx_1$$

이 되어 주어진 微分方程式은

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-bx_1-ax_2$$

인 1階聯立微分方程式으로 고칠 수가 있다.

이것은 行列의 곱셈에 대한 定義를 利用하면

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -b & -a\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}$$

의 꼴로 표시된다. 또한

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\{x\},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -b & -a\end{pmatrix}=[a]$$

로 표시하면 윗 式은

$$\{\dot{x}\}=[a]\{x\} \qquad (1.23)$$

가 된다.

〔보기 2〕 $\dfrac{d^3y}{dt^3}+6\dfrac{d^2y}{dt^2}+11\dfrac{dy}{dt}+6y=0$

지금

$$y=x_1$$

$$\dot{y}=x_2$$
$$\ddot{y}=x_3$$

이라고 놓으면, 行列을 利用하여

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}$$

인 꼴로 표시되는 1階聯立微分方程式으로 표시된다.

앞으로 特別한 言及이 없는限 式(1.23)의 꼴로 표시되는 1階聯立微分方程式은 高階聯立微分方程式으로 부터 얻어진 것이라고 생각하기로 하겠다.

〔2〕 固有値 및 固定벡터

行列 $[a]$ 및 列行列 (또는 벡터) $\{x\}$, 즉

$$[a]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots a_{nn}\end{bmatrix},\quad \{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{Bmatrix}$$

사이에 어떤 常數 $\lambda$에 대하여

$$[a]\{x\}=\lambda\{x\} \tag{1.24}$$

인 關係가 成立할 때 이 $\lambda$를 行列 $[a]$의 固有値라고 한다. 式 (1.24)는 또한

$$[a-\lambda I]\{x\}=0 \tag{1.25}$$

으로 쓸 수 있다. 여기서 $[I]$는 對角線成分이 모두 1이고, 나머지는 모두 0인 單位行列이다. 이 式을 行列算法에 의해서 풀어 쓰면 $\{x\}$의 成分, $x_1$, $x_2,\cdots$, $x_n$에 대한 常數項이 없는 $n$개의 1次代數方程式이다. 이들 $x_1$, $x_2,\cdots$, $x_n$이 모두 0이 아닌 解를 가지기 위해서는

$$\det\ (a-\lambda I)=0 \tag{1.26}$$

또는

$$\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\ \cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\cdots\cdots\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn}-\lambda\end{bmatrix}=0$$

을 만족하여야 한다. 이 行列式은 $n$次의 代數式이며, 따라서 方程式 (1.26)은 一般的으로 $n$개의 다른 根 $\lambda_i$ $(i=1,2\cdots n)$를 얻게 된다. 이 각각의 $\lambda_i$를 式 (1.25)에 代入하여 얻어지는 $\{x\}_i$를 $\lambda_i$에 대한 固有벡터라고 부르며, 서로 直交함이 밝히어져 있다. $\lambda_i$가 重複根을 가지는 경우도 있으나 紙面上 割愛하기로 한다.

〔보기〕 $[a]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 6 & -11 & 6\end{bmatrix}$의 固有値 및 固有벡터.

$$\det(a-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 6 & -11 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$$
$$=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

으로 부터

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$$

의 3 固有値를 얻는다.

$\lambda_1=1$을 式(1.25)에 代入하여

$$[a-\lambda I]\{x\}_1=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 6 & -11 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{Bmatrix}$$
$$=\begin{Bmatrix}-x_{11}+x_{21}\\ -x_{21}+x_{31}\\ 6x_{11}-11x_{21}+5x_{31}\end{Bmatrix}=0$$

을 얻으며, 처음 2 方程式으로 부터

$$x_{11}=x_{21}=x_{31}$$

인 關係가 구해지고, 이는 第 3의 方程式을 自動的으로 만족하게 된다. 즉 未知數 보다 方程式의 數가 작은 경우로서 唯一한 解를 얻을 수가 없는 경우이다. 지금 $x_{11}=1$로 취하면 $\lambda_1$에 대한 固有 벡터로서

$$\{x\}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$$

를 얻는다. 똑같은 方法으로

$$\{x\}_2=\begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{Bmatrix},\ \{x\}_3=\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 9\end{Bmatrix}$$

인 $\lambda_2$ 및 $\lambda_3$에 대응하는 固有벡터를 얻게되며, 이들은

$$[a]\{x\}_1=\{x\}_1,\ [a]\{x\}_2=2\{x\}_1,$$
$$[a]\{x\}_3=3\{x\}_3$$

을 만족할 것이다.

