

## 彈性波 遲延線에 關한 研究(Ⅱ)

### A Study on the Elastic Wave Delay Line(Ⅱ)

金 宗 相\*

(Kim, Chong Sang)

#### 要 約

LiNbO<sub>3</sub>의 X카트板的 共振周波數의 溫度特性을 求하는 理論的 方法을 提案하고 計算結果 共振周波數의 溫度係數가  $-78.43 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ 임을 알았다.

#### Abstract

In this paper, temperature dependence of the resonant frequency of thickness shear mode in X cut plate of LiNbO<sub>3</sub> is theoretically analyzed.

As a result of this analysis, theoretical value  $-78.43 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$  of the temperature coefficient of resonant frequency is obtained.

#### 1. 結 論

壓電 結晶 LiNbO<sub>3</sub>는 電氣-機械的 結合係數가 크고 時日의 經過에 따른 定數變化가 거의 없으며 結晶成長이 LiTaO<sub>3</sub>에 比하여 용이하므로 遲延線의 振動子로서 適合하다.

특히 LiNbO<sub>3</sub>의 X카트板은 電氣-機械的 結合係數가 크므로<sup>1)</sup> 振動子로서는 適格이다.

그러나 LiNbO<sub>3</sub> X카트板의 共振周波數의 溫度特性은 報告되어 있지 않고 LiTaO<sub>3</sub> X카트板의 경우는 實驗值가 報告<sup>2)</sup>되어 있다.

本論文에서는 3m族 壓電結晶으로서 알려져 있지 않은 LiNbO<sub>3</sub> X카트板의 共振周波數의 溫度特性을 求하는 理論的 方法을 提案한다.

共振周波數의 溫度係數를 求하기 위해서는 電氣-機械的 結合係數를 理論的으로 유도하여야 되었고 또 振動子의 變位方向을 알아야만 電氣-機械的 結合係數를 求할 수 있었다.

電氣-機械的 結合係數는 Warner가 LiNbO<sub>3</sub> X板의

共振 및 反共振周波數를 測定함에 依하여 求한 것이 있고<sup>1)</sup> 理論的으로 明確히 求해진 것은 없으며 또한 이 振動子의 變位方向도 報告되어 있는 것이 없다.

本論文에서는 LiNbO<sub>3</sub> X카트板의 變位方向을 求하고 X軸을 中心으로 回轉한 座標變換을 通하여 新座標를 設定하고 電氣-機械的 結合係數를 明白히 解析하고 이로부터 共振周波數의 溫度係數를 求한다.

#### 2. 解 析

(1) X카트板 振動子의 變位方向.

壓電體內的 運動方程式, 靜電界의 方程式 및 壓電基本式으로부터 아래 關係式을 얻는다<sup>3)</sup>

$$c_{ijkl}^E u_{k,ii} + e_{hij} \phi_{,ki} = \rho \ddot{u}_j \quad (1)$$

$$e_{hkl} u_{k,ii} - \epsilon_{ik}^S \phi_{,ki} = 0 \quad (2)$$

여기서  $c_{ijkl}^E$ (以下  $c_{ijkl}$ 이라 한다),  $e_{hij}$ ,  $\epsilon_{ik}^S$ (以下  $\epsilon_{ik}$ 이라 한다)는 合各 電界일정時 彈性定數, 壓電定數 및 變形일정時 誘電率을 나타내며  $u_j$ ,  $\phi$ ,  $\rho$ 는 各各 機械的 變位, 電位 및 壓電體의 密度를 表示한다. 또한  $i, j, k, l$ 는 모두 各各 1, 2, 3이며 記號(,)는 距離에 對한 微分을 表示하며 記號(·)는 時間에 對한 微分을 나타낸다.

