

< 論 文 >

多孔質媒體內的 流體流動

李 忠 求\* · 趙 星 煥\*\*

(1975. 12. 27 接受)

Fluid Flow in a Two-Layer Porous Medium

Choong Gu Lee, Sung Hwan Cho

Abstract

Groundwater flow in a two-layer aquifer is studied theoretically and experimentally. Nonlinear differential equations are independently linearized for the upper and the lower layer, and approximate solutions are obtained. Fine sands and coarse sands are used in experiments. For steady flow, theoretical solution agrees excellently with experimental results. For unsteady flow, however, agreement is not so good, because the experimental conditions do not match with theoretical assumptions.

要 約

두개의 서로 다른 性質을 가진 두층으로 된 帶水層內에서의 地下水流動에 關하여 理論 및 實驗에 의하여 研究하였다. 非線型微分方程式을 各層에 對하여 線型化하여 近似解를 求하였다. 實驗은 굵은 모래와 잔모래를 使用하였으며, 定常狀態와 非定常狀態의 흐름을 모두 취급하였다. 定常흐름의 경우 實驗과 理論은 매우 잘 一致하였으나, 非定常 흐름의 경우에는 약간의 誤差가 있었다. 그 誤差는 實驗條件이 理論에서의 假定을 滿足하지 못하였기 때문에 解釋된다.

1. 序 論

多孔質媒體內에서의 流體流動現象은 많이 研究되어 왔다. 帶水層內의 地下水流動[1~3], 또는 油田에서의 原油流動, 多孔質媒體內의 氣體流動 [4] 등은 모두 비슷한 現象이다.

大部分의 地下水流動研究는 均質帶水層(homogeneous aquifer)을 假定하였으며 그 解나 實驗結果가 많이 알려져 있다[1]. 그러나 帶水層이 서로 다른 性質을 가진 두개의 層으로 된 경우에 대하여서는 Cho [3]에 의하여 理論적으로 다루어진 외에는 취급되지 않았으며, Cho

< 記 號 >

$a$ : 식 (11)에 의해 定義된 帶水層의 性質  
 $h$ : 水頭  
 $k$ : 透水係數  
 $L$ : 층길이  
 $m$ : 比收率  
 $Q$ : 單位幅當流量  
 $S(t)$ : 水頭가 下層帶水層의 높이와 같아지는 位置  
 $t$ : 時間

$x$ : 水平距離  
 $\alpha$ :  $a_1/a_2$ 로 定義된 無次元數  
 (下添字)  
 $i$ : 最初條件  
 $L$ :  $x=L$ 일 때의 條件  
 $l$ : 下層帶水層 (잔모래)  
 $o$ :  $x=0$  일 때의 條件  
 $u$ : 上層帶水層 (굵은 모래)  
 1: 水頭가 下層帶水層의 높이보다 낮은 경우  
 2: 水頭가 下層帶水層의 높이보다 높은 경우

\* 正會員, 忠州工業專問學校

\*\* 正會員, 陸軍士官學校

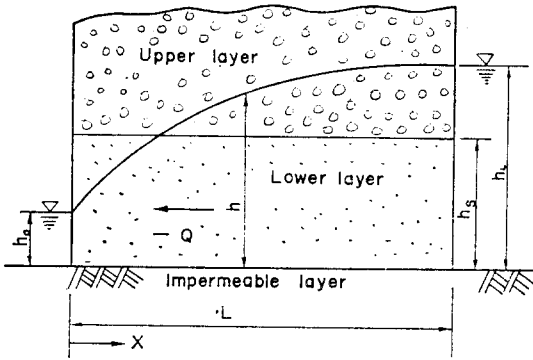


Fig. 1. Groundwater flow: Steady flow

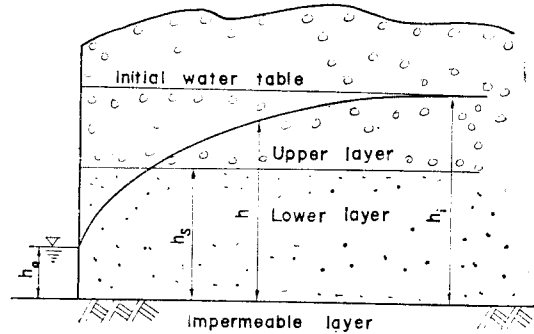


Fig. 2. Groundwater flow to surface reservoir: unsteady flow

[3]는 實驗과 比較하지 않았다.