3固有벡터 $\{x\}_1$, $\{x\}_2$ 및 $\{x\}_3$을 列로 하는 行列

$$[b]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

를 생각하고, 그 逆行列 $[b]^{-1}$를 구하면

$$[b]^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -3 & 4 & -1\\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

가 되고, 이때

$$[b]^{-1}[a][b]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \tag{1.27}$$
$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

가 됨은 興味있는 일이다.

### 〔3〕 線型變換

$$\{\dot{x}\}=[a]\{x\},\ [a]\text{는 常數行列} \qquad (1.28)$$

로 주어진 어떤 運動方程式을 1階聯立微分方程式으로 표시한 것이라고 생각하여, $x(t)$로부터 $u(t)$로의 線型變換

$$\{x\}=[b]\{u\} \qquad (1.29)$$

를 시키기로 한다. 단, 行列 $[b]$는 常數行列이며, $\det(b)\fallingdotseq 0$이다. 이때 原方程式은

$$[b]\{\dot{u}\}=[a][b]\{u\}$$

고로

$$\{\dot{u}\}=[b]^{-1}[a][b]\{u\}=[c]\{u\} \qquad (1.30)$$

단,

$$[c]=[b]^{-1}[a][b],$$

로 變換된다. 例컨대 前項의 〔보기〕에서 취급하였든 $[a]$ 즉,

$$[a]=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 6 & -11 & 6\end{pmatrix}$$

인 경우에는 式 (1.28)은

$$[b]=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$$

인 變換行列을 가지는

$$\{x\}=[b]\{u\}$$

에 의하여 式 (1.27)를 참조하면

$$\{u\}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\{u\} \qquad (1.31)$$

즉,

$$\begin{aligned} u_1&=u_1\\ u_2&=2u_2 \qquad (1.32)\\ u_3&=3u_3\end{aligned}$$

으로 되어, $u_1$, $u_2$ 및 $u_3$에 대한 微分方程式을 따로 따로 풀 수 있게 되므로 解를 구하기가 쉽다. 式 (1.27)과 같이 原 行列을 對角線化시킨 꼴을 canonical form이라고 稱한다. 固有値가 重複되어 있거나, 複素數인 경우에는 複雜하므로 言及을 避하기로 하겠다. 이들 경우에 대하여는 第2章에서 結果만을 紹介하게 될 것이며, canonical form의 一般的 性質에 대해서는 參考文獻〔10〕이나, 主軸問題를 다룬 책을 참고하여 주기 바란다.

### 〔4〕 運動系의 種類

1 自由度系의 非線型振動方程式의 一般形은

$$\ddot{x}+f(x,\ \dot{x},\ t)=0 \qquad (1.33)$$

일 것이다. 이것을 1階聯立方程式꼴로 바꾸면

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-f(x_1,\ x_2,t) \qquad (1.34)\end{aligned}$$

가 된다. 좀 더 一般的으로는

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=X_1(x_1,\ x_2,t)\\ \dot{x}_2&=X_2\ (x_1,\ x_2,\ t) \qquad (1,35)\end{aligned}$$

인 꼴이 된다. 右邊의 函數 $X_1$, $X_2$에 $t$가 直接 獨立變數로 포함되지 않는 경우를 自律系(autonomous system), $t$를 直接 포함하는 것을 非自律系 (nonautonomous system)이라고 부르며 前者에는 自動振動, 自勵振動(self-excited system)등이 속하고, 後者에는 强制振動이 속한다. 本講座에서는 많은 部分을 自律系에 限해서 說明하고, 非自律系에 대하여서는 簡略하게 言及하고 넘어갈 豫定이다.

## 參 考 文 獻

1) Aggarwal, J.K., Notes on Nonlinear Systems, Van Nostrand, 1972.
2) Meirovitch, L., Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill, 1970.
3) Minorsky, N., Nonlinear Oscillations, Van Nostrand, 1962.
4) Rosenberg, R.M., On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom, in "Advances in Applied Mechanics", Vol.9, pp. 155~242, Academic Press, 1966.
5) 樋本義一, 非線型振動論, 應用力學講座, 第8卷, 共立社.
6) 淸水辰次郞, 非線型振動論, 培風館, 1965.
7) 前澤成一郞, 非線型振動解析의 一般手法, 日本機械學會 第305回 講習會敎材.
8) Coddington, E.A. and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, 1955.
9) Struble, R.S., Nonlinear Differential Equation, McGraw-Hill, 1962.
10) Hochstadt, H. Differential Equations, A Modern Approach, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

以上은 1, 2章의 原稿作成에 參考로 한 것이며, 3, 4章에서도 繼續 參考資料의 一部로서 使用하고저 한다.