3m族의 LiNbO<sub>3</sub>에서의 各定數<sup>1)</sup>를 使用하고  $x_2$  및  $x_3$ 方向으로는 振動波長에 比하여 아주 큰 unbounded

\* 正會員 서울大學校 工科大學 工業教育科  
(Dept. of Industrial Education, College of Eng,  
S.N.U)

接受日字: 1976年 4月 9日

媒質이라 假定하면 (1), (2)式으로 부터 아래와 같은 行列를 얻게 된다<sup>4)</sup>.

$$\begin{pmatrix} c_{11}-\rho v^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} + \frac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}} - \rho v^2 & c_{14} - \frac{e_{15}e_{22}}{\epsilon_{11}} \\ 0 & c_{14} - \frac{e_{15}e_{22}}{\epsilon_{11}} & c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}} - \rho v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

(3)式으로 부터 縱波 및 두個의 橫波의 速度  $v_1, v_2, v_3$ 를 求할 수 있다<sup>4)</sup>.

이 3個의 彈性波의 速度에 對應하는 變位方向을 考察한다.  $v_i$ 波에 對應하는 變位의 方向餘弦을  $r_i, m_i, n_i$ 라 한다면 아래 式을 쉽게 얻을 수 있다.

$$r_i = \frac{A_{1i}}{\sqrt{A_{1i}^2 + A_{2i}^2 + A_{3i}^2}} \quad (4)$$

$$m_i = \frac{A_{2i}}{\sqrt{A_{1i}^2 + A_{2i}^2 + A_{3i}^2}} \quad (5)$$

$$n_i = \frac{A_{3i}}{\sqrt{A_{1i}^2 + A_{2i}^2 + A_{3i}^2}} \quad (6)$$

縱波  $v_1$ 에 對해서는 (3)式으로 부터

$$(c_{11} - \rho v_1^2) A_{11} = 0 \quad (7)$$

$$(c_{66} + \frac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}} - \rho v_1^2) A_{21} + (c_{14} - \frac{e_{15}e_{22}}{\epsilon_{11}}) A_{31} = 0 \quad (8)$$

$$(c_{14} - \frac{e_{15}e_{22}}{\epsilon_{11}}) A_{21} + (c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}} - \rho v_1^2) A_{31} = 0 \quad (9)$$

여기서  $v_1$ 에 對해서는  $A_{11} \neq 0, A_{21} = A_{31} = 0$ 가 成立되므로  $r_1 = 1, m_1 = n_1 = 0$ 이다. 卽  $v_1$ 의 波는  $x_1$ 方向만의 變位를 갖고 壓電定數를 포함하지 않는 純彈性的 縱波임을 (7)式으로 부터 알 수 있다.

$v_2$ 의 波에 對해서는 (7), (8), (9)式的  $v_1$ 은  $v_2$ 로 (7)式的  $A_{1i}$ 이  $A_{12}$ 로, (8), (9)式的  $A_{2i}$ 이  $A_{22}$ 로 또  $A_{3i}$ 이  $A_{32}$ 로 代置된다. 이 때는  $A_{12} = 0, A_{22} \neq 0, A_{32} \neq 0$ 가 成立되므로  $A_{22}/A_{32}$ 는 아래와 같이 된다.

$$\frac{A_{22}}{A_{32}} = \frac{c_{14} - \frac{e_{15}e_{22}}{\epsilon_{11}}}{\rho v_2^2 - c_{66} - \frac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}}} \quad (10)$$

(10)式을 數值計算하면  $-0.87034$ 이므로  $r_2 = 0, m_2 = -0.65651, n_2 = 0.75432$ 이다.

또한  $v_3$ 의 波에 對해서도 同一한 方法으로 求해지며  $A_{13} = 0, A_{23} \neq 0, A_{33} \neq 0$ 의 關係를 代入함에 依해서  $A_{23}/A_{33}$ 를 求하면 아래와 같이 된다.

$$\frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{c_{14} - \frac{e_{15}e_{22}}{\epsilon_{11}}}{\rho v_3^2 - c_{66} - \frac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}}}$$

(11)式을 數值計算하면  $1.14896$ 으로  $r_3 = 0, m_3 = 0.75431, n_3 = 0.65652$ 이다.