本研究은 서로 다른 性質을 가진 두개의 層으로 된 帶水層內에서 물의 定常 및 非定常 흐름에 대한 理論 및 實驗에 의한 研究이다. 被壓帶水層(confined aquifer)內에서의 地下水의 非定常流動은 數學的으로 線型이므로 취급이 比較的 簡單하나, 非被壓帶水層(unconfined aquifer)內의 地下水流動은 數學的으로 非線型이므로 正解를 구하기가 어렵다. 이 論文에서는 非線型微分方程式을 線型化하므로써 近似解를 구하였다.

地下水流動을 支配하는 微分方程式은 熱傳導方程式과 유사하므로 理論的으로 취급함에 있어 差異가 없으며, 따라서 簡單한 地下水流動의 實驗裝置를 利用하여 非線型熱傳導問題의 解를 구할 수 있을 것이다. 이 論文에서는 두층으로 된 경우만을 취급하였으나 삼층 이상의 帶水層에 대하여서도 같은 方法으로 취급할 수 있다.

2. 理 論

2.1. 定常흐름

多孔質媒體內에서의 流體流動速度는 Darcy의 法則에 따른다. 즉

$$V = -kfh \tag{1}$$

$k$ 는 媒體 또는 帶水層의 透水係數(permeability coefficient),  $h$ 는 水頭,  $V$ 는 流動速度이다. 一符號는 流動方向이 水頭가 減少하는 方向과 一致함을 나타낸다. 非被壓帶水層內에서의 單位幅當 水平方向의 流量  $Q$ 는

$$Q = -\frac{\partial h}{\partial x} \int_0^A k(z) dz \tag{2}$$

式 (2)에서 水頭  $h$ 가 下層帶水層의 높이  $h_s$ 보다 작을 때와 클 때를 區分하여야 한다. (그림 1)

$$h < h_s \text{ 일 때 } Q = -k_i h \frac{\partial h}{\partial x} \tag{3a}$$

$$h > h_s \text{ 일 때 } Q = -k_i h_s \frac{\partial h}{\partial x} - k_u (h - h_s) \frac{\partial h}{\partial x} \tag{3b}$$

定常흐름의 경우 流量  $Q$ 는 一定하므로 式 (3)을 積分하고 境界條件

$$x=0 \text{ 일 때 } h = h_0 < h_s \tag{4a}$$

$$x=L \text{ 일 때 } h = h_L > h_s \tag{4b}$$

를 代입하면

$$h_0 \leq h \leq h_s \text{ 일 때 } -2Qx = k_i (h^2 - h_0^2) \tag{5a}$$

$$h_s \leq h \leq h_L \text{ 일 때 } -2Q(L-x) = 2k_i h_s (h_L - h) + k_u (h_L^2 - h^2) + 2k_u h_s (h_L - h) \tag{5b}$$

式 (5)를 無次元項으로 表示하면

$$\frac{h_0}{h_L} \leq \frac{h}{h_L} \leq \frac{h_s}{h_L} \text{ 일 때 } -\left(\frac{2QL}{h_L^2 k_i}\right) \left(\frac{x}{L}\right) = \left(\frac{h}{h_L}\right)^2 - \left(\frac{h_0}{h_L}\right)^2 \tag{5a}$$

$$\frac{h_s}{h_L} \leq \frac{h}{h_L} \leq 1 \text{ 일 때 } -\left(\frac{2QL}{h_L^2 k_i}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) = 2\left(\frac{h_s}{h_L}\right) \left(1 + \frac{k_u}{k_i}\right) \times \left(1 - \frac{h}{h_L}\right) + \frac{k_u}{k_i} \left\{1 - \left(\frac{h}{h_L}\right)^2\right\} \tag{5b}$$

2.2. 非定常흐름

그림 2와 같이 두개의 層으로 된 非被壓帶水層內에서의 非定常흐름을 생각해 보자. 解를 구하기 위하여 다음과 같은 假定을 한다.

(가) 帶水層은 無限히 넓고 各層은 均質(homogeneous)하다.

(나) 帶水層은 不浸透性의 水平臺 위에 있다.

