

分布荷重을 받는 周邊固定 矩形板의 彈性解析

張 錫 潤\*

Analysis of Rectangular Plates under Distributed Loads of Various Intensity with All Edges Built In

by

Chang, Suk Yoon

Abstract

Some method of analysis of rectangular plates under distributed load of various intensity with all edges built in are presented in. Analysis of many structures such as bottom, side shell, and deck plate of ship hull, and flat slab, deck systems of bridges is a problem of plate with continuous supports or clamped edges.

When the four edges of rectangular plate is simply supported, the double fourier series solution developed by Navier can represent an exact result of this problem. If two opposite edges are simply supported, Levy's method is available to give an "exact" solution. When the loading condition and boundary condition of a plate does not fall into these cases, no simple analytic method seems to be feasible.

Analysis of a plate under distributed loads of various intensity with all edges built in is carried out by applying Navier solution and Levy's method as well as "Principle of Superposition"

In discussing this problem we start with the solution of the problem for a simply supported rectangular plate and superpose on the deflection of such a plate the deflections of the plate by slopes distributed along the all edges. These slopes we adjust in such a manner as to satisfy the condition of no rotation at the boundary of the clamped plate.

This method can be applied for the cases of plates under irregularly distributed loads of various intensity with two opposite edges simply supported and the other two edges clamped and all edges simply supported and this method can also be used to solve the influence values of deflection, moment and etc. at arbitrary position of plates under the live load

1. 서 론

대부분의 구조물은 입체구조로 되어있다. 이럴경우 대부분 문제를 간소화하여 1차원의 문제로 해석하거나 아니면 Beam strip 혹은 Frame으로 해석하여 간소화하고있다. 그러나 그 결과 불합리하거나 혹은 잘못된 결과를 가져오는 경우가 많다. 특히 Ship hull의 Decksystem 이나 건축의 Flat Slab, 교량의 Deck system 등은 외부경계조건이 고정 아니면 연속지지이고 불규칙 분포하중을 받고 있는 판의 문제이다.

판의경우 대개 편의상 몇개의 Beam strip 으로 나누어 해석하여 실용화 하고 있으나 그결과는 때로는 매우 불합리한 결과를 가져오게 된다.

임의의 분포하중을 받는 외부경계조건이 고정인 구형 판의 경우 이러한 근사해법은 불합리하고 정당화되지 못할 경우가있다. 이러한 문제해석에는 "임의이론"에 의한 중첩의원리(principle of superposition)가 적용될 수 있는데 판의경우 외부 경계조건이 단순지지이면 Navier Solution, 서로 대응하는 두변이 단순지지 이고 다른 두변이 임의일 경우 Levy Solution으로 정확하게

해결할 수 있다.

따라서 본 논문에서는 중첩의원리를 이용하여 경계 조건이 단순지지인 경우의 Navier Solution 과 외부 경계에서의 Rotation을 구속하기 위한 조건을 외부경계조건으로하는 판을 Levy Solution 을 이용하여 치짐을 각각 구한다을 중첩하여 일반적인 치짐 방정식을 유도하였다. 이 방법은 판에 수직으로 작용하는 하중상태가 불규칙하게 분포되어있을 경우 주변 경계조건이 대응하는 두 변이 단순지지 이고 다른 두변이 고정일 경우, 모두 단순지지일 경우에도 그대로 적용될수있는 장점이 있다. 따라서 본 논문에서는 판의외부 경계조건이 모두 고정일 경우의 해석을 구체적으로 발표하였다.