이를 綜合하여 얻은 結果는 그림 1과 같이  $v_2$ 의 變

位方向은  $-y$ 軸으로부터 時計方向으로  $48^\circ 58'$  혹은  $Z$ 軸으로 부터 反時計方向으로  $41^\circ 2'$ 이며  $v_3$ 의 變位方向은  $v_2$ 의 變位方向과 直角이 됨을 알 수 있다.

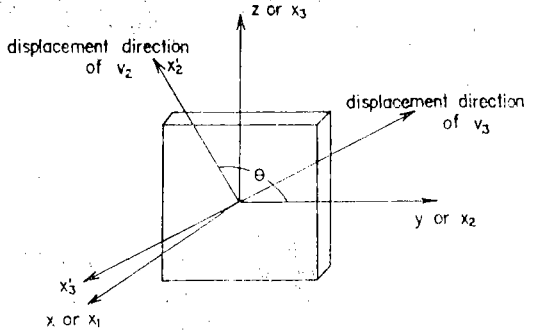


Fig.1. coordinate transformation.

卽  $y$ 軸으로 부터  $z$ 方向으로  $41^\circ 2'$ 의 方向이  $v_3$ 의 變位方向이다.

(2) X카트 振動子의 電氣-機械的 結合係數.

兩  $yz$ 面에 電極을 부치고 이 電極에 振動周波數와 같은 周波數의 交流電壓을 印加하면 共振周波數로 振動하게 된다. 이때  $yz$ 面은 振動波長에 比하여 充分히 넓은 것으로 生覺한다.

그림 1에서 座標系를  $x$ 軸을 中心으로  $\theta$ 만큼 회전하여 새로운 座標系를  $x_1, x_2, x_3$ 로 잡으면 各定數의 變換을 行할 수 있다. 座標軸 變換에 있어서  $v_3$ 의 變位方向과  $x_3$ 의 方向이  $180^\circ$  差異가 생기나 交流電壓을 印加하여 振動할 경우 모순이 생기지 않는다.

座標變換된 定數는 記號(')를 부쳐 表示하고 本解析에 必要한 定數만을 座標變換시키면 아래와 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} c_{11}' &= c_{11} \\ c_{55}' &= c_{44} \cos^2 \theta + c_{66} \sin^2 \theta - 2c_{14} \sin \theta \cos \theta \\ c_{56}' &= c_{14} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (c_{44} - c_{66}) \sin \theta \cos \theta \\ c_{66}' &= c_{44} \sin^2 \theta + c_{66} \cos^2 \theta + 2c_{14} \sin \theta \cos \theta \\ e_{15}' &= e_{15} \cos \theta + e_{22} \sin \theta \\ e_{16}' &= e_{15} \sin \theta - e_{22} \cos \theta \\ e_{11}' &= e_{11} \end{aligned} \right\} (12)$$

여기서 앞에서 求한 變位方向을 넣어 座標變換을 行한 다음 다시 解析을 行하면 (3)式的 左側 行列式은 各定數에 '만 부친것과 同一한 行列式이 된다.

이때  $v_1', v_2', v_3'$ 를 求하여도 座標變換前과 같으므로  $x_1$  方向으로의 速度들은 座標變換하여도 變하지 않는다는 것을 確認할 수 있었다.