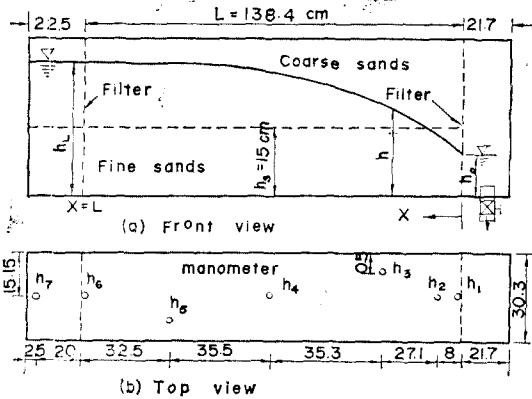


Fig. 3. Experimental setup

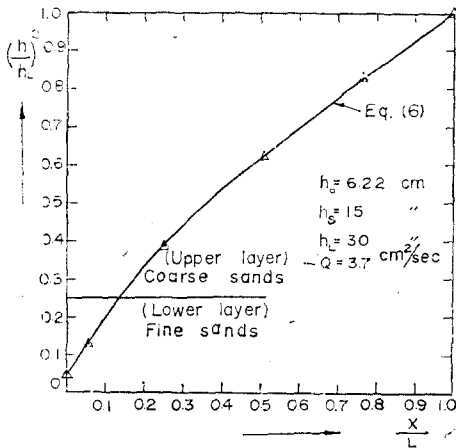


Fig. 4. Groundwater flow in a two-layer aquifer: steady flow

(다) 흐름의 平均速度는 Darcy의 法則에 따르며, 速度의 垂直成分은 無視된다. 즉, 一次元흐름으로 假定한다.

(라) 帶水層에서 나온 물은 즉시 排出되어 貯水池로 흘러 들어 가며, 貯水池의 水位는 一定하게 維持된다.

(마) 最初의 水位는 一定하다.

이 假定들은 Yeh[2] 또는 Cho[3]의 假定과 같다.

式 (3)에서 流量公式는 非定常흐름의 경우에도 適用된다. 따라서 帶水層內的 물의 質量保存에 의하여

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = m \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7)$$

이다. 여기서  $m$ 은 帶水層의 比率率(specific yield)이다. 이제 식 (3)을 식 (7)에 대입하고 整理하면 [3]

$$k_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) = m_1 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad 0 < S(t) < x, \quad t > 0 \quad (8a)$$

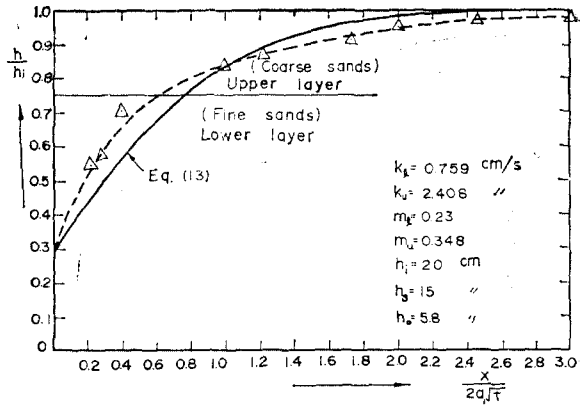


Fig. 5. Unsteady groundwater flow in a two-layer aquifer

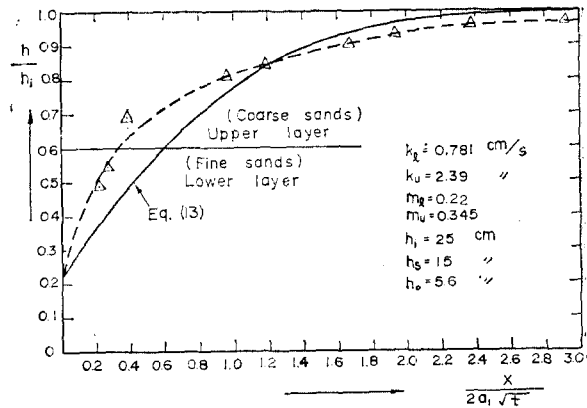


Fig. 6. Unsteady groundwater flow in a two-layer aquifer

$$k_u \frac{\partial}{\partial x} \left( h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + (k_1 - k_u) h_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} = m_u \frac{\partial h_2}{\partial t},$$

$$x > S(t), \quad t > 0 \quad (8b)$$

初期條件과 境界條件은

$$t = 0, \quad x > S(t) \quad \text{일 때} \quad h_2 = h_i \quad (9a)$$

$$x = 0, \quad t > 0 \quad \text{일 때} \quad h_1 = h_0 \quad (9b)$$

$$x \rightarrow \infty, \quad t > 0 \quad \text{일 때} \quad h_2 = h_i \quad (9c)$$

$$x = S(t), \quad t > 0 \quad \text{일 때} \quad h_1 = h_2 = h_s \quad (9d)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial x} \quad (9e)$$