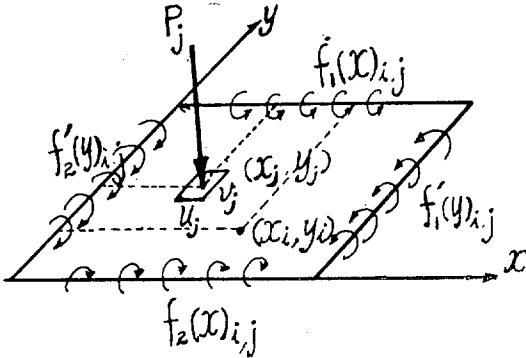


Fig. 1. Coordinate system

2. 이론의 전개

응력이 탄성한계 내에서 작용하는한 중첩의원리 (principle of superposition)와 변위의 적합성 (compatibility)이 성립된다. 고려되고있는 외부경계조건이 고정인 판의 임의점 (xi, yi)에 크기가 (uj, vj)인 면적에균일하게 분포되어 있는 합력이 Pj인 하중이 판에 수직으로 작용할때 구형판의 임의점 (xi, yi)에서의 치짐량을 Wi, 대응하는 두변에서의 회전구속에 의한 임의점의치짐량을 각각 R1Wi,j, R2Wi,j라 정의하면

$$W_i = \sum_{j=1}^N R_1 W_{i,j} + \sum_{j=1}^N R_2 W_{i,j} + \sum_{j=1}^N W_{i,j} \quad (2-1)$$

단위하중이 j점 (xj, yj)에 작용할때의 i점 (xi, yi)에서의 치짐량을 bi,j, 단위하중에 의한 x축에 평행한 대응하는 두변에서의 회전구속에 의한 i점 (xi, yi)에서의 치짐량을 ai,j, Y축에 평행한 다른 두변에서의 회전구속에 의한 i점 (xi, yi)에서의 치짐량을 Ci,j라 하면

$$b_{i,j} = \frac{W_{i,j}}{P_j}, \quad a_{i,j} = \frac{R_1 W_{i,j}}{P_j}, \quad c_{i,j} = \frac{R_2 W_{i,j}}{P_j} \quad (2-2)$$

이고 (2-1)식은 다음과 같이 된다.

$$W_i = P_1 a_{i,1} + P_2 a_{i,2} + \dots + P_N a_{i,N} + P_1 c_{i,1} + P_2 c_{i,2} + \dots + P_N c_{i,N} + P_1 b_{i,1} + P_2 b_{i,2} + \dots + P_N b_{i,N} \quad (2-3)$$

따라서 모든점을 고려하면

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_i \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & a_{i,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & & c_{i,N} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{N,1} & \dots & c_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & & b_{i,N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N,1} & \dots & b_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

여기서

W : 실제 변위를 나타내는 Column Vector

C : 단위하중에 의한 x 축에 평행한 두변에서의 회전구속에 의한 i점에서의 치짐량 즉 Influence Coefficient를 나타내는 Matrix

A : 단위하중에 의한 y 축에 평행한 두변에서의 회전구속에 의한 i점에서의 치짐량 즉 Influence Coefficient를 나타내는 Matrix

B : 단순지지 상태에서 단위하중에 의한 i점에서의 치짐량 즉 Influence Coefficient를 나타내는 Matrix

P : 집중하중 Vector

라 정의하면 (2-4)식은 간편하게

$$W = AP + CP + BP \quad (2-5)$$

로 표시될수 있다. 여기서

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_i \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & a_{i,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & a_{N,N} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & & c_{i,N} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{N,1} & \dots & c_{N,N} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & & b_{i,N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N,1} & \dots & b_{N,N} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix}$$

3. Navier Solution을 이용한 해석

구형판의 외부경계조건이 단순지지일 경우 Navier Solution을 간단히 이용할 수 있다. 평면좌표계 (x, y)로 표시된 구형박판의 미소변형이론에 의한 Lagrange면미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q/D \quad (3-1)$$

여기서 W : 판의 치짐량

q : 판에 수직으로 작용하는 하중

D : 판의 휨 강성

x 및 y 방향으로 길이가 각각 a,b인 판이 x=0, x=a, y=0, y=b에서 단순지지되어있다. 이 판에 작용하는 하중

$$q=f(x'y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\quad (3-2)$$

여기서

$$C_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^bf(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