두께  $2h$ 인 X카트板의  $j$ 方向으로의 變位  $u_j$ 는 아래

와 같이 쓸 수 있다.

$$u_j' = B^{(j)} \sin(\gamma^{(j)} x_1) \quad (13)$$

또 電位  $\phi'$ 는 다음과 같은 方法으로 求해진다. 우선 電束密度  $D'$ 는  $\frac{\partial}{\partial x_2'} = 0, \frac{\partial}{\partial x_3'} = 0$ 이므로  $D_1'$ 만 남고  $D_2'$  및  $D_3'$ 는 零이 된다.

$$\text{即 } D_1' = e_{15}' \frac{\partial u_3'}{\partial x_1} + e_{16}' \frac{\partial u_1'}{2x_1} - e_{11}' \frac{\partial \phi'}{\partial x_1} \quad (14)$$

그런데  $\text{div} D' = 0$  이므로

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x_1^2} = \frac{e_{16}'}{e_{11}'} \frac{\partial^2 u_2'}{\partial x_1^2} + \frac{e_{15}'}{e_{11}'} \frac{\partial^2 u_3'}{\partial x_1^2} \quad (15)$$

(15)式에 (13)式을 代入하고  $x_1$ 에 對하여 二번 積分하면

$$\phi' = \frac{e_{16}'}{e_{11}'} B^{(2)} \sin(\gamma^{(2)} x_1) + \frac{e_{15}'}{e_{11}'} B^{(3)} \sin(\gamma^{(3)} x_1) + F_1 x_1 + F_2 \quad (16)$$

다음에 境界條件을 考慮하여야 한다.

(21)式에 (13), (16), (19), (20)式을 代入하여 整理하면 아래와 같은 行列로서 表示된다.

$$\begin{pmatrix} c_{11}' \gamma^{(1)} \cos(\gamma^{(1)} h) & 0 & 0 \\ 0 & (c_{66}' + \frac{e_{16}'^2}{e_{11}'}) \gamma^{(2)} \cos(\gamma^{(2)} h) - \frac{e_{16}'^2}{e_{11}' h} \sin(\gamma^{(2)} h) & -\frac{e_{15}' e_{16}'}{e_{11}' h} \sin(\gamma^{(3)} h) \\ 0 & -\frac{e_{15}' e_{16}'}{e_{11}' h} \sin(\gamma^{(2)} h) & (c_{55}' + \frac{e_{15}'^2}{e_{11}'}) \gamma^{(3)} \cos(\gamma^{(3)} h) - \frac{e_{15}'^2}{e_{11}' h} \sin(\gamma^{(3)} h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} = 0 \quad (22)$$

(22)式에서  $v_2$  및  $v_3$ 의 波에 對해서 아래 關係式을 얻을 수 있다.

$$\frac{e_{16}'^2}{c_{66}' e_{11}' + e_{16}'^2} \cdot \frac{\tan(\gamma^{(2)} h)}{\gamma^{(2)} h} + \frac{e_{15}'^2}{c_{55}' e_{11}' + e_{15}'^2} \cdot \frac{\tan(\gamma^{(3)} h)}{\gamma^{(3)} h} = 1 \quad (23)$$

(23)式은 Onoe<sup>(6)</sup>의  $\tan X = \frac{X}{k^2}$ 와 비슷한 形으로  $v_2, v_3$ 에 對한 電氣-機械的 結合係數는 (23)式으로부터 아래와 같이 된다.

$$k_2 = \frac{e_{16}'}{\sqrt{c_{66}' e_{11}' + e_{16}'^2}} \quad (24)$$

$$k_3 = \frac{e_{15}'}{\sqrt{c_{55}' e_{11}' + e_{15}'^2}} \quad (25)$$

$k_2$  및  $k_3$ 는  $v_2$  및  $v_3$ 에 對한 電氣-機械結合係數를 數值計算하면  $\frac{k_2^2}{k_3^2} = 48.2$ 이다.