이다. 식 (8)의 正解는 Cho [3]에 의해 求해졌으나 實際計算이 너무 複雜하므로 實驗結果와 比較하기가 어렵

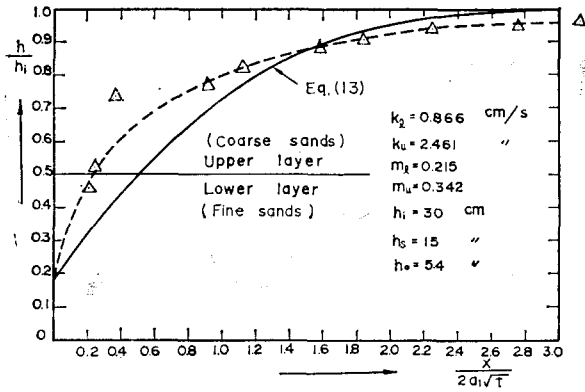


Fig. 7. Unsteady groundwater flow in a two-layer aquifer

다. 따라서 각 식을 선형화하여 近似解를 구하기로 한다. 식 (8a)에서  $h_0 < h_1 < h_s$ 이며, 식 (8b)에서  $h_s < h_2 < h_L$  이므로 각각 近似的으로 선형화하면

$$\frac{k_1(h_0+h_s)}{2} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = m_1 \frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad 0 < x < S(t) \quad (10a)$$

$$\left\{ k_u \frac{h_s+h_i}{2} + (k_l-k_u)h_s \right\} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} = m_u \frac{\partial h_2}{\partial t}, \quad x > S(t) \quad (10b)$$

가 된다. 이제

$$a_1 = \sqrt{\frac{k_1(h_0+h_s)}{2m_1}} \quad (11a)$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{k_u(h_s+h_i) + 2(k_l-k_u)h_s}{2m_u}} \quad (11b)$$

$$\alpha = a_1/a_2 \quad (12)$$

라고 하면 식 (10)의 해는 각각

$$\frac{h_1}{h_i} = \frac{h_0}{h_i} + \left( \frac{h_s}{h_i} - \frac{h_0}{h_i} \right) \frac{\text{erfc} \left( \frac{x}{2a_1\sqrt{t}} \right)}{\text{erfc} \lambda} \quad (13a)$$

$$\frac{h_2}{h_i} = 1 - \left( 1 - \frac{h_s}{h_i} \right) \frac{\text{erfc} \left( \frac{x}{2a_2\sqrt{t}} \right)}{\text{erfc} (\alpha\lambda)} \quad (13b)$$

$a_1^2$ 과  $a_2^2$ 는 動粘性係數 또는 擴散係數와 같은 次元을 가지며, 帶水層의 擴散性質이다. 식 (13)을 境界條件 (9e)에 代入하면 常數  $\lambda$ 는 다음 式에서 求할 수 있다.

$$\frac{e^{\lambda^2} \text{erfc}(\lambda)}{e^{\alpha^2 \lambda^2} \text{erfc}(\alpha\lambda)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{h_s - h_0}{h_i - h_s} \quad (14)$$

$$S(t) = 2\lambda\sqrt{a_1 t} \quad (15)$$

### 3. 實 驗

#### 3.1. 實驗裝置

實驗에 使用된 裝置는 0.5cm 두께의 평질로 만든 幅

30.3cm, 길이 182.6cm, 깊이 45.6cm인 水槽이다. 水槽 左端에서 22.5cm와 右端에서 21.7cm에 各各 filter를 設置하였으며 이 filter는 交替할 수 있도록 만들었다. 流出口는 直徑 5.08cm의 sluice valve이다. 水槽의 前面에는 유리판을 붙여서 內部狀態를 관찰할 수 있도록 하였다. 그림 3은 實驗裝置의 概略圖이다.

水槽에는 忠州市 達川江邊의 모래를 채웠다. 下層에는 10 mesh를 通過하고 60 mesh를 通過하지 못한 잔모래를 使用하고 上層에는 4 mesh를 通過하고 8 mesh를 通過하지 못한 굵은 모래를 使用하였다. 下層 잔모래의 높이는 15cm이다. 잔모래와 굵은 모래의 比收率  $m$ 과 透水係數  $k$ 는 別途로 實驗前後에 各各 測定하였다. 測定 方法은 參考文獻 [5]에 說明되어 있다.

#### 3.2. 實驗方法

##### (가) 定常흐름

그림 3의 左端쪽에서 一定한 率로 물을 供給하여 定常狀態가 되었을 때 各 manometer의 水位를 읽었다. 같은 方法으로 流量을 變化시키면서 實驗을 反復하였다.