처짐의 상태로 하중의 상태와 근사하다는 관념에 의거

$$W=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\quad (3-3)$$

라 가정하고 식(3-1)에 대입하여  $W_{mn}$ 을 구한 다음 (3

$$W_{i,j}=\frac{16P_j}{\pi^6D}\frac{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x_j}{a}\sin\frac{n\pi y_j}{b}\sin\frac{m\pi u_j}{2a}\sin\frac{n\pi v_j}{2b}}{mnu_jv_j\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\sin\frac{m\pi x_i}{a}\sin\frac{n\pi y_i}{b}\quad (3-5)$$

단위하중에 의한 처짐량 즉 Influence Coefficient

$$b_{i,j}=\frac{16}{\pi^6D}\frac{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x_j}{a}\sin\frac{n\pi y_j}{b}\sin\frac{m\pi u_j}{2a}\sin\frac{n\pi v_j}{2b}}{mnu_jv_j\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\sin\frac{m\pi x_i}{a}\sin\frac{n\pi y_i}{b}\quad (3-6)$$

단순지지되어있는 판의 외부 경계인  $x$  축에 평행한 대응하는 두변  $y=0, y=b$ 에서의  $y$ 방향의 slope 방정식을 상 상  $f_2(x)_{i,j}, f_1(x)_{i,j}$ 라 가정하면

$$f_2(x)_{i,j}=\frac{16P_j}{\pi^6D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mnj}\beta_n\sin\frac{m\pi x_i}{a}\quad (3-7)$$

$$f_1(x)_{i,j}=\frac{16P_j}{\pi^6D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mnj}(-1)^n\beta_n\sin\frac{m\pi x_i}{a}\quad (3-8)$$

판의 다른 경계인  $y$  축에 평행한 대응하는 두변  $x=0, x=a$ 에서의  $x$  방향의 Slope 방정식을 각각  $f'_1(y)_{i,j}, f'_2(y)_{i,j}$ 라 가정하면

$$f'_2(y)_{i,j}=\frac{16P_j}{\pi^6D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mnj}\alpha_m\sin\frac{n\pi y_i}{b}\quad (3-9)$$

$$f'_1(y)_{i,j}=\frac{16P_j}{\pi^6D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mnj}(-1)^m\alpha_m\sin\frac{n\pi y_i}{b}\quad (3-10)$$

여기서

$$F_{mnj}=\frac{\sin\frac{m\pi x_j}{a}\sin\frac{n\pi y_j}{b}\sin\frac{m\pi u_j}{2a}\sin\frac{n\pi v_j}{2b}}{mnu_jv_j\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\alpha_m=\frac{m\pi}{a}$$

$$\beta_n=\frac{n\pi}{b}$$

#### 4. Levy Solution에 의한 해석

판의 외부 경계조건이 서로대응하는 두변이 단순지지이고 다른 두변이 임의일 경우의 판해성에는 Levy Solution이 가장 일반적으로 널리 이용된다. 판에 수직

-3)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$W=\frac{1}{\pi^4D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\quad (3-4)$$

단순지지인 판의  $(x_j, y_j)$ 점에 있는  $x$ 방향의 크기  $u_j, y$  방향의 크기  $v_j$ 인 면적에 균등하게 작용하는 하중의 추 량을  $p_j$ 라 하면  $i$ 점  $(x_i, y_i)$ 의 처짐량은 다음과 같이 구 해진다.

으로 작용하는 하중이 없을 경우 평면좌표계  $(x,y)$ 로 표시된 구형판의 미소변형 이론에 의한 미분방정식은 다음과 같이 변환된다.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=0\quad (4-1)$$

여기서  $w$  : 판의 처짐량

$x$  및  $y$ 방향으로의 길이가 각각  $a, b$ 인 판이  $y$ 축에 평행한  $x=0, x=a$ 인 대응하는 두변에서의 지지조건이 단순지지이고 다른 두변이 임의일 경우 식(4-1)의 해는 다음과 같다.

$$W=\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\left(A_m\sinh\frac{m\pi y}{a}+B_m\cosh\frac{m\pi y}{a}+C_m\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}+D_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\quad (4-2)$$