이와 같이 X컷트  $\text{LiNbO}_3$ 板은 낮은 橫波는  $k_3$ 가 적어 나타나지 않으며 縱波는 (7)式에서 알 수 있는 바와 같이 壓電定數에 關係없는 純彈性波로서 電氣的 勵振이 不能하고 빠른 橫波  $v_2$ 만이 勵振되어 두께 方向으로 傳播됨을 分明히 알 수 있다. 그러므로 (23)式은 아래와 같이 간단히 된다.

$$\frac{\gamma^{(2)} h}{k_2^2} = \tan(\gamma^{(2)} h) \quad (26)$$

(26)式은 Onoe<sup>(6)</sup>의  $\tan X = \frac{X}{k^2}$ 와 同一한 것으로 귀착된다. 그러나 本 論文에서는 위의 같이  $k_3$ 를 無視하였기 때문에 Onoe<sup>(6)</sup>의 式과 一致됨을 分明히 하였다.

$x_1 = \pm h$ 인 壓電體의 表面에서 아래와 같이 된다<sup>(5)</sup>.

$$\phi' = \phi_0 e^{-j\omega t} \quad (17)$$

$$T_{1j}' = 0 \quad (18)$$

(17)式에 (16)式을 代入하여 整理하면 積分常數  $F_1, F_2$ 를 求할 수 있다.

$$F_1 = -\frac{1}{h} \frac{e_{16}'}{e_{11}'} B^{(2)} \sin(\gamma^{(2)} h) - \frac{1}{h} \frac{e_{15}'}{e_{11}'} B^{(3)} \sin(\gamma^{(3)} h) \quad (19)$$

$$F_2 = \phi_0 e^{-j\omega t} \quad (20)$$

두번째의 境界條件  $T_{1j}' = 0$ 를 生覺해 보면

$$T_{11}' = T_1' = c_{11}' \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} = 0$$

$$T_{12}' = T_6' = c_{56}' \frac{\partial u_3'}{\partial x_1} + c_{66}' \frac{\partial u_2'}{\partial x_1} + e_{16}' \frac{\partial \phi'}{\partial x_1} = 0$$

$$T_{13}' = T_5' = c_{55}' \frac{\partial u_3'}{\partial x_1} + c_{56}' \frac{\partial u_2'}{\partial x_1} + e_{15}' \frac{\partial \phi'}{\partial x_1} = 0 \quad (21)$$

(3)共振周波數의 溫度特性

(26)式의  $\gamma^{(2)} h$ 는 아래와 같이 定義되어 있다<sup>(6)</sup>.

$$X_2 = \gamma^{(2)} h = \frac{2\pi f_r h}{v_2} \quad (27)$$

여기서  $f_r$ 는 共振周波數이다.

(27)式을 溫度  $T$ 에 對하여 偏微分하면

$$\frac{\partial X_2}{\partial T} = \frac{2\pi}{v_2} (h \frac{\partial f_r}{\partial T} + f_r \frac{\partial h}{\partial T}) - \frac{2\pi f_r h}{v_2^2} \frac{\partial v_2}{\partial T} \quad (28)$$

그러므로

$$\frac{1}{X_2} \frac{\partial X_2}{\partial T} = \frac{1}{f_r} \frac{\partial f_r}{\partial T} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{1}{v_2} \frac{\partial v_2}{\partial T} \quad (29)$$

또한  $\tan X_2 = \frac{X_2}{k_2^2}$ 를  $T$ 에 對해서 偏微分하여 整理하면

$$\frac{1}{X_2} \frac{\partial X_2}{\partial T} = \frac{2}{k_2 - k_2^2 \sec^2 X_2} \cdot \frac{\partial k_2}{\partial T} \quad (30)$$

(29)式 및 (30)式으로부터

$$\frac{1}{f_r} \frac{\partial f_r}{\partial T} = \frac{2}{(1 - k_2^2 \sec^2 X_2)} \frac{1}{k_2} \frac{\Delta k_2}{\Delta T} + \frac{1}{v_2} \frac{\Delta v_2}{\Delta T} - \frac{1}{h} \frac{\Delta h}{\Delta T} \quad (31)$$

(31)式과 같이 報告되어 있지 않은 共振周波數의 溫度係數를 求하는 式을 얻을 수 있다.