##### (나) 非定常흐름

sluice valve를 닫고 모래 아래의 一定한 水位까지 물을 채운 후 갑자기 sluice valve를 열어서 時間에 따른 水頭의 變化를 測定하였다. 最初水位를 여러 가지로 變化시켜서 같은 實驗을 數次 反復하였다.

實驗하는 過程에서 filter를 通過할 수 있는 아주 잔 모래는 一部 물에 쓸려 내려가기 때문에 誤差가 發生하였으므로 이러한 誤差가 없어질 때까지 實驗을 反復하여 最終의 3回 實驗值의 平均값만을 使用하였다.

### 4. 結果 및 討議

實驗結果를 理論에서 얻은 式과 比較하기 위하여 無次元項으로 表示한 結果가 그림 4~7에 주어져 있다. 그림 4는 定常흐름의 경우이며 實線은 식 (6)의 값이다. 定常흐름의 實驗結果는 그림 4에서 보는 것과 같이 모두 식 (6)과 잘 一致하였다.

그림 5~7은 非定常흐름의 實驗結果를 식 (13)과 比較한 것이다. 定常흐름의 경우에 比하여 實驗結果와 식 (13)의 誤差는 큰 편이다. 測定值는 식 (13)에 比하여 filter에 가까운 쪽 ( $\frac{x}{\sqrt{t}}$ 가 작을 때)에서는 높은 水頭를 나타내고 水頭變化가 급하며 filter에서 먼 쪽

( $\frac{x}{\sqrt{t}}$ 가 큰 경우)에는 낮은 水頭를 나타내고 水頭變化가 緩慢하다.

非定常흐름의 경우 식 (13)과 測定值가 잘 一致하지 않는 이유는 다음과 같다.

(1) 定常흐름의 경우에는 垂直速度成分은 無視될 수 있으나 非定常흐름의 경우에는 특히 filter ( $x=0$ ) 근처에서는 垂直方向의 速度成分이 無視될 수 없다.

(2) 定常흐름의 경우 實驗條件은 理論에서의 假定과 잘 一致한다. 그러나 非定常흐름의 경우에는 帶水層이 無限하다고 假定하였으나 實驗裝置의 長이가 有限하여 水頭가 식 (13)의 結果보다 적게 된다.

(3) filter ( $x=0$ ) 近處에서의 急한 水頭變化率은 filter에서의 抵抗 및 表面의 抵抗에 基因하는 것으로 생각된다. 定常流의 경우에는 filter에서의 急한 水頭變化가 없으며, 또 항상 水位가 一定하므로 表面에서의 抵抗은 無視될 수 있다.

### 5. 結 論

서로 다른 性質을 가진 두층으로 된 多孔質媒體內的 流體流動에 關하여 理論 및 實驗에 의하여 研究하였다.

本 研究結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

(가) 定常흐름의 경우 식 (6)은 實驗結果와 잘 一致한다.

(나) 非被壓帶水層內에서의 非定常흐름의 問題를 各

層에 對하여 線型化하므로서 近似解를 구할 수 있다. 一次元흐름으로 假定하던 水頭  $h$ 는 無次元變數  $x/\sqrt{t}$ 만의 函數이다.

(다) 非定常흐름에서 一般的으로 理論解 식 (13)은  $x/\sqrt{t}$ 가 작을 때에는 測定值보다 작은 水頭 값을 나타내며,  $x/\sqrt{t}$ 가 클 때에는 實驗值보다 큰 水頭 값을 준다.

(라) 非定常흐름의 경우에는 垂直方向의 速度成分을 考慮하여야 좋은 結果를 얻을 수 있다.

### 參 考 文 獻

1. J. Bear, D. Zaslavsky, and S. Irmay (eds) *Physical Principles of Water Percolation and Seepage*. UNESCO, 1968.
2. W.G. Yeh "Nonsteady flow to surface reservoir," J. Hydraulics Div., Proc. ASCE. 96, NO. HY3, 609-618. 1970.
3. S.H. Cho "Unsteady Groundwater flow in a two-layer aquifer" 陸軍士官學校 論文集, 10, 286-301, 1972.
4. R.E. Kidder "Unsteady flow of gas through a semi-infinite porous medium" J. of Appl. Mech, Trans. ASME, 24, 329-332, 1957.
5. 李忠求, "多孔質媒體內的 流體흐름에 關한 研究" 檀國大學校大學院 碩士學位論文, 1974.