한편  $x$ 축에 평행한  $x=0, y=b$  대응하는 두변에서의 지지조건이 단순지지이고 다른 두변이 임의일 경우 식 (4-1)의 해는 다음과 같다.

$$W=\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi y}{b}\left(A'_m\sinh\frac{m\pi x}{b}+B'_m\cosh\frac{m\pi x}{b}+C'_m\frac{m\pi x}{b}+D'_m\frac{m\pi x}{b}\cosh\frac{m\pi x}{b}\right)\quad (4-3)$$

식(4-2)에서의 상수  $A_m, B_m, C_m, D_m$ 을  $x$ 축에 평행한  $y=0, y=b$ 인 대응하는 두변에서의 계계조건인  $W=0, y$ 방향의 Slope,  $\frac{dW}{dy}$ 의 값이  $f_2(x)_{i,j}, f_1(x)_{i,j}$  임을 고려하여 결정하면 식(4-2)는

$$R_1W_{i,j}=\frac{16P_j}{\pi^6D}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\alpha_mx_i(A_mj\sinh\alpha_my_j+C_mj\alpha_my_j\sinh\alpha_my_j+D_mj\alpha_my_j\cosh\alpha_my_j)\quad (4-4)$$

여기서

$$A_{mj} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \beta_n [\alpha_m b + (-1)^n \sinh \alpha_m b] \alpha_m b}{\alpha_m^3 b^2 - \alpha_m \sinh^2 \alpha_m b}$$

$$C_{mj} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \beta_n [\sinh \alpha_m b - \alpha_m b - (-1)^n \sinh \alpha_m b + (-1)^n \alpha_m b \cosh \alpha_m b]}{[\alpha_m^3 b^2 - \alpha_m \sinh^2 \alpha_m b]}$$

$$D_{mj} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \beta_n [(-1)^n \alpha_m b \sinh \alpha_m b + \sinh^2 \alpha_m b]}{\alpha_m^3 b^2 - \alpha_m \sinh^2 \alpha_m b}$$

단위 하중에 의한 X축에 평행한 대응하는 두 번에서의 회전구속에 의한 i점의 치점량 즉 Influence Coefficient

$$a_{i,j} = \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m x_i (A_{mj} \sinh \alpha_m y_i + C_{mj} \alpha_m y_i \sinh \alpha_m y_i + D_{mj} \alpha_m y_i \cosh \alpha_m y_i) \quad (4-5)$$

(4-3)식에서의 상수 A'm, B'm, C'm D'm를 y축에 평행한 x=0, x=a 인 대응하는 두 번에서의 경계조건이 W=0, x방향의 Slope,  $\frac{dW}{dx}$ 의 값이 f'2(y)i,j, f'1(y)i,j임을 고려하여 결정하면 (4-3)식은

$$R_2 W_{i,j} = \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \beta_m y_i (A'_{mj} \sinh \beta_m x_i + C'_{mj} \beta_m x_i \sinh \beta_m x_i + D'_{mj} \beta_m x_i \cosh \beta_m x_i) \quad (4-6)$$

여기서

$$A'_{mj} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \alpha_m [\beta_m a + (-1)^m \sinh \beta_m a]}{\beta_m^3 a^2 - \beta_m \sinh^2 \beta_m a}$$

$$C'_{mj} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \alpha_m [\sinh \beta_m \cosh \beta_m a - \beta_m a - (-1)^m \sinh \beta_m a + (-1)^m \beta_m a \cosh \beta_m a]}{[\beta_m^3 a^2 - \beta_m \sinh^2 \beta_m a]}$$

$$D'_{mj} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \alpha_m [\beta_m a (-1)^m \sinh \beta_m a + \sinh^2 \beta_m a]}{\beta_m^3 a^2 - \beta_m \sinh^2 \beta_m a}$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b}$$