(4) 計算結果 및 檢討

壓電體의 各定數를 溫度變化後의 定數로 置換<sup>(7)</sup>하고 電氣-機械的 結合係數를 25°C와 0°C에서 (24), (25)式을 利用하여 計算한 結果는 表1과 같다.

Table. 1. Electromechanical coupling coefficients of X cut plate of  $\text{LiNbO}_3$ .

溫 度	$k_2$	$k_3$
25°C	0.6834	0.0984
0°C	0.68298	0.09767

$\text{LiNbO}_3$ 의 X카트板에서 빠른 橫波  $v_2$ 에 對한 溫度

Table. 2. Temperature coefficients of X cut plate of  $\text{LiNbO}_3$ .

$\frac{1}{k_2} \frac{\Delta k_2}{\Delta T}$	$\frac{1}{v_2} \frac{\Delta v_2}{\Delta T}$ <sup>(4)</sup>	$\frac{1}{h} \frac{\Delta h}{\Delta T}$ <sup>(8)</sup>	$\frac{1}{f_r} \frac{\Delta f_r}{\Delta T}$
$23 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	$-45.816 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	$14.4 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	$-78.43 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$

(31)式이 정당한가를 確認하기 위해서 實驗이 行하여진  $\text{LiTaO}_3$ <sup>(2)</sup>를 선택하여 本方法으로 計算한 共振周波數의 溫度係數  $4.37 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 는 warner의 實驗值<sup>(2)</sup>  $4 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 와 잘 一致한다. 그러므로 本研究方法의 타당성을 確認할 수 있었다.

### 3. 結 論

$\text{LiNbO}_3$ 의 X카트板을 振動子로 使用할 경우 빠른 橫波만이 勵振되며 變位方向은 z軸으로 부터 反時計方向으로 41°2'이고 座標變換의 結果 速度는 座標變換前과 同-함을 알았다.

또 電氣-機械結合係數를 壓電體의 定數로 부터 直接求할 수 있었으며, 共振周波數의 溫度係數를 求하는 式을 얻을 수 있었다.

數值計算 結果  $\text{LiNbO}_3$  X카트板의 共振周波數의 溫度係數가  $-78.43 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 임을 알았다.

### 謝 意

本 論文은 서울大學校 硏究費에 依하여 行하여 졌으며 關係 諸位에게 感謝를 드립니다.

### 參 考 文 獻

1. A.W. Warner: Determination of Elastic and Piezoelectric Constants for Crystals in Class (3m). J. Acoust. Soc. Amer. vol 42, No.6, p. 1223~1231, June 1967
2. A.W. Warner: Low Temperature Coefficient of Frequency in a Lithium Tantalate Resonator, Proc. IEEE, p.450, March 1967
3. G.A. Coquin; Analysis of the Excitation and Detection of Piezoelectric Surface Waves in Quartz by Means of Surface Electrodes. J. Acoust. Soc. Amer. vol 41, No.4, p.921~939, Oct 1966.
4. 金宗相: 彈性波 遲延線에 關한 硏究, 大韓電子工學會誌, 第11卷 第6號 p.221~235, 1974年 12月
5. Tiersten; Thickness Vibrations of Piezoelectric Plates. J. Acoust. Soc. Amer. vol 35, No.1, p.53~58, Jan. 1963.
6. M. Onoe; Shift in location of resonant frequency caused by large electromechanical Coupling in thickness mode resonators. J. Acoust. Soc. Amer. Vol. 35, No.1, p.36~42, Jan. 1963.
7. Chong Sang Kim, et al: Temperature Dependence of the Elastic Surface wave Velocity in  $\text{LiNbO}_3$  and  $\text{LiTaO}_3$ , Japan J. of Appl. Phys.vol.13, No.1, p.24~27, Jan. 1974.
8. Y.S. Kim et al; Thermal Expansion of Lithium Tantalate and Lithium Niobate Single Crystals. J. of Appl. phys. vol.40, No.11, p.4637~4641, Oct.1969.