단위 하중에 의한 y축에 평행한 대응하는 두 번에서의 회전구속에 의한 i점의 치점량 즉 Influence Coefficient

$$c_{i,j} = \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \beta_m y_i (A'_{mj} \sinh \beta_m x_i + C'_{mj} \beta_m x_i \sinh \beta_m x_i + D'_{mj} \beta_m x_i \cosh \beta_m x_i) \quad (4-7)$$

### 5. 주변고정인 구형판의 해석

판의 외부 경계가 모두 고정인 구형판에 임의의 위치에 임의의 크기의 하중이 불규칙하게 판에 수직으로 작용할 경우의 판의 해석은 3,4절에서 논술한 바와 같이 판의 외부 경계가 단순지지일 경우에는 Navier Solution, 대응하는 두 번이 단순지지이고 다른 두번이 고정일 경우의 Levy Solution 을 이용하여 구한 다음 이 값을 중첩하여  $W, \frac{dW}{dx}, \frac{dW}{dy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ 를 구하면 다음과 같다.

$$W_i = \sum_{j=1}^N \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m x_i (A_{mj} \sinh \alpha_m y_i + C_{mj} \alpha_m y_i \sinh \alpha_m y_i + D_{mj} \alpha_m y_i \cosh \alpha_m y_i) + \sum_{j=1}^N \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \beta_m y_i (A'_{mj} \sinh \beta_m x_i + C'_{mj} \beta_m x_i \sinh \beta_m x_i + D'_{mj} \beta_m x_i \cosh \beta_m x_i) + \sum_{j=1}^N \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \sin \alpha_m x_i \sin \beta_n y_i \quad (5-1)$$

$$\left(\frac{dW}{dx}\right)_i = \sum_{j=1}^N \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos \alpha_m x_i (A_{mj} \sinh \alpha_m y_i + C_{mj} \alpha_m y_i \sinh \alpha_m y_i + D_{mj} \alpha_m y_i \cosh \alpha_m y_i) + \sum_{j=1}^N \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \beta_m y_i [A'_{mj} \beta_m \cosh \beta_m x_i + C'_{mj} (\beta_m \sinh \beta_m x_i + \beta_m \beta_m x_i \cosh \beta_m x_i) + D'_{mj} \beta_m (\cosh \beta_m x_i + \beta_m x_i \sinh \beta_m x_i)] + \sum_{j=1}^N \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \alpha_m \cos \alpha_m x_i \sin \beta_n y_i \quad (5-2)$$

$$\left(\frac{dW}{dy}\right)_i = \sum_{j=1}^N \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m x_i [A_{mj} \alpha_m \cosh \alpha_m y_i + C_{mj} \alpha_m (\sinh \alpha_m y_i + \alpha_m y_i \cosh \alpha_m y_i) + D_{mj} \alpha_m (\cosh \alpha_m y_i + \alpha_m y_i \sinh \alpha_m y_i)] + \sum_{j=1}^N \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos \beta_m y_i (A'_{mj} \sinh \beta_m x_i + C'_{mj} \beta_m x_i \sinh \beta_m x_i + D'_{mj} \beta_m x_i \cosh \beta_m x_i) + \sum_{j=1}^N \frac{16 P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \beta_n \sin \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i \quad (5-3)$$

$$\begin{aligned}
 (M_x)_i = & \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha^2_m \sin \alpha_m x_i \sinh \alpha_m y_i (A_{mj} + C_{mj} \alpha_m y_i - \nu A_{mj} - \nu C_{mj} \alpha_m y_i - 2\nu D_{mj}) \\
 & + \alpha^2_m \sin \alpha_m x_i \cosh \alpha_m y_i (D_{mj} \alpha_m y_i - 2\nu C_{mj} - \nu D_{mj} \alpha_m y_i) \\
 & - \beta^2_m \sin \beta_m y_i \sinh \beta_m x_i (A'_{mj} + C'_{mj} \beta_m x_i + 2D'_{mj} - \nu A'_{mj} - \nu C'_{mj} \beta_m x_i) \\
 & - \beta^2_m \sin \beta_m y_i \cosh \beta_m x_i (2C'_{mj} + D'_{mj} \beta_m x_i - \nu D'_{mj} \beta_m x_i) \\
 & + \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \sin \alpha_m x_i \sin \beta_n y_i (\alpha^2_m + \nu \beta^2_n) \quad (5-4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (M_y)_i = & \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha^2_m \sin \alpha_m x_i \sinh \alpha_m y_i (\nu A_{mj} + \nu C_{mj} \alpha_m y_i - A_{mj} - C_{mj} \alpha_m y_i - 2D_{mj}) \\
 & + \alpha^2_m \sin \alpha_m x_i \cosh \alpha_m y_i (\nu D_{mj} \alpha_m y_i - 2C_{mj} - D_{mj} \alpha_m y_i) \\
 & - \beta^2_m \sin \beta_m y_i \sinh \beta_m x_i (\nu A'_{mj} + \nu C'_{mj} \beta_m x_i + 2\nu D'_{mj} - A'_{mj} - C'_{mj} \beta_m x_i) \\
 & - \beta^2_m \sin \beta_m y_i \cosh \beta_m x_i (2\nu C'_{mj} + \nu D'_{mj} \beta_m x_i - D'_{mj} \beta_m x_i)] \\
 & + \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \sin \beta_n y_i (\nu \alpha^2_m + \beta^2_n) \quad (5-5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (M_{xy})_i = & (1-\nu) \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha^2_m \cos \alpha_m x_i \cosh \alpha_m y_i (A_{mj} + C_{mj} \alpha_m y_i + D_{mj}) \right. \\
 & + \alpha^2_m \cos \alpha_m x_i \sinh \alpha_m y_i (C_{mj} + D_{mj} \alpha_m y_i) \\
 & + \beta^2_m \cos \beta_m y_i \cosh \beta_m x_i (A'_{mj} + C'_{mj} \beta_m x_i + D'_{mj}) \\
 & \left. + \beta^2_m \cos \beta_m y_i \sinh \beta_m x_i (C'_{mj} + D'_{mj} \beta_m x_i) \right\} + \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \alpha_m \beta_n \cos \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i \quad (5-6)
 \end{aligned}$$

여기서  $\nu$ 는 포아송의 비 이다.

$$\begin{aligned}
 (Q_x)_i = & \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} (-2D_{mj} \alpha^3_m \cos \alpha_m x_i \sinh \alpha_m y_i - 2C_{mj} \alpha^3_m \cos \alpha_m x_i \cosh \alpha_m y_i \\
 & - 2D'_{mj} \beta^3_m \sin \beta_m y_i \cosh \beta_m x_i - 2C'_{mj} \beta^3_m \sin \beta_m y_i \sinh \beta_m x_i) \\
 & + \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \alpha_m (\alpha^2_m + \beta^2_n) \cos \alpha_m x_i \sin \beta_n y_i \quad (5-7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (Q_y)_i = & \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} (-2D_{mj} \alpha^3_m \sin \alpha_m x_i \cosh \alpha_m y_i - 2C_{mj} \alpha^3_m \sin \alpha_m x_i \sinh \alpha_m y_i \\
 & - 2D'_{mj} \beta^3_m \cos \beta_m y_i \sinh \beta_m x_i - 2C'_{mj} \beta^3_m \cos \beta_m y_i \cosh \beta_m x_i) \\
 & + \sum_{j=1}^N \frac{16P_j}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnj} \beta_n (\alpha^2_m + \beta^2_n) \sin \alpha_m x_i \cos \beta_n y_i \quad (5-8)
 \end{aligned}$$

“에”로서 변의 길이가 모두  $a$ 인 정방형 구형판에 균일하게 분포되어있는 하중  $q_0$ 가 판에 수직으로 작용할 경우, 판의 외부경계가 단순지지일 경우, 마주보는 두 변이 단순지지이고 다른 두 변이 고정일 경우, 모든 변이 고정일 경우의 판의 중심점 ( $x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2}$ )에서의 처짐량  $W_{max}$ 를 계산하였다.

식(3-6), (4-5), (4-7)에  $P_j = q_0 a^2, u_j = v_j = b = a, x_j = y_j = \frac{a}{2}, x_i = y_i = \frac{a}{2}$ 를 대입하여 구한 Influence Coefficient를 다시 식(2-3)에 대입하면 각 경우의 처짐량이 구해진다. 그 결과는 다음표와 같다. 참고로 Timoshenko 방법에 의한 값을 병기 하였다.

판의 중앙점에서의 처짐값( $W_{max}$ )

판의 경계조건	본논문에 의한 방법	Timoshenko 방법
외부경계가 모두 단순 지지일 경우	$0.0041 \frac{q_0 a^4}{D}$	$0.0041 \frac{q_0 a^4}{D}$
다주보는 두변이 단순지지이고 다른 두변이 고정일 경우	$0.0023 \frac{q_0 a^2}{D}$	$0.0019 \frac{q_0 a^4}{D}$
모든 외부 경계가 고정일 경우	$0.0006 \frac{q_0 a^4}{D}$	$0.0012 \frac{q_0 a^4}{D}$

6. 결 론

판의 외부 경계가 모두 고정인 구형판에 임의의 위치에 임의의 크기의 하중이 불규칙하게 분포되어 판에 수직으로 작용할 경우의 판을 해석적인 방법으로 해결하였다. 외부경계가 단순지지일 경우는 Navier Solution 과 중첩의 원리를 이용한 Double Fourier Solution을 이용하였다 각각 대응하는 두변에서의 회전구속에 의한 영향은 Levy의 Solution 과 중첩의 원리를 이용하여 해결하였다. 결과적으로 외부경계가 단순지지일 경우는 Navier Solution 과 중첩의 원리를 이용한 방법(대한조선학회지 제13권제1호)과 일치되며 대응하는 두 변이 단순지지 이고 다른 두 변이 고정인 경우도 Navier Solution과 중첩의 원리를 이용한 해석적방법으로 해결할 수 있게 되었고 또한 판의 임의점에 수직으로 작용하는 Live load에 의한 임의점의 Influence Value 도 해석할 수 있게 되었다.

參 考 文 獻

1. Love, A.E.H., "A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity," 4th Edition, Dover Publication, New York, 1944.
2. Sneddon, I.N., "Fourier Transforms," 2nd Edition, McGraw. Hill, New York, 1951.
3. Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity," 2nd Edition, McGraw. Hill, New York, 1956.
4. Muskhelishvili, N.I., "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity," Fourth

- Edition, P. Noordhoff Ltd, Groningen-The Netherlands, 1963.
5. M. Filonenko-Borodich, "Theory of Elasticity," P. Noordhoff N.V., Groningen, The Netherlands.
6. Timoshenko, S. and Woinowsky. Krieger, S., "Theory of Plates and Shells," McGraw. Hill, New York, 1959.
7. Hildebrand' F.B., "Introduction to Numerical Analysis," McGraw. Hill, New York, 1956.
8. Salvadori, M.G. and Baron, M.L., "Numerical Methods in Engineering," 2nd Edition, Prentice. Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1961.
9. Hadley, G., "Linear Algebra," Addison. Wesley, Reading, Massachusetts, 1961.
10. Dukhyun Kim, "Analysis of Triangularly Folded Plate Roofs of Umbrella Type," Korea Military Academy, 1966.
11. Karl Marguerre, Hans-theo Woernle, "Elastic Plates," Blaisdell publishing Co., a division of Ginn and company. U.S.A. 1969.
12. 장석윤, "평판의 한 간이해법" 대한토목학회지 제 18권, 제2호, 1970.
13. 김덕현, 장석윤, "A Simplified Method of Analysis of a Plate Problem", 일본토목학회 제22차 학술강연회논문집, 1967.
14. 김덕현, 장석윤, "내부지지점을 가지는 평판의 탄성해석", 대한토목학회 20주년기념논문집, 1972.
15. 장석윤, "분포하중을 받는 구형판의 탄성해석" 대한조선학회지 제13권 제1호, 1976.